

## MANUAL WINQSB

# ANÁLISIS CUANTITATIVO

**CON WINQSB**





## **MODELOS CUANTITATIVOS**

En el actual mundo empresarial, debido a un mercado muy competitivo en donde solo el mejor se lleva la mejor parte, las empresas, apoyándose en diferentes modelos cuantitativos, operan con una variedad de modelos de optimización en procesos operativos, administrativo y financieros.

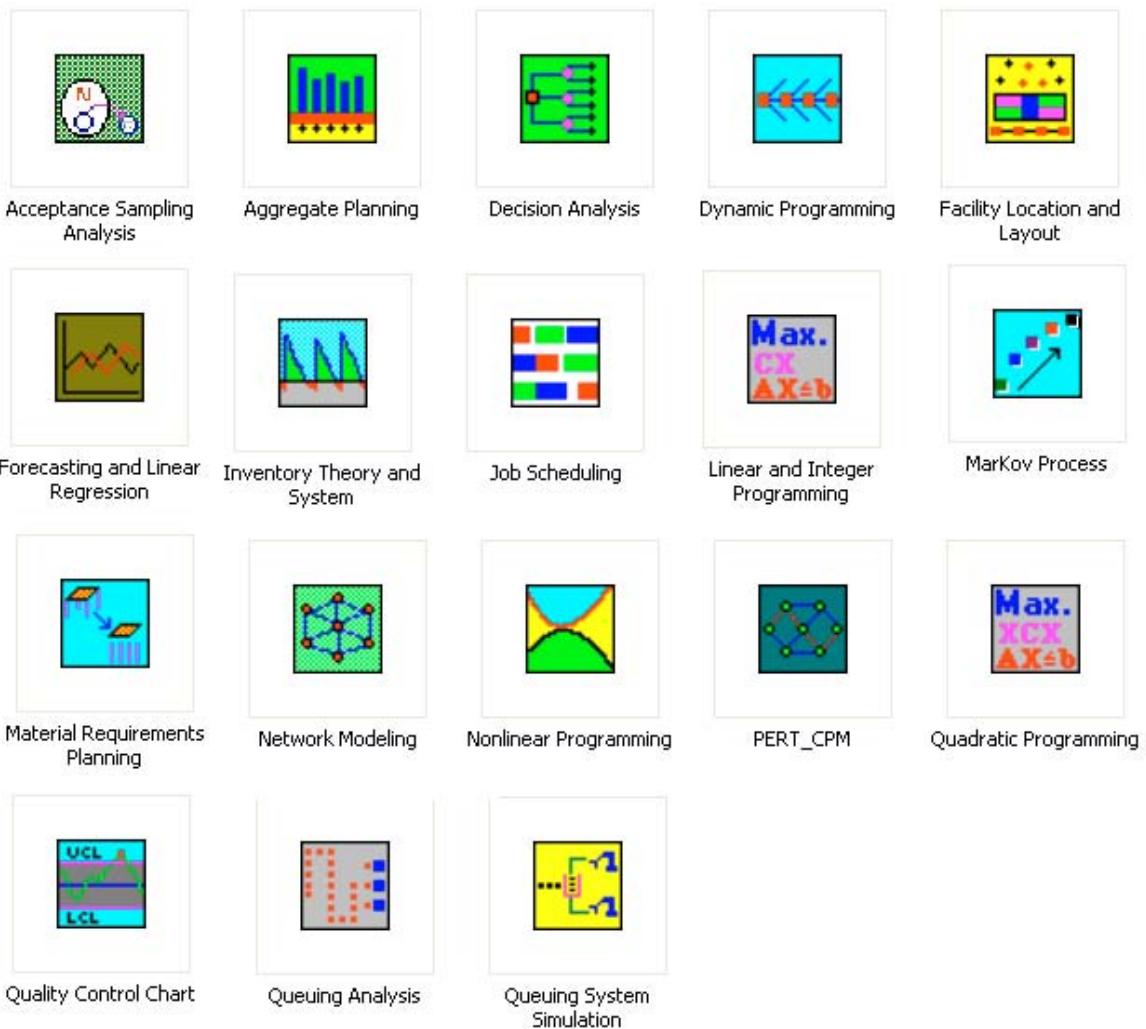
En diferentes modelos cuantitativos aparece WinQsb con la finalidad de solucionar problemas de tipo empresarial en cada una de las diferentes áreas.

