Universidad Autónoma de Madrid

Grado Ciencias Ambientales
Facultad Ciencias
Departamento Matemáticas
Profesor: Santiago de la Fuente Fernández

TABLAS INFERENCIA ESTADÍSTICA: INTERVALOS CONFIANZA CONTRASTES HIPÓTESIS

INTERVALOS DE CONFIANZA

a) Intervalo de confianza para la media μ de una distribución normal $N(\mu, \sigma)$ de varianza conocida σ^2

$$I = \left[\bar{x} \ \pm \ z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

b) Intervalo de confianza para la media μ de una distribución normal $N(\mu, \sigma)$ de varianza desconocida σ^2

- Muestras superiores a 30, $n > 30 \quad \mapsto \quad I = \left[\bar{x} \ \pm \ z_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}} \right]$

- Muestras pequeñas $n \leq 30 \quad \mapsto \quad I = \left[\bar{x} \ \pm \ t_{\alpha/2;\,(n-1)} \frac{s}{\sqrt{n}} \right]$

c) Intervalo de confianza para la varianza σ^2 de una distribución normal

$$I = \left[\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2;\,(n-1)}} ; \ \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2;\,(n-1)}} \right]$$

d) Intervalo de confianza para la diferencia de medias de dos distribuciones normales

- Las varianzas poblaciones σ_1^2 y σ_2^2 son conocidas

$$I = \left[(\bar{x} - \bar{y}) \ \pm \ z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \right]$$

NOTA.- En todos los intervalos de confianza s^2 *es la cuasivarianza*

- Las varianzas poblaciones σ_1^2 y σ_2^2 son desconocidas:

  - Caso en que la suma $(n_1 + n_2) > 30$ con $n_1 \approx n_2$

$$I = \left[(\bar{x} - \bar{y}) \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} \right]$$

  - Caso en que los tamaños muestrales son pequeños y las varianzas son desconocidas, pero iguales:

$$I = \left[(\bar{x} - \bar{y}) \pm t_{\alpha/2;\,(n_1+n_2-2)} \cdot s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \right] \qquad s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

s_p^2 *es la media ponderada de las cuasivarianzas muestrales*

  - Caso en que los tamaños muestrales son pequeños y las varianzas son desconocidas y distintas

$$I = \left[(\bar{x} - \bar{y}) \pm t_{\alpha/2;\,f} \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} \right] \qquad \text{donde} \qquad f = \frac{\left(\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2} \right)^2}{\dfrac{(s_1^2/n_1)^2}{n_1 + 1} + \dfrac{(s_2^2/n_2)^2}{n_2 + 1}} - 2$$

donde f es la aproximación de Welch

e) Intervalo de confianza para la razón de varianzas de dos poblaciones normales

$$I = \left[\frac{s_1^2 / s_2^2}{F_{\alpha/2;\,(n_1-1),\,(n_2-1)}} ;\ \frac{s_1^2 / s_2^2}{F_{1-\alpha/2;\,(n_1-1),\,(n_2-1)}} \right]$$

NOTA.- $F_{\alpha;\,n_1,\,n_2} = \dfrac{1}{F_{1-\alpha;\,n_2,\,n_1}}$

f) Intervalo de confianza para el parámetro p de una distribución binomial de parámetros n, p, B(n, p)

$$I = \left[p_o \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p_o\left(1-p_o\right)}{n}} \right]$$

g) Intervalo de confianza para la diferencia de parámetros $(p_1 - p_2)$ de dos distribuciones binomiales

$$I = \left[\left(p_1 - p_2\right) \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p_1\left(1-p_1\right)}{n_1} + \frac{p_2\left(1-p_2\right)}{n_2}} \right]$$

h) Intervalo de confianza para el parámetro λ de una distribución de Poisson

$$I = \left[\lambda \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\lambda}{n}} \right]$$

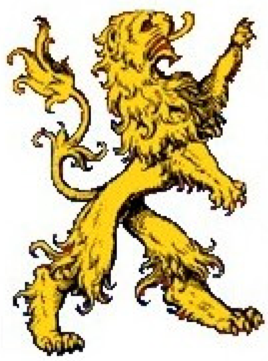
i) Intervalo de confianza para la diferencia de datos apareados

- Para muestras grandes $n > 30$

$$I = \left[\bar{d} \pm z_{\alpha/2} \frac{s_d}{\sqrt{n}} \right] \qquad \bar{d} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i \qquad d_i = \xi_i - \eta_i \qquad s_d^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(d_i - \bar{d}\right)^2$$

- Para muestras pequeñas $n < 30$

$$I = \left[\bar{d} \pm t_{\alpha/2,\,(n-1)} \frac{s_d}{\sqrt{n}} \right]$$



Santiago De la Fuente Fernández
Departamento de Matemáticas
Tlf.: +34-914973023
e-mail: santiago.delafuente@uam.es
UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

