



Gestión Aeronáutica: Estadística Teórica
Facultad Ciencias Económicas y Empresariales
Departamento de Economía Aplicada
Profesor: Santiago de la Fuente Fernández

EJERCICIOS RESUELTOS VARIABLE ALEATORIA BIDIMENSIONAL



EJERCICIOS VARIABLES ALEATORIAS BIDIMENSIONALES

Ejercicio 1.- Un experimento consiste en lanzar tres veces una moneda. Sean las variables aleatorias: X = "número de caras en las tres tiradas" e Y = "diferencia en valor absoluto entre el número de caras y el de escudos en las tres tiradas". Se pide:

- Distribución de probabilidad de (X, Y)
- Media y desviación típica de las distribuciones marginales de X e Y
- Covarianza y coeficiente de correlación
- ¿Son X e Y independientes?
- Distribución condicionada de X a $Y = 3$
- Distribución condicionada de Y a $X = 2$
- $P[X \leq 1; Y > 0]$, $P[X \geq 2]$, $P[Y < 3]$

Solución:

- a) Espacio muestral: $\Omega = \{(c, c, c), (c, c, e), (c, e, c), (e, c, c), (c, e, e), (e, c, e), (e, e, c), (e, e, e)\}$

$$X(c, c, c) = 3$$

$$X(c, c, e) = X(c, e, c) = X(e, c, c) = 2$$

$$X(c, e, e) = X(e, c, e) = X(e, e, c) = 1$$

$$X(e, e, e) = 0$$

$$Y(c, c, c) = 3$$

$$Y(c, c, e) = Y(c, e, c) = Y(e, c, c) = 1$$

$$Y(c, e, e) = Y(e, c, e) = Y(e, e, c) = 1$$

$$Y(e, e, e) = 3$$

Distribución de probabilidad:

X \ Y	Y		$p_{i\cdot}$
	1	3	
0	0	1/8	1/8
1	3/8	0	3/8
2	3/8	0	3/8
3	0	1/8	1/8
$p_{\cdot j}$	6/8	2/8	1

Probabilidades marginales:

$$\sum_{i=1}^4 p_{i\cdot} = p_{1\cdot} + p_{2\cdot} + p_{3\cdot} + p_{4\cdot} = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1$$

$$\sum_{j=1}^2 p_{\cdot j} = p_{\cdot 1} + p_{\cdot 2} = \frac{6}{8} + \frac{2}{8} = 1$$

Adviértase que la probabilidad conjunta:

$$\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^2 p_{ij} = \left(0 + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{3}{8} + 0\right) + \left(\frac{3}{8} + 0\right) + \left(0 + \frac{1}{8}\right) = 1$$

Siendo: $\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^2 p_{ij} = \sum_{i=1}^4 p_{i\cdot} = \sum_{j=1}^2 p_{\cdot j} = 1$. En general,

$$\boxed{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p_{ij} = \sum_{i=1}^n p_{i\cdot} = \sum_{j=1}^m p_{\cdot j} = 1}$$

b) Distribución marginal de la variable aleatoria X:

x_i	$p_{i\cdot}$	$x_i \cdot p_{i\cdot}$	x_i^2	$x_i^2 \cdot p_{i\cdot}$
0	1/8	0	0	0
1	3/8	3/8	1	3/8
2	3/8	6/8	4	12/8
3	1/8	3/8	9	9/8
	1	12/8		3

$$\text{Media: } \mu_X = E(X) = \alpha_{10} = \sum_{i=1}^4 x_i \cdot p_{i\cdot} = \frac{12}{8} = 1,5$$

$$\text{Varianza: } \sigma_X^2 = \text{Var}(X) = \mu_{20} = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$E(X^2) = \alpha_{20} = \sum_{i=1}^4 x_i^2 \cdot p_{i\cdot} = 3$$

$$\sigma_X^2 = \text{Var}(X) = \mu_{20} = E(X^2) - [E(X)]^2 = 3 - 1,5^2 = 0,75 \quad \mapsto \quad \sigma_X = \sqrt{0,75} = 0,866$$

♦ Distribución marginal de la variable aleatoria Y:

y_j	$p_{\cdot j}$	$y_j \cdot p_{\cdot j}$	y_j^2	$y_j^2 \cdot p_{\cdot j}$
1	6/8	6/8	1	6/8
3	2/8	6/8	9	18/8
	1	12/8		3

$$\text{Media: } \mu_Y = E(Y) = \alpha_{01} = \sum_{j=1}^2 y_j \cdot p_{\cdot j} = \frac{12}{8} = 1,5$$

$$\text{Varianza: } \sigma_Y^2 = \text{Var}(Y) = \mu_{02} = E(Y^2) - [E(Y)]^2$$

$$E(Y^2) = \alpha_{02} = \sum_{j=1}^2 y_j^2 \cdot p_{\cdot j} = 3$$

$$\sigma_Y^2 = \text{Var}(Y) = \mu_{02} = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = 3 - 1,5^2 = 0,75 \quad \mapsto \quad \sigma_Y = \sqrt{0,75} = 0,866$$

c) Covarianza y coeficiente de correlación

♦ La covarianza se define: $\mu_{11} = \mu_{XY} = \sigma_{XY} = \text{Cov}(X, Y) = \alpha_{11} - \alpha_{10} \cdot \alpha_{01}$

$$\text{donde } \alpha_{11} = E(XY) = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^2 x_i \cdot y_j \cdot p_{ij}$$

Así pues,

$$\alpha_{11} = \left(0 \cdot 1 \cdot 0 + 0 \cdot 3 \cdot \frac{1}{8}\right) + \left(1 \cdot 1 \cdot \frac{3}{8} + 1 \cdot 3 \cdot 0\right) + \left(2 \cdot 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot 3 \cdot 0\right) + \left(3 \cdot 1 \cdot 0 + 3 \cdot 3 \cdot \frac{1}{8}\right) = \frac{18}{8} = 2,25$$

$$\text{con lo cual, } \mu_{XY} = \text{Cov}(X, Y) = \alpha_{11} - \alpha_{10} \cdot \alpha_{01} = 2,25 - 1,5 \cdot 1,5 = 0$$

Señalar que la covarianza $\mu_{XY} = \text{Cov}(X, Y)$ puede ser negativa, nula o positiva, siendo una medida de la fuerza de la relación lineal entre X e Y.