En el análisis de los modelos cuantitativos, aparece WinQsb utilizando modelos matemáticos y heurísticos, con la finalidad de solucionar y simular situaciones empresariales en diferentes áreas.

WinQsb (Windows Quantitative Systems Base o Sistemas Cuantitativos Base Windows) es un sistema interactivo de ayuda a la toma de decisiones que contiene herramientas muy útiles para resolver distintos tipos de problemas en el campo de la investigación operativa.

Esta dividido en 19 módulos:

1. Análisis de muestreo de aceptación (Acceptance Sampling Analysis)
2. Planeación agregada (Aggregate Planning)
3. Análisis de decisiones (Decision Analysis)
4. Programación dinámica (Dynamic Programming)
5. Diseño y localización de plantas (Facility Location and Layout)
6. Pronósticos (Forecasting)
7. Programación por objetivos (Goal Programming)
8. Teoría y sistemas de inventarios (Inventory Theory and System)
9. Programación de jornadas de trabajo (Job Scheduling)
10. Programación lineal y entera (Linear and integer programming)
11. Procesos de Markov
12. Planeación de Requerimiento de Materiales
13. Modelación de redes (Network Modeling)
14. Programación no lineal (Nonlinear Programming)
15. PERT y CPM (PERT\_CPM)
16. Programación cuadrática (Quadratic Programming)
17. Cartas de control de calidad (Quality Control Chart)
18. Sistemas de cola (Queuing Analysis)
19. Simulación de sistemas de cola (Queuing Analysis Simulation)



## **CONTENIDO**

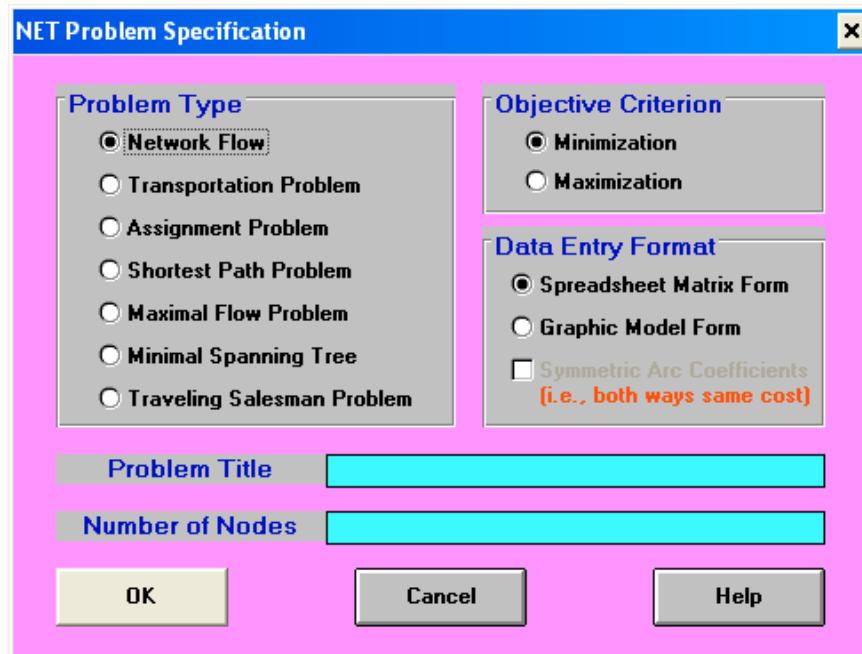
<b>MODELO DE REDES .....</b>	<b>6</b>
<b>PROGRAMACIÓN LINEAL .....</b>	<b>39</b>
<b>PROBLEMA DEL TRANSBORDO .....</b>	<b>74</b>
<b>PROBLEMA DEL TRANSPORTE .....</b>	<b>80</b>
<b>GESTIÓN DE PROYECTOS: PERT - CPM .....</b>	<b>108</b>
<b>TEORÍA DE LA DECISIÓN .....</b>	<b>140</b>
<b>TEORÍA DE JUEGOS .....</b>	<b>151</b>
<b>ANÁLISIS DE COLAS .....</b>	<b>169</b>
<b>PROGRAMACIÓN DINÁMICA .....</b>	<b>219</b>
<b>PROCESOS DE MARKOV .....</b>	<b>239</b>



# **REDES**



## MODELO DE REDES



Existen 7 modelos fundamentales para el tratamiento de los problemas que involucran redes con el fin de optimizar el uso de algún recurso.