CONTRASTE DE HIPÓTESIS

a) Contraste de la media de una población normal con varianza conocida

- Contraste bilateral

Hipótesis nula $H_0 : \mu = \mu_0$ Hipótesis alternativa $H_a : \mu \neq \mu_0$

Se acepta H_0 si el estadístico $|z| = \dfrac{|\overline{x} - \mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z_{\alpha/2}$

Se rechaza H_0 si el estadístico $|z| = \dfrac{|\overline{x} - \mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}} > z_{\alpha/2}$

$R_{rechazo} = \left\{ |\overline{x} - \mu_0| > z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \right\}$

- Contraste unilateral

Hipótesis nula $H_0 : \mu \leq \mu_0$ Hipótesis alternativa $H_a : \mu > \mu_0$

Se acepta H_0 si el estadístico $z = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z_{\alpha}$

Se rechaza H_0 si el estadístico $z = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > z_{\alpha}$

$R_{rechazo} = \left\{ \overline{x} - \mu_0 > z_{\alpha} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \right\}$

b) Contraste de la media de una población normal con varianza desconocida

- Contraste bilateral

  - Muestras grandes $n > 30$

Hipótesis nula $H_0 : \mu = \mu_0$ Hipótesis alternativa $H_a : \mu \neq \mu_0$

Se acepta H_0 si el estadístico $z=\dfrac{|\overline{x}-\mu_0|}{s/\sqrt{n}} \le z_{\alpha/2}$

Se rechaza H_0 si el estadístico $z=\dfrac{|\overline{x}-\mu_0|}{s/\sqrt{n}} > z_{\alpha/2}$

$$R_{rechazo} = \left\{ |\overline{x}-\mu_0| > z_{\alpha/2}\cdot\frac{s}{\sqrt{n}} \right\}$$

- Muestras pequeñas $n \le 30$

  Hipótesis nula $H_0:\ \mu=\mu_0$ Hipótesis alternativa $H_a:\ \mu\neq\mu_0$

Se acepta H_0 si el estadístico $t=\dfrac{|\overline{x}-\mu_0|}{s/\sqrt{n}} \le t_{\alpha/2;\,(n-1)}$

Se rechaza H_0 si el estadístico $t=\dfrac{|\overline{x}-\mu_0|}{s/\sqrt{n}} > t_{\alpha/2;\,(n-1)}$

$$R_{rechazo} = \left\{ |\overline{x}-\mu_0| > t_{\alpha/2;\,(n-1)}\cdot\frac{s}{\sqrt{n}} \right\}$$

- Contraste unilateral

  - Muestras grandes $n > 30$

    Hipótesis nula $H_0:\ \mu\le\mu_0$ Hipótesis alternativa $H_a:\ \mu>\mu_0$

Se acepta H_0 si el estadístico $z=\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} \le z_{\alpha}$

Se rechaza H_0 si el estadístico $z=\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} > z_{\alpha}$

$$R_{rechazo} = \left\{ \overline{x}-\mu_0 > z_{\alpha}\cdot\frac{s}{\sqrt{n}} \right\}$$

- Muestras pequeñas $n \leq 30$

Hipótesis nula $H_0 : \mu \leq \mu_0$ Hipótesis alternativa $H_a : \mu > \mu_0$

Se acepta H_0 si el estadístico $t = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \leq t_{\alpha;(n-1)}$

Se rechaza H_0 si el estadístico $t = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} > t_{\alpha;(n-1)}$

$$R_{rechazo} = \left\{ \overline{x} - \mu_0 > t_{\alpha;(n-1)} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \right\}$$

c) Contraste para la varianza de una población normal

- Contraste bilateral

Hipótesis nula $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ Hipótesis alternativa $H_a : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$

Se acepta H_0 si el estadístico $\chi^2 = \dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \in \left[\chi^2_{1-\alpha/2,\,(n-1)}; \chi^2_{\alpha/2,\,(n-1)}\right]$

Se rechaza H_0 si el estadístico $\chi^2 = \dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \notin \left[\chi^2_{1-\alpha/2,\,(n-1)}; \chi^2_{\alpha/2,\,(n-1)}\right]$

- Contraste unilateral

Hipótesis nula $H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2$ Hipótesis alternativa $H_a : \sigma^2 > \sigma_0^2$

Se acepta H_0 si el estadístico $\chi^2 = \dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{\alpha,\,(n-1)}$

Se rechaza H_0 si el estadístico $\chi^2 = \dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \geq \chi^2_{\alpha,\,(n-1)}$

d) Contraste de igualdad de medias de dos poblaciones normales de varianzas conocidas