♦ El coeficiente de correlación lineal ρ_{XY} es un número abstracto (sin unidades) que determina el grado en que las variables (X, Y) están relacionadas linealmente.

$$\text{Se define: } \rho_{XY} = \frac{\mu_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$$

con lo cual, $\rho_{XY} = \frac{\mu_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = \frac{0}{\sqrt{0,75} \cdot \sqrt{0,75}} = 0$

Denotar que $-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$. Cuando $\rho_{XY} = 0$ no existe relación lineal entre las variables X e Y, diciendo que están incorreladas.

d) Para que X e Y sean independientes se tiene que verificar: $p_{ij} = p_{i\cdot} \cdot p_{\cdot j} \quad \forall (x_i, y_j)$

	Y		
X \	1	3	$p_{i\cdot}$
0	$p_{11} = 0$	1/8	$p_{1\cdot} = 1/8$
1	3/8	0	3/8
2	3/8	0	3/8
3	0	1/8	1/8
$p_{\cdot j}$	$p_{\cdot 1} = 6/8$	2/8	1

$$p_{11} = 0 \neq \frac{1}{8} \cdot \frac{6}{8} = p_{1\cdot} \cdot p_{\cdot 1}$$

Las variables X e Y NO son independientes

Señalar que cuando dos variables X e Y son independientes, es decir, cuando $p_{ij} = p_{i\cdot} \cdot p_{\cdot j} \quad \forall (x_i, y_j)$, la covarianza es cero. El caso contrario no se verifica. Es decir:

$X \text{ e } Y \text{ independientes} \Rightarrow \mu_{11} = \text{Cov}(X, Y) = 0$ $\mu_{11} = \text{Cov}(X, Y) = 0 \not\Rightarrow X \text{ e } Y \text{ independientes}$
--

e) Distribución condicionada de X a $Y = 3$: $P[X/Y = 3] = \frac{P[X \cap (Y = 3)]}{P(Y = 3)}$

	Y		
X \	1	3	$p_{i\cdot}$
0	0	1/8	1/8
1	3/8	0	3/8
2	3/8	0	3/8
3	0	1/8	1/8
$p_{\cdot j}$	6/8	2/8	1

X	$P(X/Y = 3)$
0	$\frac{1/8}{2/8} = \frac{1}{2}$
1	$\frac{0}{2/8} = 0$
2	$\frac{0}{2/8} = 0$
3	$\frac{1/8}{2/8} = \frac{1}{2}$
	1

En general, $P[X/Y = y_j] = \frac{P[X \cap (Y = y_j)]}{P(Y = y_j)}$

f) Distribución condicionada de Y a $X = 2$: $P[Y / X = 2] = \frac{P[Y \cap (X = 2)]}{P(X = 2)}$

X \ Y	1	3	$p_{i\cdot}$
0	0	1/8	1/8
1	3/8	0	3/8
2	3/8	0	3/8
3	0	1/8	1/8
$p_{\cdot j}$	6/8	2/8	1

Y	$P(Y / X = 2)$
1	$\frac{3/8}{3/8} = 1$
3	$\frac{0}{3/8} = 0$
1	

En general, $P[Y / X = x_i] = \frac{P[Y \cap (X = x_i)]}{P(X = x_i)}$

g) $P[X \leq 1; Y > 0]$, $P[X \geq 2]$, $P[Y < 3]$

X \ Y	1	3
0	0	1/8
1	3/8	0
2	3/8	0
3	0	1/8

X \ Y	1	3
0	0	1/8
1	3/8	0
2	3/8	0
3	0	1/8

X \ Y	1	3
0	0	1/8
1	3/8	0
2	3/8	0
3	0	1/8

$$P[X \leq 1; Y > 0] = P[X = 0; Y = 1] + P[X = 0; Y = 3] + P[X = 1; Y = 1] + P[X = 1; Y = 3] =$$

$$= p_{11} + p_{12} + p_{21} + p_{22} = 0 + \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + 0 = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$P[X \geq 2] = P[X = 2; Y = 1] + P[X = 2; Y = 3] + P[X = 3; Y = 1] + P[X = 3; Y = 3] =$$

$$= p_{31} + p_{32} + p_{41} + p_{42} = \frac{3}{8} + 0 + 0 + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$P[Y < 3] = P[X = 0; Y = 1] + P[X = 1; Y = 1] + P[X = 2; Y = 1] + P[X = 3; Y = 1] =$$

$$= p_{11} + p_{21} + p_{31} + p_{41} = 0 + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + 0 = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

Ejercicio 2.- Sea una variable aleatoria bidimensional con distribución de probabilidad

	Y		
X		-1	1
1		1/6	1/3
2		1/12	1/4
3		1/12	1/12

Se pide:

- ¿Son X e Y independientes?
- Hallar las medias y desviaciones típicas de X e Y
- Hallar las probabilidades: $P[X \leq 2; Y > 0]$ $P[X \geq 2]$ $P[Y < 0]$
- Hallar el coeficiente de correlación

Solución:

- Para analizar si X e Y son independientes hay que hallar las distribuciones marginales de X e Y, y ver si verifica que $p_{ij} = p_{i\cdot} \cdot p_{\cdot j} \quad \forall (x_i, y_j)$

	Y			
X		-1	1	$p_{i\cdot}$
1		1/6	1/3	1/2
2		1/12	1/4	1/3
3		1/12	1/12	1/6
$p_{\cdot j}$		1/3	2/3	1

$$p_{11} = \frac{1}{6} \neq p_{1\cdot} \cdot p_{\cdot 1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$$

$$p_{12} = \frac{1}{3} = p_{1\cdot} \cdot p_{\cdot 2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$$

$$p_{21} = \frac{1}{12} \neq p_{2\cdot} \cdot p_{\cdot 1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

$$p_{22} = \frac{1}{4} \neq p_{2\cdot} \cdot p_{\cdot 2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

$$p_{31} = \frac{1}{12} \neq p_{3\cdot} \cdot p_{\cdot 1} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{18}$$

$$p_{32} = \frac{1}{12} \neq p_{3\cdot} \cdot p_{\cdot 2} = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{9}$$

Luego las variables X e Y no son independientes.

- Para hallar las medias y desviaciones típicas de X e Y hay que considerar las distribuciones marginales:

- ♦ Distribución marginal de la de la variable aleatoria X

$X = x_i$	p_i	$x_i \cdot p_i$	x_i^2	$x_i^2 \cdot p_i$
1	1/2	1/2	1	1/2
2	1/3	2/3	4	4/3
3	1/6	3/6	9	9/6
	1	10/6		20/6

$$\text{Media: } \alpha_{10} = \mu_X = E(X) = \sum_{i=1}^3 x_i \cdot p_i = \frac{10}{6}$$

$$\alpha_{20} = E(X^2) = \sum_{i=1}^3 x_i^2 \cdot p_i = \frac{20}{6}$$

$$\text{Varianza: } \mu_{20} = \sigma_X^2 = \text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{20}{6} - \left(\frac{10}{6}\right)^2 = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$$

$$\text{Desviación típica: } \sigma_X = \sqrt{\frac{5}{9}} = 0,745$$

- ♦ Distribución marginal de la variable aleatoria Y

$Y = y_j$	p_j	$y_j \cdot p_j$	y_j^2	$y_j^2 \cdot p_j$
-1	1/3	-1/3	1	1/3
1	2/3	2/3	1	2/3
	1	1/3		1