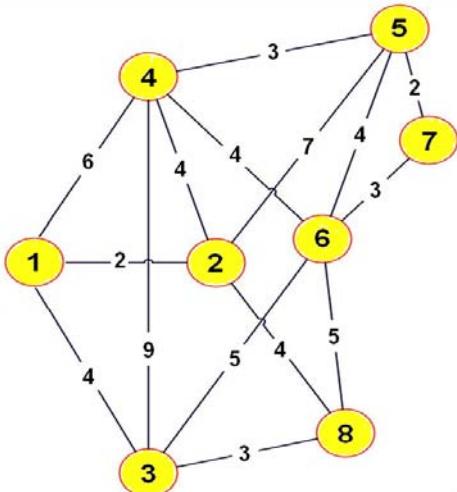
- Flujo en redes o modelo de transbordo: [Network Flow](#)
- Problema de transporte: [Transportation Problem](#)
- Problema de asignación: [Assignment Problem](#)
- Problema de la ruta más corta: [Shortest Path Problem](#)
- Problema de flujo máximo: [Maximal Flow Problem](#)
- Árbol de expansión mínima: [Minimal Spanning Tree](#)
- Problema del agente viajero: [Traveling Salesman Problem](#)





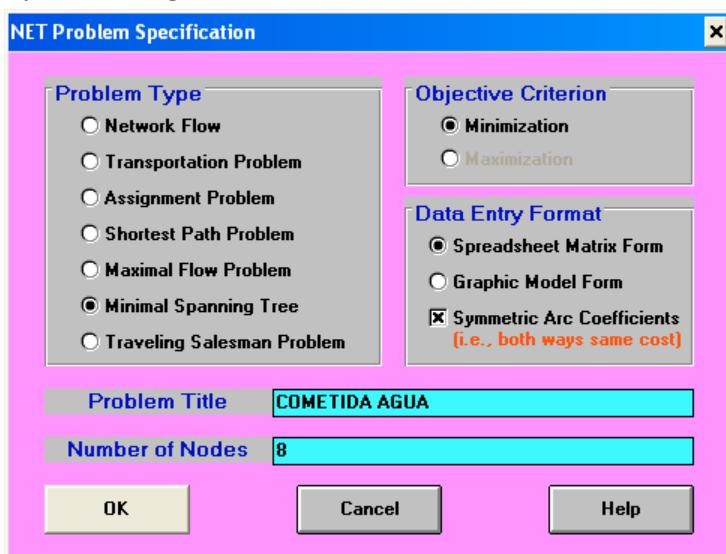
## ÁRBOL DE EXPANSIÓN MÍNIMA

Se trata de optimizar los enlaces para el suministro de agua en un plan parcial de viviendas, lo que implica minimizar costos en obras de excavación y mano de obra, sabiendo que la capacidad de bombeo desde el nodo 1 es más que suficiente para satisfacer la presión que requiere la red.



Se ejecuta el módulo Network Modeling (NET) - Minimal Spanning Tree

Aparece la siguiente ventana:



Introducidos los datos, se resuelve con las opciones: **Solve and Analyze** o el ícono **Solve the Problem**:

The WinQSB interface shows the following:

- Menu Bar:** File, Edit, Format, Solve and Analyze, Results, Utilities, Window, WinQSB, Help
- Toolbar:** Includes icons for Solve and Display Steps - Network, Perform What If Analysis, and Perform Parametric Analysis.
- Table:** A 9x9 matrix representing the edge weights between nodes. Node 0 is implied as the source node.

From \ To	Node1	Node2	Node3	Node4	Node5	Node6	Node7	Node8
Node1		2	4	6				
Node2	2			4	7			4
Node3	4			9		5		3
Node4	6	4	9		3	4		
Node5		7				4	2	
Node6				4			3	5
Node7					2			
Node8		4	3			5		

**Network Modeling**

File Format Results Utilities Window Help

0.00 A

**Solution for Minimal Spanning Tree Problem COMETIDA AGUA**

	From Node	Connect To	Distance/Cost		From Node	Connect To	Distance/Cost
1	Node1	Node2	2	5	Node6	Node7	3
2	Node1	Node3	4	6	Node5	Node7	2
3	Node2	Node4	4	7	Node3	Node8	3
4	Node4	Node5	3				
	Total	Minimal	Connected	Distance or Cost	=		21

La distancia mínima es 21. Aplica el algoritmo de Dijkstra hasta alcanzar la solución óptima.