- Contraste bilateral

Hipótesis nula $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ Hipótesis alternativa $H_a : \mu_1 \neq \mu_2$

Se acepta H_0 si $z = \dfrac{|\bar{x} - \bar{y}|}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \leq z_{\alpha/2}$ Se rechaza H_0 si $z = \dfrac{|\bar{x} - \bar{y}|}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} > z_{\alpha/2}$

- Contraste unilateral

Hipótesis nula $H_0 : \mu_1 \leq \mu_2$ Hipótesis alternativa $H_a : \mu_1 > \mu_2$

Se acepta H_0 si $z = \dfrac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \leq z_{\alpha}$ Se rechaza H_0 si $z = \dfrac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} > z_{\alpha}$

e) Contraste de igualdad de medias de dos poblaciones normales de varianzas desconocidas

- Contraste bilateral

Hipótesis nula $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ Hipótesis alternativa $H_a : \mu_1 \neq \mu_2$

  - Muestras grandes $(n_1 + n_2) > 30$ con $n_1 \approx n_2$

Se acepta H_0 si el estadístico $z = \dfrac{|\bar{x} - \bar{y}|}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}} \leq z_{\alpha/2}$

Se rechaza H_0 si el estadístico $z = \dfrac{|\bar{x} - \bar{y}|}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}} > z_{\alpha/2}$

- Muestras pequeñas $(n_1 + n_2) \leq 30$, varianzas desconocidas pero iguales $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

Se acepta H_0 si $t = \dfrac{|\bar{x} - \bar{y}|}{s_p \sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} \leq t_{\alpha/2, (n_1 + n_2 - 2)}$ $\quad s_p^2 = \dfrac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$

Se rechaza H_0 si el estadístico $t = \dfrac{|\bar{x} - \bar{y}|}{s_p \sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} > t_{\alpha/2, (n_1 + n_2 - 2)}$

- Muestras pequeñas $(n_1 + n_2) \leq 30$, varianzas desconocidas y distintas $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

Se acepta H_0 si $t = \dfrac{|\bar{x} - \bar{y}|}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}} \leq t_{\alpha/2, f}$ $\quad f = \dfrac{\left(\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\dfrac{\left(s_1^2/n_1\right)^2}{n_1 + 1} + \dfrac{\left(s_2^2/n_2\right)^2}{n_2 + 1}} - 2$

Se rechaza H_0 si el estadístico $t = \dfrac{|\bar{x} - \bar{y}|}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}} > t_{\alpha/2, f}$

- Contraste unilateral

Hipótesis nula $H_0 : \mu_1 \leq \mu_2$ Hipótesis alternativa $H_a : \mu_1 > \mu_2$

- Muestras grandes $(n_1 + n_2) > 30$ con $n_1 \approx n_2$

Se acepta H_0 si el estadístico $z = \dfrac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}} \leq z_{\alpha}$

Se rechaza H_0 si el estadístico $z = \dfrac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}} > z_\alpha$

- Muestras pequeñas $(n_1 + n_2) \leq 30$, varianzas desconocidas pero iguales $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

Se acepta H_0 si $t = \dfrac{\overline{x} - \overline{y}}{s_p \sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} \leq t_{\alpha,\,(n_1+n_2-2)}$ $\quad s_p^2 = \dfrac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}$

Se rechaza H_0 si el estadístico $t = \dfrac{\overline{x} - \overline{y}}{s_p \sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} > t_{\alpha,\,(n_1+n_2-2)}$

- Muestras pequeñas $(n_1 + n_2) \leq 30$, varianzas desconocidas y distintas $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

Se acepta H_0 si $t = \dfrac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}} \leq t_{\alpha,\,f}$ $\quad f = \dfrac{\left(\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\dfrac{\left(s_1^2/n_1\right)^2}{n_1+1} + \dfrac{\left(s_2^2/n_2\right)^2}{n_2+1}} - 2$

Se rechaza H_0 si el estadístico $t = \dfrac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}} > t_{\alpha,\,f}$

f) Contraste de igualdad de varianzas de dos poblaciones normales

- Contraste bilateral

Hipótesis nula $H_0:\ \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ $\qquad$ Hipótesis alternativa $H_a:\ \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

Se acepta H_0 si el estadístico $F = \dfrac{s_1^2}{s_2^2} \in \left[F_{1-\alpha/2;\,(n_1-1),\,(n_2-1)};\ F_{\alpha/2;\,(n_1-1),\,(n_2-1)}\right]$

Se rechaza H_0 si el estadístico $F = \frac{s_1^2}{s_2^2} \notin \left[F_{1-\alpha/2;\,(n_1-1),\,(n_2-1)};\, F_{\alpha/2;\,(n_1-1),\,(n_2-1)}\right]$