$$\text{Media: } \alpha_{01} = \mu_Y = E(Y) = \sum_{j=1}^2 y_j \cdot p_j = \frac{1}{3}$$

$$\alpha_{02} = E(Y^2) = \sum_{j=1}^2 y_j^2 \cdot p_j = 1$$

$$\text{Varianza: } \mu_{02} = \sigma_Y^2 = \text{Var}(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$$

$$\text{Desviación típica: } \sigma_Y = \sqrt{\frac{8}{9}} = 0,943$$

c) Probabilidades: $P[X \leq 2; Y > 0]$ $P[X \geq 2]$ $P[Y < 0]$

	Y	-1	1
X			
1		1/6	1/3
2		1/12	1/4
3		1/12	1/12

	Y	-1	1
X			
1		1/6	1/3
2		1/12	1/4
3		1/12	1/12

	Y	-1	1
X			
1		1/6	1/3
2		1/12	1/4
3		1/12	1/12

$$P[X \leq 2; Y > 0] = P[X=1; Y=1] + P[X=2; Y=1] = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

$$P[X \geq 2] = P[X=2; Y=-1] + P[X=2; Y=1] + P[X=3; Y=-1] + P[X=3; Y=1] = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$P[Y < 0] = P[X=1; Y=-1] + P[X=2; Y=-1] + P[X=3; Y=-1] = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3}$$

d) Coeficiente de correlación

	Y	-1	1	$x_i \cdot y_j \cdot p_{ij}$	
X				-1	1
1		1/6	1/3	-1/6	1/3
2		1/12	1/4	-2/12	2/4
3		1/12	1/12	-3/12	3/12
				-7/12	13/12
				6/12	

$$\alpha_{11} = E(XY) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 x_i \cdot y_j \cdot p_{ij} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Covarianza: } \sigma_{XY} = \text{Cov}(X, Y) = \alpha_{11} - \alpha_{10} \cdot \alpha_{01} = \frac{1}{2} - \frac{10}{6} \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{18} = -0,555$$

$$\text{Coeficiente de correlación: } \rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = \frac{-0,555}{0,745 \cdot 0,943} = -0,79$$

Siendo $\rho_{XY} = -0,79$, valor cercano a -1 , existe una fuerte relación lineal entre las variables X e Y.

Ejercicio 3.- Sean (X, Y) los paquetes diarios que venden dos operadores de viajes, cuya distribución de probabilidad conjunta se refleja en la tabla:

	Y	0	1	2
X				
0		0,15	0,15	0,10
1		0,05	0,20	0,05
2		0,10	0,05	0,15

Hallar la media, varianza y desviación típica de las variables: X, Y, X + Y, X - Y

Solución:

X \ Y	0	1	2	$p_{i\cdot}$	$x_i \cdot p_{i\cdot}$	$x_i^2 \cdot p_{i\cdot}$
0	0,15	0,15	0,10	0,40	0	0
1	0,05	0,20	0,05	0,30	0,30	0,30
2	0,10	0,05	0,15	0,30	0,60	1,20
$p_{\cdot j}$	0,30	0,40	0,30	1	0,90	1,50
$y_j \cdot p_{\cdot j}$	0	0,40	0,60	1		
$y_j^2 \cdot p_{\cdot j}$	0	0,40	1,20	1,60		

♦ Distribución marginal de la variable X:

$$\text{Media: } \alpha_{10} = \mu_X = E(X) = \sum_{i=1}^3 x_i \cdot p_{i\cdot} = 0,9$$

$$\alpha_{20} = E(X^2) = \sum_{i=1}^3 x_i^2 \cdot p_{i\cdot} = 1,5$$

$$\text{Varianza: } \mu_{20} = \sigma_X^2 = \text{Var}(X) = \alpha_{20} - \alpha_{10}^2 = 1,5 - 0,9^2 = 0,69$$

$$\text{Desviación típica: } \sigma_X = \sqrt{0,69} = 0,83$$

♦ Distribución marginal de la variable Y:

$$\text{Media: } \alpha_{01} = \mu_Y = E(Y) = \sum_{j=1}^3 y_j \cdot p_{\cdot j} = 1$$

$$\alpha_{02} = E(Y^2) = \sum_{j=1}^3 y_j^2 \cdot p_{\cdot j} = 1,6$$

$$\text{Varianza: } \mu_{02} = \sigma_Y^2 = \text{Var}(Y) = \alpha_{02} - \alpha_{01}^2 = 1,6 - 1^2 = 0,6$$

$$\text{Desviación típica: } \sigma_Y = \sqrt{0,6} = 0,77$$

♦ Distribución de la variable (X + Y):

Media: $\mu_{X+Y} = E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 0,9 + 1 = 1,9$

Se tiene: $\mu_{X+Y} = E(X + Y) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (x_i + y_j) \cdot p_{ij}$

X \ Y	0	1	2
0	0,15	0,15	0,10
1	0,05	0,20	0,05
2	0,10	0,05	0,15

$$\mu_{X+Y} = 0 \cdot 0,15 + 1 \cdot 0,15 + 2 \cdot 0,10 + 1 \cdot 0,05 + 2 \cdot 0,20 + 3 \cdot 0,05 + 2 \cdot 0,10 + 3 \cdot 0,05 + 4 \cdot 0,15 = 1,9$$

Varianza: $\sigma_{X+Y}^2 = \text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y)$ X e Y no independientes

X \ Y	Y			x _i · y _j · p _{ij}			
	0	1	2	0	1	2	
0	0,15	0,15	0,10	0	0	0	1
1	0,05	0,20	0,05	0	0,20	0,10	
2	0,10	0,05	0,15	0	0,10	0,60	
				0	0,30	0,7	

$$\alpha_{11} = E(XY) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 x_i \cdot y_j \cdot p_{ij} = 1$$

Covarianza: $\sigma_{XY} = \text{Cov}(X, Y) = \alpha_{11} - \alpha_{10} \cdot \alpha_{01} = 1 - 0,9 \cdot 1 = 0,1$

$$\sigma_{X+Y}^2 = \text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y) = 0,69 + 0,6 + 2 \cdot 0,1 = 1,49$$

Se tiene: $\sigma_{X+Y}^2 = E[(X + Y)^2] - [E(X + Y)]^2$

X \ Y	0	1	2
0	0,15	0,15	0,10
1	0,05	0,20	0,05
2	0,10	0,05	0,15

$$E[(X + Y)^2] = 0 \cdot 0,15 + 1 \cdot 0,15 + 4 \cdot 0,10 + 1 \cdot 0,05 + 4 \cdot 0,20 + 9 \cdot 0,05 + 4 \cdot 0,10 + 9 \cdot 0,05 + 16 \cdot 0,15 = 5,1$$

$$\sigma_{X+Y}^2 = E[(X + Y)^2] - [E(X + Y)]^2 = 5,1 - 1,9^2 = 1,49 \quad \mapsto \quad \sigma_{X+Y} = \sqrt{1,49} = 1,22$$