Para personalizar la red mínima: [Format / Switch to Graphic Model](#)

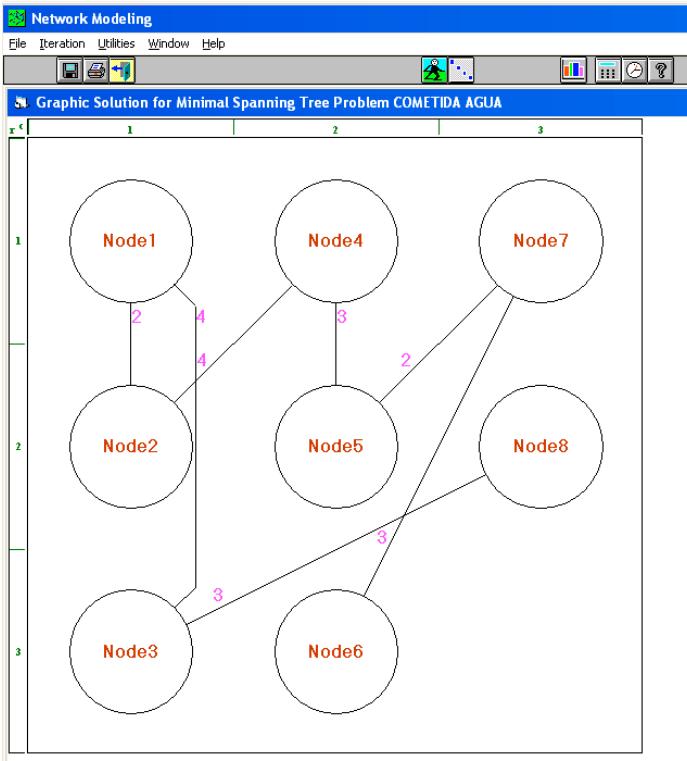
**Network Modeling**

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

Number  
Font  
Alignment  
Row Height  
Column Width  
Symmetric/Asymmetric Arc Coefficients  
**Switch to Graphic Model**

**AGUA**

From \ To	Node1	Node2	Node3	Node4	Node5	Node6	Node7	Node8
Node1		2	4	6				
Node2	2			4	7			4
Node3	4			9		5		3
Node4	6	4	9		3	4		3
Node5		7				4	2	
Node6				4			3	5
Node7					2			
Node8		4	3			5		

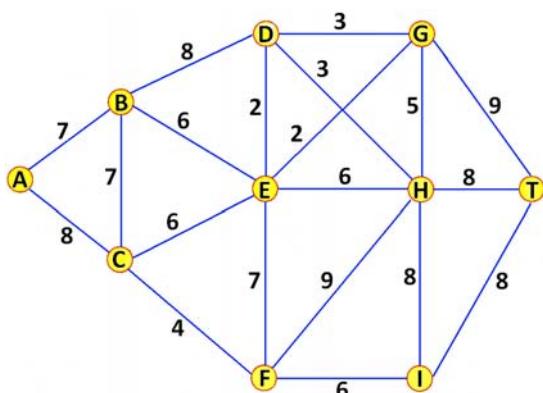






## ÁRBOL EXPANSIÓN MÍNIMA: Minimal Spanning Tree

El grafo adjunto muestra una ruta aérea donde la distancia entre cada par de ciudades se expresa en cientos de millas. Obtener una red que conecte todas las ciudades y sea de mínima distancia.