- Contraste unilateral

Hipótesis nula $H_0:\ \sigma_1^2 \le \sigma_2^2$ Hipótesis alternativa $H_a:\ \sigma_1^2 > \sigma_2^2$

Se acepta H_0 si $F = \frac{s_1^2}{s_2^2} \le F_{\alpha;\,(n_1-1),\,(n_2-1)}$ Se rechaza H_0 si $F = \frac{s_1^2}{s_2^2} > F_{\alpha;\,(n_1-1),\,(n_2-1)}$

NOTA.- $F_{\alpha;\,n_1,\,n_2} = \frac{1}{F_{1-\alpha;\,n_2,\,n_1}}$

g) Contraste de igualdad de medias en el caso de datos apareados.

- Contraste bilateral

Hipótesis nula $H_0:\ d = 0 \Leftrightarrow \mu_1 = \mu_2$ Hipótesis alternativa $H_a:\ d \ne 0 \Leftrightarrow \mu_1 \ne \mu_2$

Se acepta H_0 si el estadístico $t = \frac{|\bar{d}|}{\frac{s_d}{\sqrt{n}}} \le t_{\alpha/2,\,(n-1)}$

Se rechaza H_0 si el estadístico $t = \frac{|\bar{d}|}{\frac{s_d}{\sqrt{n}}} > t_{\alpha/2,\,(n-1)}$

donde $\bar{d} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i = \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)$ $s_d^2 = \frac{1}{(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(d_i - \bar{d}\right)^2$

- Contraste unilateral

Hipótesis nula $H_0:\ d \le 0 \Leftrightarrow \mu_1 \le \mu_2$ Hipótesis alternativa $H_a:\ d > 0 \Leftrightarrow \mu_1 > \mu_2$

Se acepta H_0 si el estadístico $t = \dfrac{\bar{d}}{\frac{s_d}{\sqrt{n}}} \leq t_{\alpha,(n-1)}$

Se rechaza H_0 si el estadístico $t = \dfrac{\bar{d}}{\frac{s_d}{\sqrt{n}}} > t_{\alpha,(n-1)}$

h) Contraste para el parámetro p de una distribución binomial

- Contraste bilateral

Hipótesis nula $H_0 : p = p_o$ Hipótesis alternativa $H_a : p \neq p_o$

Se acepta H_0 si $z = \dfrac{|p - p_o|}{\sqrt{\dfrac{p_o(1-p_o)}{n}}} \leq z_{\alpha/2}$ Se rechaza H_0 si $z = \dfrac{|p - p_o|}{\sqrt{\dfrac{p_o(1-p_o)}{n}}} > z_{\alpha/2}$

- Contraste unilateral

Hipótesis nula $H_0 : p \leq p_o$ Hipótesis alternativa $H_a : p > p_o$

Se acepta H_0 si $z = \dfrac{p - p_o}{\sqrt{\dfrac{p_o(1-p_o)}{n}}} \leq z_{\alpha}$ Se rechaza H_0 si $z = \dfrac{p - p_o}{\sqrt{\dfrac{p_o(1-p_o)}{n}}} > z_{\alpha}$

i) Contraste para la igualdad de los parámetros de dos distribuciones binomiales $B(n_1, p_1)$ y $B(n_2, p_2)$ en muestras grandes

- Contraste bilateral

Hipótesis nula $H_0: \ p_1 = p_2$ Hipótesis alternativa $H_a: \ p_1 \neq p_2$

Se acepta H_0 si el estadístico $z = \dfrac{|p_1 - p_2|}{\sqrt{\dfrac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \dfrac{p_2(1-p_2)}{n_2}}} \leq z_{\alpha/2}$

Se rechaza H_0 si el estadístico $z = \dfrac{|p_1 - p_2|}{\sqrt{\dfrac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \dfrac{p_2(1-p_2)}{n_2}}} > z_{\alpha/2}$

- Contraste unilateral

Hipótesis nula $H_0: \ p_1 \leq p_2$ Hipótesis alternativa $H_a: \ p_1 > p_2$

Se acepta H_0 si el estadístico $z = \dfrac{p_1 - p_2}{\sqrt{\dfrac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \dfrac{p_2(1-p_2)}{n_2}}} \leq z_{\alpha}$

Se rechaza H_0 si el estadístico $z = \dfrac{p_1 - p_2}{\sqrt{\dfrac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \dfrac{p_2(1-p_2)}{n_2}}} > z_{\alpha}$

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID
Santiago De la Fuente Fernández
Departamento de Matemáticas
Tlf.: +34-914973023
e-mail: santiago.delafuente@uam.es

Grado Ciencias Ambientales
Facultad Ciencias
Departamento Matemáticas
Profesor: Santiago de la Fuente Fernández