♦ Distribución de la variable (X - Y):

Media: $\mu_{X-Y} = E(X - Y) = E(X) - E(Y) = 0,9 - 1 = -0,1$

$$\sigma_{X-Y}^2 = \text{Var}(X - Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) - 2\text{Cov}(X, Y) = 0,69 + 0,6 - 2 \cdot 0,1 = 1,09$$

Ejercicio 4.- Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional con función de densidad:

$$f(x, y) = \begin{cases} k & 0 < y < x < 1 \\ 0 & \text{restantes valores} \end{cases}$$

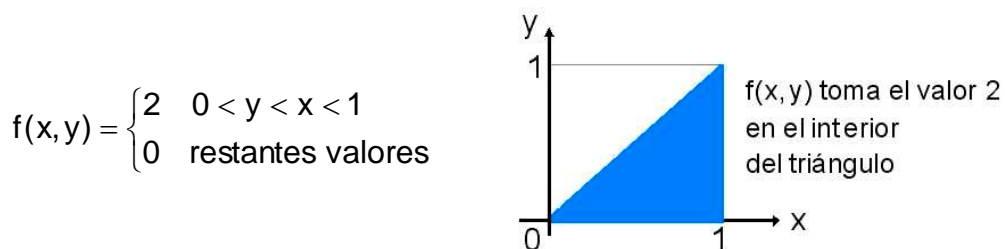
- Hallar k para que sea función de densidad
- Hallar las funciones de densidad marginales. ¿Son X e Y independientes?
- Hallar las funciones de distribución marginales
- Hallar las funciones de densidad condicionadas

Solución:

a) Para que $f(x, y)$ sea función de densidad tiene que verificarse: $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1$

$$\int_0^1 \int_0^x k dx dy = \int_0^1 k \left(\int_0^x dy \right) dx = \int_0^1 k [y]_0^x dx = k \int_0^1 x dx = k \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{k}{2} = 1 \quad \mapsto \quad k = 2$$

por tanto,



b) Funciones de densidad marginales:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \int_0^x 2 dy = 2[y]_0^x = 2x \quad 0 < x < 1$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx = \int_y^1 2 dx = 2[x]_y^1 = 2 - 2y \quad 0 < y < 1$$

X e Y son independientes cuando $f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$

$$f_1(x) \cdot f_2(y) = 2x \cdot (2 - 2y) = 4x - 4xy \neq 2 = f(x, y) \quad \text{luego no son independientes}$$

c) Funciones de distribución marginales:

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^x f_1(t) dt = \int_0^x f_1(t) dt = \int_0^x 2t dt = [t^2]_0^x = x^2 \quad 0 < x < 1$$

$$F_2(y) = \int_{-\infty}^y f_2(t) dt = \int_0^y f_2(t) dt = \int_0^y (2 - 2t) dt = [2t - t^2]_0^y = 2y - y^2 \quad 0 < y < 1$$

d) Funciones de densidad condicionadas:

$$f(x/y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)} = \frac{2}{2-2y} \quad 0 < y < 1 \quad 0 < x < 1$$

$$f(y/x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} = \frac{2}{2x} \quad 0 < x < 1 \quad 0 < y < 1$$

Ejercicio 5.- Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional con función de densidad:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & |y| < x ; 0 < x < 1 \\ 0 & \text{restantes valores} \end{cases}$$

a) Comprobar que $f(x,y)$ es función de densidad

b) Hallar las medias de X e Y

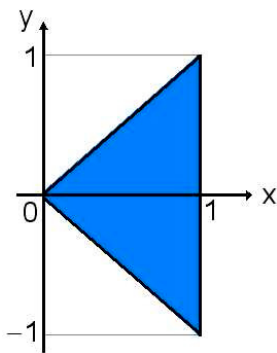
c) Hallar las probabilidades: $P\left[X < \frac{1}{2} ; Y < 0\right]$ y $P\left[X > \frac{1}{2} ; -\frac{1}{2} < Y < \frac{1}{2}\right]$

Solución:

a) $f(x,y)$ es función de densidad si se verifica: $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx dy = 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx dy = \int_0^1 \int_{-x}^x dx dy = \int_0^1 \left(\int_{-x}^x dy \right) dx = \int_0^1 [y]_{-x}^x dx = \int_0^1 2x dx = [x^2]_0^1 = 1$$

en consecuencia, $f(x,y)$ es función de densidad.



b) Para hallar las medias de X e Y hay que calcular primero las funciones de densidad marginales:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dy = \int_{-x}^x dy = [y]_{-x}^x = 2x \quad 0 < x < 1$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx = \begin{cases} \int_{-y}^1 dx = [x]_{-y}^1 = 1+y & -1 < y < 0 \\ \int_y^1 dx = [x]_y^1 = 1-y & 0 < y < 1 \end{cases}$$

$$\alpha_{10} = \mu_x = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x) dx = \int_0^1 x \cdot 2x dx = 2 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned} \alpha_{01} = \mu_y = E(Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} y f_2(y) dy = \int_{-1}^0 y f_2(y) dy + \int_0^1 y f_2(y) dy = \int_{-1}^0 y(1+y) dy + \int_0^1 y(1-y) dy = \\ &= \int_{-1}^0 (y+y^2) dy + \int_0^1 (y-y^2) dy = \left[\frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} \right]_{-1}^0 + \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right]_0^1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = 0 \end{aligned}$$

c) Probabilidades: $P\left[X < \frac{1}{2} ; Y < 0\right]$ y $P\left[X > \frac{1}{2} ; -\frac{1}{2} < Y < \frac{1}{2}\right]$

$$P\left[X < \frac{1}{2} ; Y < 0\right] = \int_0^{1/2} \int_{-x}^0 f(x,y) dx dy = \int_0^{1/2} \left(\int_{-x}^0 dy \right) dx = \int_0^{1/2} [y]_{-x}^0 dx = \int_0^{1/2} x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{1/2} = \frac{1}{8}$$

$$P\left[X > \frac{1}{2} ; -\frac{1}{2} < Y < \frac{1}{2}\right] = \int_{1/2}^1 \int_{-1/2}^{1/2} f(x,y) dx dy = \int_{1/2}^1 \left(\int_{-1/2}^{1/2} dy \right) dx = \int_{1/2}^1 [y]_{-1/2}^{1/2} dx = \int_{1/2}^1 dx = [x]_{1/2}^1 = \frac{1}{2}$$

Ejercicio 6.- La función de densidad asociada a la emisión de billetes de una compañía área es:

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y & 0 < x < 1 \quad 0 < y < 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

- Hallar la función de distribución
- Hallar las funciones de densidad marginales de X e Y
- ¿Son X e Y independientes?