NET Problem Specification

<b>Problem Type</b> <input type="radio"/> Network Flow <input type="radio"/> Transportation Problem <input type="radio"/> Assignment Problem <input type="radio"/> Shortest Path Problem <input type="radio"/> Maximal Flow Problem <input checked="" type="radio"/> Minimal Spanning Tree <input type="radio"/> Traveling Salesman Problem	<b>Objective Criterion</b> <input checked="" type="radio"/> Minimization <input type="radio"/> Maximization	
<b>Data Entry Format</b> <input checked="" type="radio"/> Spreadsheet Matrix Form <input type="radio"/> Graphic Model Form <input checked="" type="checkbox"/> Symmetric Arc Coefficients <small>(i.e., both ways same cost)</small>		
<b>Problem Title</b> RUTA AÉREA		
<b>Number of Nodes</b> 10		
<b>OK</b>	<b>Cancel</b>	<b>Help</b>

Introducidos los datos, se resuelve con las opciones: **Solve and Analyze** o el ícono **Solve the Problem**:

Network Modeling

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

Solve the Problem

Solve and Display Steps - Network

Perform What If Analysis

Perform Parametric Analysis

From \	A	B	C	D	E	F	G	H	I	T
A		7	8							
B	7		7	8	6					
C	8	7			6	4				
D		8			2		3	3		
E		6	6	2		7	2	6		
F			4		7		9	6		
G				3	2		5		9	
H				3	6	9	5		8	8
I						6		8		8
T							9	8	8	

**Network Modeling**

File Format Results Utilities Window Help

Solution Table - Nonzero Only  
Solution Table - All  
**Graphic Solution**  
Perform What If Analysis  
Perform Parametric Analysis  
Show Parametric Analysis - Table  
Show Parametric Analysis - Graphic  
Show Run Time and Iteration

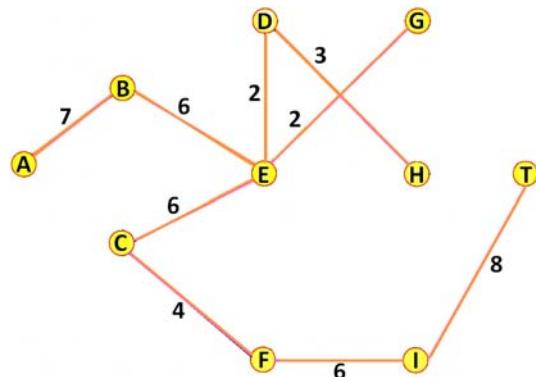
**Ruta Aérea**

**Gráfico**

	From Node	Connect To	Distance/Cost		From Node	Connect To	Distance/Cost
1	A	B	7	6	E	G	2
2	E	C	6	7	D	H	3
3	E	D	2	8	F	I	6
4	B	E	6	9	H	T	8
5	C	F	4				
	Total	Minimal	Connected	Distance	or Cost	=	44

Una ruta aérea que conecte todas las ciudades y minimice la distancia tiene un valor de 44 millas.

Otra posibilidad sería intercambiar la ruta IT por HT.





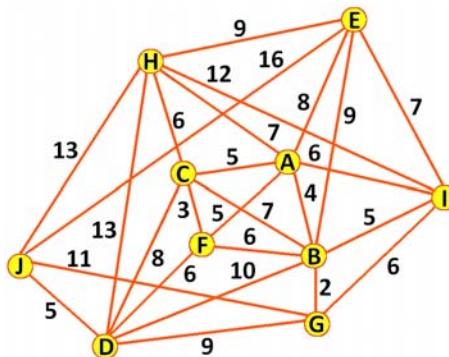


## ÁRBOL EXPANSIÓN MÍNIMA: Minimal Spanning Tree

En el grafo adjunto figura el diseño de un metro para Valladolid, indicando en las estaciones (nodos) y las distancias que las separan en centenares de metros.

Suponiendo que el coste de la construcción es proporcional a la distancia y que cuando dos estaciones no se encuentran unidas es debido a imposibilidades técnicas por el río Pisuerga o a un coste excesivo.

El objetivo es diseñar la red de metro de forma que las estaciones queden conectadas a coste mínimo. ¿Cuál será la red a construir y cuál su longitud?



NET Problem Specification

<b>Problem Type</b> <input type="radio"/> Network Flow <input type="radio"/> Transportation Problem <input type="radio"/> Assignment Problem <input type="radio"/> Shortest Path Problem <input type="radio"/> Maximal Flow Problem <input checked="" type="radio"/> Minimal Spanning Tree <input type="radio"/> Traveling Salesman Problem	<b>Objective Criterion</b> <input checked="" type="radio"/> Minimization <input type="radio"/> Maximization	
<b>Data Entry Format</b> <input checked="" type="radio"/> Spreadsheet Matrix Form <input type="radio"/> Graphic Model Form <input checked="" type="checkbox"/> Symmetric Arc Coefficients (i.e., both ways same cost)		
Problem Title <b>METRO VALLADOLID</b>		
Number of Nodes <b>10</b>		
<b>OK</b>	<b>Cancel</b>	<b>Help</b>

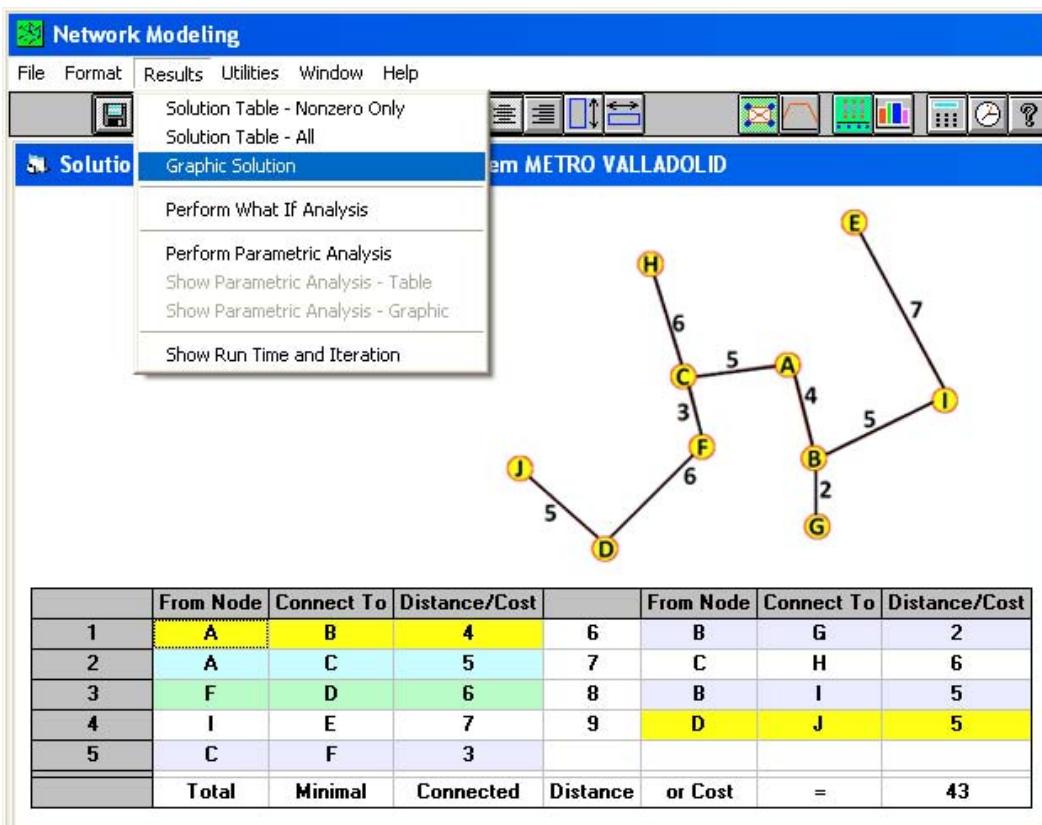
Introducidos los datos, se resuelve con las opciones: [Solve and Analyze](#) o el ícono [Solve the Problem](#):

Network Modeling

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

Minimal Spanning Tree Problem METRO VALLADOLID

From \	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
A		4	5		8	5		7	6	
B	4		7	10	9	6	2		5	
C	5	7		8		3		6		
D		10	8			6	9	13		5
E	8	9						9	7	16
F	5	6	3	6						
G		2		9				6	11	
H	7		6	13	9			12	13	
I	6	5			7		6	12		
J				5	16		11	13		



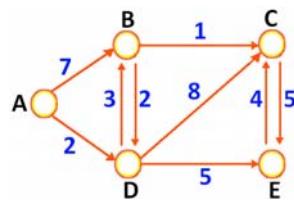






RUTA MÁS CORTA: Network Modeling - Shortest Path Problem

Encontrar la ruta más corta desde el vértice A hasta cada uno de los restantes vértices del grafo dirigido.