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } F(x,y) &= \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u,v) dv du = \int_0^x \int_0^y (u+v) du dv = \int_0^x \left(\int_0^y (u+v) dv \right) du = \int_0^x \left(u[v]_0^y + \left[\frac{v^2}{2} \right]_0^y \right) du = \\ &= \int_0^x \left[uy + \frac{y^2}{2} \right] du = y \left[\frac{u^2}{2} \right]_0^x + \frac{y^2}{2} [u]_0^x = \frac{yx^2}{2} + \frac{y^2x}{2} = \frac{1}{2}(yx^2 + y^2x) \quad 0 \leq x < 1 \quad 0 \leq y < 1 \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$F(x,y) = \begin{cases} 0 & x < 0 \quad \text{ó} \quad y < 0 \\ \frac{1}{2}(yx^2 + y^2x) & 0 \leq x < 1 \quad 0 \leq y < 1 \\ F_1(x) = \frac{1}{2}(x^2 + x) & 0 \leq x < 1, \quad y \geq 1 \\ F_2(y) = \frac{1}{2}(y + y^2) & 0 \leq y < 1, \quad x \geq 1 \\ 1 & x \geq 1, \quad y \geq 1 \end{cases}$$

Funciones de densidad marginales de X e Y

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dy = \int_0^1 (x+y) dy = x[y]_0^1 + \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 = x + \frac{1}{2} \quad 0 < x < 1$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx = \int_0^1 (x+y) dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + y[x]_0^1 = \frac{1}{2} + y \quad 0 < y < 1$$

Adviértase que:

$$f_1(x) = \frac{\partial F_1(x)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2}(x^2 + x) \right] = x + \frac{1}{2} \quad f_2(y) = \frac{\partial F_2(y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{2}(y + y^2) \right] = \frac{1}{2} + y$$

a) X e Y son independientes cuando se verifica $f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$

$$f_1(x) \cdot f_2(y) = \left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} + y\right) \neq x + y = f(x,y)$$

luego no son independientes.

Ejercicio 7.- La función de distribución asociada a un fenómeno de la naturaleza es:

$$F(x,y) = \begin{cases} (1-e^{-x}) \cdot (1-e^{-y}) & x > 0, \quad y > 0 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

- Hallar la función de densidad
- Hallar las funciones de densidad marginales de X e Y
- Hallar las funciones de densidad condicionadas
- Calcular el coeficiente de correlación

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x,y) &= \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} \right] = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial \left((1-e^{-x}) \cdot (1-e^{-y}) \right)}{\partial x} \right] = \frac{\partial}{\partial y} \left[(1-e^{-y}) \frac{\partial (1-e^{-x})}{\partial x} \right] = \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left[(1-e^{-y}) \cdot e^{-x} \right] = e^{-x} \cdot \frac{\partial (1-e^{-y})}{\partial y} = e^{-x} \cdot e^{-y} = e^{-(x+y)} = \frac{1}{e^{x+y}} \quad x > 0, \quad y > 0 \end{aligned}$$

$$\text{Función de densidad } f(x,y) = \begin{cases} e^{-(x+y)} & x > 0 \quad y > 0 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

b) Funciones de densidad marginales

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dy = \int_0^{\infty} e^{-(x+y)} dy = \int_0^{\infty} e^{-x} \cdot e^{-y} dy = e^{-x} \int_0^{\infty} e^{-y} dy = -e^{-x} [e^{-y}]_0^{\infty} = -e^{-x} \cdot (-1) = e^{-x}$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx = \int_0^{\infty} e^{-(x+y)} dx = \int_0^{\infty} e^{-y} \cdot e^{-x} dx = e^{-y} \int_0^{\infty} e^{-x} dx = -e^{-y} [e^{-x}]_0^{\infty} = -e^{-y} \cdot (-1) = e^{-y}$$

Adviértase que X e Y son independientes al verificarse $f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$

$$f(x,y) = e^{-(x+y)} = f_1(x) \cdot f_2(y) = e^{-x} \cdot e^{-y}$$

X e Y **independientes** \Rightarrow La covarianza $\mu_{11} = \sigma_{xy} = 0 \Rightarrow \rho = 0$

c) Funciones de densidad condicionadas

$$f(x/y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)} = \frac{e^{-(x+y)}}{e^{-y}} = e^{-x} = f_1(x) \text{ al ser X e Y independientes}$$

$$f(y/x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} = \frac{e^{-(x+y)}}{e^{-x}} = e^{-y} = f_2(y) \text{ al ser X e Y independientes}$$

d) El coeficiente de correlación $\rho = \sigma_{xy} = \frac{\mu_{11}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$

$$\alpha_{10} = \mu_x = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_1(x) dx = \int_0^{\infty} x \cdot e^{-x} dx \doteq [-x \cdot e^{-x}]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-x} dx = [-x \cdot e^{-x} - e^{-x}]_0^{\infty} = 1$$

$$\alpha_{01} = \mu_y = E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_2(y) dy = \int_0^{\infty} y \cdot e^{-y} dy \doteq [-y \cdot e^{-y}]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-y} dy = [-y \cdot e^{-y} - e^{-y}]_0^{\infty} = 1$$

Nota: $\int_0^{\infty} x \cdot e^{-x} dx = [x \cdot e^{-x}]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-x} dx = [x \cdot e^{-x} - e^{-x}]_0^{\infty}$

donde se ha realizado el cambio $\begin{cases} u = x & du = dx \\ dv = e^{-x} dx & v = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^{\infty} \end{cases}$

$$\alpha_{11} = E(X \cdot Y) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} x \cdot y \cdot f(x,y) dx dy = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} x \cdot y \cdot e^{-(x+y)} dx dy = \int_0^{\infty} x \cdot e^{-x} dx \cdot \int_0^{\infty} y \cdot e^{-y} dy = 1$$

$$\alpha_{20} = E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f_1(x) dx = \int_0^{\infty} x^2 \cdot e^{-x} dx \doteq [-x^2 \cdot e^{-x}]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 2 \cdot x \cdot e^{-x} dx =$$

$$= [-x^2 \cdot e^{-x}]_0^{\infty} + 2[-x \cdot e^{-x} - e^{-x}]_0^{\infty} = [-x^2 \cdot e^{-x} - 2 \cdot x \cdot e^{-x} - 2 \cdot e^{-x}]_0^{\infty} = 2$$

Análogamente, $\alpha_{02} = E(Y^2) = 2$

$$\sigma_x^2 = \alpha_{20} - \alpha_{10}^2 = 2 - 1 = 1 \quad \sigma_x = \sqrt{1} = 1$$

$$\sigma_y^2 = \alpha_{02} - \alpha_{01}^2 = 2 - 1 = 1 \quad \sigma_y = \sqrt{1} = 1$$

$$\text{covarianza: } \mu_{11} = \sigma_{xy} = \alpha_{11} - \alpha_{10} \cdot \alpha_{01} = 1 - 1 \cdot 1 = 0$$

$$\text{coeficiente de correlación } \rho = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{0}{1 \cdot 1} = 0 \Rightarrow \text{Las variables son incorreladas}$$

Ejercicio 8.- La venta en un mercado de abastos lleva asociada la función:

$$f(x,y) = \begin{cases} k \left[\frac{xy}{2} + 1 \right] & 0 < x < 1 \quad -1 < y < 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

- Hallar k para que sea función de densidad
- Hallar la función de distribución
- Funciones de densidad marginales y condicionadas
- Se considera la transformación $Z = X - Y$ y $T = X + 2Y$, hallar la función de densidad de la variable (Z, T)

Solución:

$$a) \quad f(x,y) \geq 0 \Leftrightarrow k \geq 0$$

Para que $f(x,y)$ sea función de densidad debe verificarse que $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx dy = 1$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_{-1}^1 k \left[\frac{xy}{2} + 1 \right] dx dy &= \int_0^1 k \left(\int_{-1}^1 \left[\frac{xy}{2} + 1 \right] dy \right) dx = \int_0^1 k \left(x \left[\frac{y^2}{4} \right]_{-1}^1 + [y]_{-1}^1 \right) dx = \\ &= \int_0^1 2k dx = 2k [x]_0^1 = 2k = 1 \quad \mapsto \quad k = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{La función de densidad } f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy+2}{4} & 0 < x < 1 \quad -1 < y < 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

$$b) \text{ Función de distribución } F(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u,v) dv du$$

$$F(x,y) = \int_0^x \int_{-1}^y \left[\frac{uv+2}{4} \right] dv du = \int_0^x \left(\int_{-1}^y \left[\frac{uv+2}{4} \right] dv \right) du = \frac{1}{4} \int_0^x \int_{-1}^y ([uv+2] dv) du =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} \int_0^x \left(u \left[\frac{v^2}{2} \right]_{-1}^y + 2[v]_{-1}^y \right) du = \frac{1}{4} \int_0^x \left(\frac{uy^2}{2} - \frac{u}{2} + 2y + 2 \right) du = \\
&= \frac{1}{4} \left[\frac{y^2}{2} \left(\frac{u^2}{2} \right)_0^x - \frac{1}{2} \left(\frac{u^2}{2} \right)_0^x + 2y(u)_0^x + 2(u)_0^x \right] = \frac{x^2(y^2-1)}{16} + \frac{x(y+1)}{2}
\end{aligned}$$

En consecuencia, $F(x,y) = \frac{x^2(y^2-1)}{16} + \frac{x(y+1)}{2} \quad 0 \leq x < 1 \quad -1 \leq y < 1$

▪ Las funciones de distribución marginales, resultan:

$$\begin{aligned}
F_1(x) = P(X \leq x) &= \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u,v) dv du = \int_0^x \int_{-1}^1 \frac{uv+2}{4} dv du = \int_0^x \left(\int_{-1}^1 \frac{uv+2}{4} dv \right) du = \\
&= \int_0^x \left(u \left[\frac{v^2}{8} \right]_{-1}^1 + \frac{2}{4} [v]_{-1}^1 \right) du = \int_0^x du = [u]_0^x = x \quad 0 \leq x < 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_2(y) = P(Y \leq y) &= \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f(u,v) dv du = \int_0^1 \int_{-1}^y \frac{uv+2}{4} dv du = \int_0^1 \left(\int_{-1}^y \frac{uv+2}{4} dv \right) du = \\
&= \int_0^1 \left(u \left[\frac{v^2}{8} \right]_{-1}^y + \frac{2}{4} [v]_{-1}^y \right) du = \int_0^1 \left[\left(\frac{y^2-1}{8} \right) u + \frac{2}{4} (y+1) \right] du = \left(\frac{y^2-1}{8} \right) \left[\frac{u^2}{2} \right]_0^1 + \frac{2}{4} (y+1) [u]_0^1 = \\
&= \frac{y^2-1}{16} + \frac{y+1}{2} = \frac{y^2+8y+7}{16} \quad -1 \leq y < 1
\end{aligned}$$

También se podrían haber hallado a través de las funciones de densidad marginales:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dy = \int_{-1}^1 \left[\frac{xy}{4} + \frac{1}{2} \right] dy = \frac{x}{4} \left[\frac{y^2}{2} \right]_{-1}^1 + \frac{1}{2} [y]_{-1}^1 = 1$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx = \int_0^1 \left[\frac{xy}{4} + \frac{1}{2} \right] dx = \frac{y}{4} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 + \frac{1}{2} [x]_0^1 = \frac{y+4}{8}$$

$$F_1(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_1(u) du = \int_0^x du = [u]_0^x = x \quad 0 \leq x < 1$$

$$F_2(y) = P(Y \leq y) = \int_{-\infty}^y f_2(v) dv = \int_{-1}^y \left[\frac{v+4}{8} \right] dv = \frac{1}{8} \left[\frac{v^2}{2} + 4v \right]_{-1}^y = \frac{y^2+8y+7}{16} \quad -1 \leq y < 1$$

La función de distribución conjunta:

$$F(x,y) = \begin{cases} 0 & x < 0 \quad \text{ó} \quad y < -1 \\ \frac{x^2(y^2-1)}{16} + \frac{x(y+1)}{2} & 0 \leq x < 1 \quad -1 \leq y < 1 \\ x & 0 \leq x < 1, \quad y \geq 1 \\ \frac{y^2+8y+7}{16} & -1 \leq y < 1, \quad x \geq 1 \\ 1 & x \geq 1, \quad y \geq 1 \end{cases}$$

c) Las funciones de densidad marginales se pueden hallar a partir de la función de distribución conjunta:

$$f_1(x) = \frac{\partial F_1(x)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x) = 1 \quad f_2(y) = \frac{\partial F_2(y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{y^2+8y+7}{16} \right] = \frac{y+4}{8}$$

o bien, a partir de la función de densidad:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dy = \int_{-1}^1 \left[\frac{xy}{4} + \frac{1}{2} \right] dy = \frac{x}{4} \left[\frac{y^2}{2} \right]_{-1}^1 + \frac{1}{2} [y]_{-1}^1 = 1$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx = \int_0^1 \left[\frac{xy}{4} + \frac{1}{2} \right] dx = \frac{y}{4} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 + \frac{1}{2} [x]_0^1 = \frac{y+4}{8}$$

• Funciones de densidad condicionadas:

$$f(y/x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} = \frac{(xy+2)/4}{1} = \frac{xy+2}{4} \neq f_2(y)$$

$$f(x/y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)} = \frac{(xy+2)/4}{(y+4)/8} = \frac{2xy+4}{y+4} \neq f_1(x)$$

Las variables X e Y no son independientes al ser $f(x,y) \neq f_1(x) \cdot f_2(y)$

$$d) \text{ En la transformación } \begin{cases} Z = X - Y \\ T = X + 2Y \end{cases} \quad J = \frac{\partial(z,t)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial t}{\partial x} & \frac{\partial t}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

por lo que existe la función de densidad $g(z,t)$

$$\text{Despejando (X,Y) en la función de (Z,T) se calcula el jacobiano } J_1 = \frac{\partial(x,y)}{\partial(z,t)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} Z = X - Y \\ T = X + 2Y \end{cases} \mapsto \begin{cases} 2Z = 2X - 2Y \\ T = X + 2Y \end{cases} \mapsto \begin{cases} X = \frac{2Z+T}{3} \\ Y = \frac{-Z+T}{3} \end{cases} \quad J_1 = \frac{\partial(x,y)}{\partial(z,t)} = \begin{vmatrix} 2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}$$

La función de densidad $g(z, t) = f[h_1(z, t), h_2(z, t)] \cdot |J_1|$

$$h_1(z, t) = \frac{2z+t}{3}, \quad h_2(z, t) = \frac{-z+t}{3}, \quad \begin{cases} 0 < x < 1 & \mapsto 0 < 2z+t < 3 \\ -1 < y < 1 & \mapsto -3 < -z+t < 3 \end{cases}$$

$$g(z, t) = \frac{\left[\frac{2z+t}{3} \right] \left[\frac{-z+t}{3} \right]}{4} \cdot \left| \frac{1}{3} \right| = \frac{(2z+t)(-z+t)}{108}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy+2}{4} & 0 < x < 1 \\ 0 & -1 < y < 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases} \quad g(z, t) = \begin{cases} \frac{(2z+t)(-z+t)}{108} & 0 < 2z+t < 3 \\ 0 & -3 < -z+t < 3 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Ejercicio 9.- Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional con función de probabilidad

$$p_{ij} = \begin{cases} c|x_i + y_j| & x_i = -2, -1, 0, 1, 2, \quad y_j = -2, -1, 0, 1, 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Calcular el valor de la constante c

b) $P[X = 0, Y = 2]$

c) $P[X = 1]$

d) $P[|X - Y| \leq 1]$

Solución:

a) Para determinar el valor de la constante c se elabora la tabla, siendo $p_{ij} = c|x_i + y_j|$

X \ Y	-2	-1	0	1	2	$p_{i\cdot}$
-2	4c	3c	2c	c	0	10c
-1	3c	2c	c	0	c	7c
0	2c	c	0	c	2c	6c
1	c	0	c	2c	3c	7c
2	0	c	2c	3c	4c	10c
$p_{\cdot j}$	10c	7c	6c	7c	10c	40c

$$\sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 p_{ij} = 40c = 1 \quad \mapsto \quad c = \frac{1}{40} \quad \mapsto \quad p_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{40}|x_i + y_j| & \begin{cases} x_i = -2, -1, 0, 1, 2 \\ y_j = -2, -1, 0, 1, 2 \end{cases} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

b) $P[X = 0, Y = 2] = \frac{1}{40}|0 + 2| = \frac{1}{20}$

$$c) P[X=1] = 7c = \frac{7}{40}$$

$$d) P[|X-Y| \leq 1] \stackrel{\text{zona sombreada}}{=} 28c = \frac{28}{40} = \frac{7}{10}$$

$$\begin{aligned} P[|X-Y| \leq 1] &= P[X=-2, Y=-2] + P[X=-2, Y=-1] + \\ &+ P[X=-1, Y=-2] + P[X=-1, Y=-1] + P[X=-1, Y=0] + \\ &+ P[X=0, Y=-1] + P[X=0, Y=0] + P[X=0, Y=1] + \\ &+ P[X=1, Y=0] + P[X=1, Y=1] + P[X=1, Y=2] + \\ &+ P[X=2, Y=1] + P[X=2, Y=2] = 28c = 28/40 = 7/10 \end{aligned}$$

Ejercicio 10.- Sean (X, Y) dos variables aleatorias independientes, cada una con la función de densidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y} & y > 0 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Calcular la función de densidad de la variable aleatoria $X + Y$

Solución:

Por ser variables aleatorias independientes, la función de densidad conjunta de la variable aleatoria bidimensional $X + Y$ es:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} e^{-x-y} & x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

La transformación a aplicar es $\begin{cases} U = X + Y \\ V = X \end{cases}$ siendo $x > 0$ e $y > 0 \mapsto \begin{cases} u > 0 \\ v > 0 \end{cases} \quad u > v$

Despejando (X, Y) en la función de (U, V) se calcula el jacobiano $J_1 = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$

$$\begin{cases} U = X + Y \\ V = X \end{cases} \mapsto \begin{cases} X = V \\ Y = U - V \end{cases} \quad J_1 = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

Función de densidad de la transformación $[h_1(u,v) = v ; h_2(u,v) = u - v]$:

$$f_{U,V}(u,v) = f_{X,Y}[h_1(u,v), h_2(u,v)] \cdot |J_1| = f_{X,Y}[v, u - v] \cdot |J_1| = f_{X,Y}[v, u - v] \cdot |-1| = f_{X,Y}[v, u - v]$$

$$f_{U,V}(u,v) = f_{X,Y}(v, u-v) = \begin{cases} e^{-v-(u-v)} = e^{-u} & u > 0, v > 0, u > v \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Como se quiere obtener la función de densidad de la variable aleatoria $U = X + Y$, se calcula la función de densidad marginal de U :

$$f_U(u) = \int_0^u f_{U,V} dv = \int_0^u e^{-u} dv = e^{-u} [v]_0^u = u \cdot e^{-u} \quad f_U(u) = \begin{cases} u \cdot e^{-u} & u > 0 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Ejercicio 11.- Sea (X,Y) una variable aleatoria bidimensional absolutamente continua con densidad uniforme en el cuadrante unitario $[0,1] \times [0,1]$. Calcular la función de densidad conjunta $U = X + Y$ y $V = X - Y$

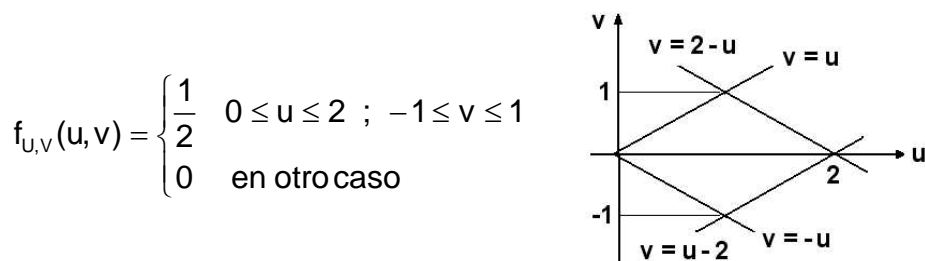
Solución:

$$\begin{cases} U = X + Y \\ V = X - Y \end{cases} \mapsto \begin{cases} X = \frac{U+V}{2} \\ Y = \frac{U-V}{2} \end{cases} \quad \text{El jacobiano } J_1 = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

Función de densidad de la transformación $[h_1(u,v) = (u+v)/2 ; h_2(u,v) = (u-v)/2]$:

$$\begin{aligned} f_{U,V}(u,v) &= f_{X,Y}[h_1(u,v), h_2(u,v)] \cdot |J_1| = f_{X,Y}\left[\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right] \cdot \left|-\frac{1}{2}\right| = \\ &= f_{X,Y}\left[\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right] \cdot \frac{1}{2} = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Dominio para las variables } X \text{ e } Y: \begin{cases} X = \frac{u+v}{2} \in [0,1] \\ Y = \frac{u-v}{2} \in [0,1] \end{cases} \mapsto \begin{cases} 0 \leq u+v \leq 2 \\ 0 \leq u-v \leq 2 \end{cases}$$



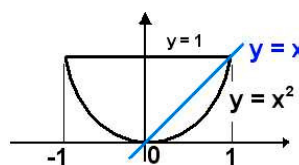
Ejercicio 12.- Dada la variable aleatoria bidimensional (X,Y) absolutamente continua con función de densidad conjunta

$$f(x,y) = \begin{cases} cx^2y & x^2 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Calcular:

- a) El valor de la constante c
- b) $P[X \geq Y]$
- c) Función de distribución conjunta

Solución:



a) Para el cálculo de la constante c se procede:

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \, dy \, dx = \int_{-1}^1 \left(\int_{x^2}^1 [cx^2y] \, dy \right) dx = \int_{-1}^1 \left(\frac{cx^2y^2}{2} \Big|_{y=x^2}^{y=1} \right) dx = \int_{-1}^1 \left[\frac{cx^2}{2} - \frac{cx^6}{2} \right] dx = \\ &= \left[\frac{cx^3}{6} - \frac{cx^7}{14} \right]_{x=-1}^{x=1} = \frac{c}{6} - \frac{c}{14} - \left[-\frac{c}{6} + \frac{c}{14} \right] = \frac{4c}{21} \quad \mapsto \quad c = \frac{21}{4} \end{aligned}$$

con lo cual, $f(x,y) = \begin{cases} \frac{21}{4}x^2y & x^2 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{b) } P[X \geq Y] &= \int_0^1 \left(\int_{x^2}^x \frac{21}{4}x^2y \, dy \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{21x^2y^2}{8} \Big|_{y=x^2}^{y=x} \right) dx = \int_0^1 \left[\frac{21x^4}{8} - \frac{21x^6}{8} \right] dx = \\ &= \left[\frac{21x^5}{40} - \frac{21x^7}{56} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{21}{40} - \frac{21}{56} = \frac{42}{280} = \frac{21}{140} \end{aligned}$$

$$\text{c) } F(x,y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u,v) \, dv \, du$$

- $-1 \leq x < 1, 0 \leq y < 1$

$$F(x,y) = \int_{u=-1}^{u=x} \left(\int_{v=u^2}^{v=y} \frac{21}{4}u^2v \, dv \right) du = \int_{-1}^x \left[\frac{21u^2v^2}{8} \Big|_{v=u^2}^{v=y} \right] du = \int_{-1}^x \left[\frac{21u^2y^2}{8} - \frac{21u^6}{8} \right] du =$$

$$= \left[\frac{21 u^3 y^2}{24} - \frac{21 u^7}{56} \right]_{u=-1}^{u=x} = \left[\frac{7 u^3 y^2}{8} - \frac{3 u^7}{8} \right]_{u=-1}^{u=x} = \left[\frac{7 x^3 y^2}{8} - \frac{3 x^7}{8} \right] - \left[-\frac{7 y^2}{8} + \frac{3}{8} \right] =$$

$$= \frac{7}{8} x^3 y^2 - \frac{3}{8} x^7 + \frac{7}{8} y^2 - \frac{3}{8}$$

▪ $-1 \leq x < 1, y \geq 1$

$$F(x, y) = \int_{u=-1}^{u=x} \left(\int_{v=u^2}^{v=1} \frac{21}{4} u^2 v \, dv \right) du = \left[\frac{7}{8} x^3 y^2 - \frac{3}{8} x^7 + \frac{7}{8} y^2 - \frac{3}{8} \right]_{y=1} = \frac{7}{8} x^3 - \frac{3}{8} x^7 + \frac{1}{2}$$

▪ $x \geq 1, 0 \leq y < 1$

$$F(x, y) = \int_{u=-1}^{u=1} \left(\int_{v=u^2}^{v=y} \frac{21}{4} u^2 v \, dv \right) du = \left[\frac{7}{8} x^3 y^2 - \frac{3}{8} x^7 + \frac{7}{8} y^2 - \frac{3}{8} \right]_{x=1} = \frac{7}{4} y^2 - \frac{3}{4}$$

▪ $x \geq 1, y \geq 1$

$$F(x, y) = \int_{u=-1}^{u=1} \left(\int_{v=u^2}^{v=1} \frac{21}{4} u^2 v \, dv \right) du = \left[\frac{7}{8} x^3 y^2 - \frac{3}{8} x^7 + \frac{7}{8} y^2 - \frac{3}{8} \right]_{x=1, y=1} = 1$$

En consecuencia,

$$F(x, y) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ 0 & y < 0 \\ \frac{7}{8} x^3 y^2 - \frac{3}{8} x^7 + \frac{7}{8} y^2 - \frac{3}{8} & -1 \leq x < 1, 0 \leq y < 1 \\ \frac{7}{8} x^3 - \frac{3}{8} x^7 + \frac{1}{2} & -1 \leq x < 1, y \geq 1 \\ \frac{7}{4} y^2 - \frac{3}{4} & x \geq 1, 0 \leq y < 1 \\ 1 & x \geq 1, y \geq 1 \end{cases}$$

Ejercicio 13.- Dada la variable aleatoria bidimensional (X,Y) con función de distribución

$$F(x,y) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0 & x \geq 0, y \leq 0 \\ xy & 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1 \\ x & 0 \leq x < 1, y \geq 1 \\ y & x \geq 1, 0 \leq y < 1 \\ 1 & x \geq 1, y \geq 1 \end{cases}$$

Calcular la función de densidad conjunta de la v.a. bidimensional (X,Y)

Solución:

a)

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0 & x \geq 0, y \leq 0 \\ y & 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1 \\ 1 & 0 \leq x < 1, y \geq 1 \\ 0 & x \geq 1, 0 \leq y < 1 \\ 0 & x \geq 1, y \geq 1 \end{cases} \quad f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0 & x \geq 0, y \leq 0 \\ 1 & 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1 \\ 0 & 0 \leq x < 1, y \geq 1 \\ 0 & x \geq 1, 0 \leq y < 1 \\ 0 & x \geq 1, y \geq 1 \end{cases}$$

Por consiguiente, $f(x,y) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$