<b>Problem Type</b>	<b>Objective Criterion</b>	
<input checked="" type="radio"/> Network Flow <input type="radio"/> Transportation Problem <input type="radio"/> Assignment Problem <input checked="" type="radio"/> Shortest Path Problem <input type="radio"/> Maximal Flow Problem <input type="radio"/> Minimal Spanning Tree <input type="radio"/> Traveling Salesman Problem	<input checked="" type="radio"/> Minimization <input type="radio"/> Maximization	
<b>Data Entry Format</b>		
<input checked="" type="radio"/> Spreadsheet Matrix Form <input type="radio"/> Graphic Model Form <input type="checkbox"/> Symmetric Arc Coefficients <i>(i.e., both ways same cost)</i>		
<b>Problem Title</b>	GRAFO 1	
<b>Number of Nodes</b>	5	
<b>OK</b>	<b>Cancel</b>	<b>Help</b>

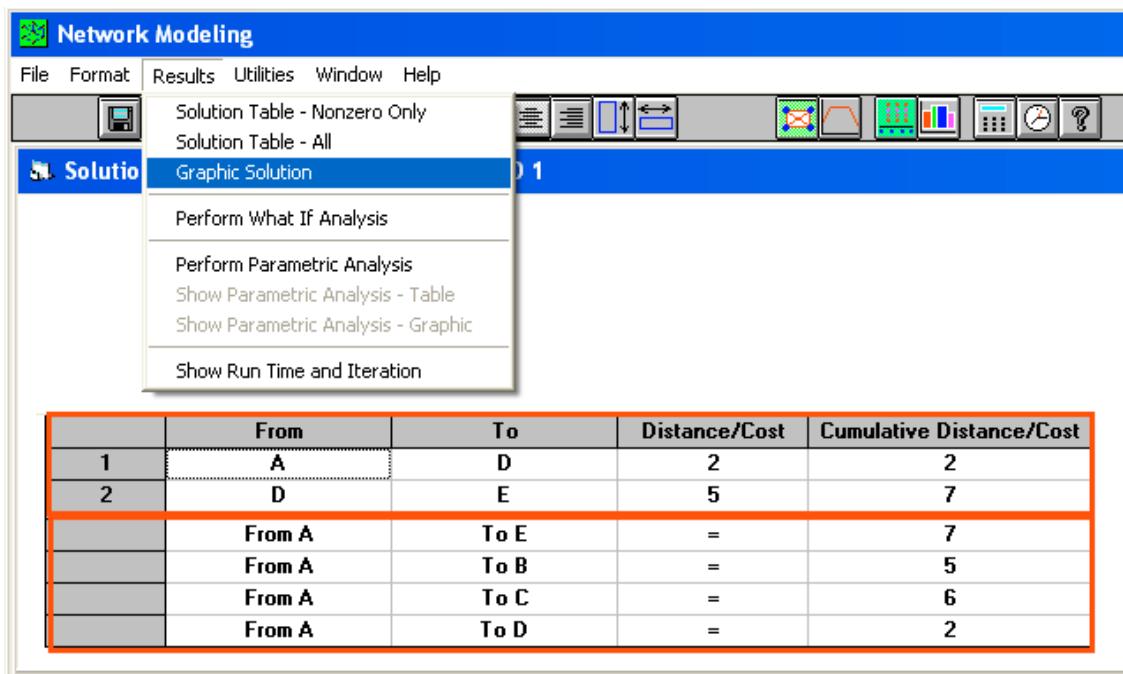
Introducidos los datos se hace clic en **Solve and Analize / Solve the Problem**  
Sale un menú emergente donde hay que seleccionar el nodo fuente y el nodo destino

The screenshot shows the Network Modeling application interface. The menu bar includes File, Edit, Format, Solve and Analyze, Results, Utilities, Window, WinQSB, and Help. A toolbar with various icons is visible above the main workspace. A context menu is open over a network diagram, showing options like "Solve the Problem", "Solve and Display Steps - Network", "Perform What If Analysis", and "Perform Parametric Analysis". The main workspace displays a network graph with nodes A through E and a distance matrix:

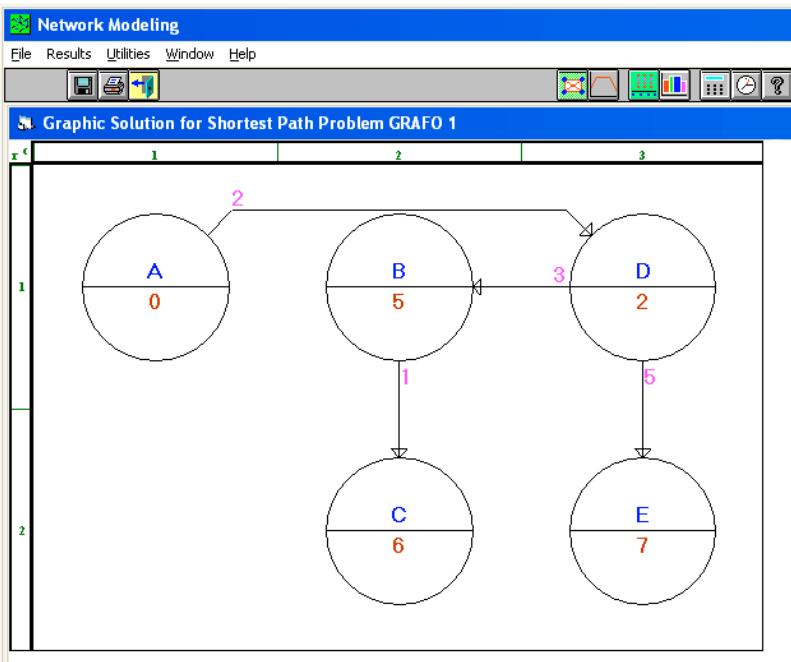
From \	A	B	C	D	E
A	7			2	
B		1		2	
C					5
D		3	8		5
E				4	

A dialog box titled "Select Start and End Nodes" is open at the bottom left. It contains two lists: "Click to select a start node" with items A, B, C, D, E, and "A"; and "Click to select an end node" with items A, B, C, D, E, and "E". Below these lists are "Solve" and "Cancel" buttons, and "Solve and Display Steps" and "Help" buttons.

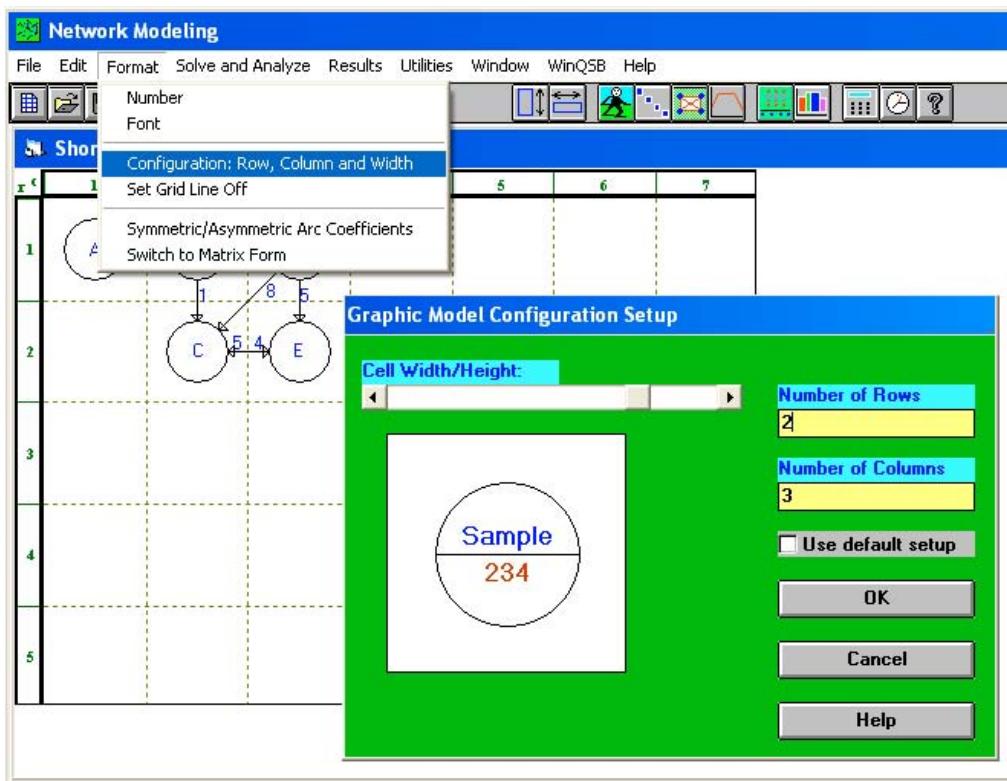
El tabulado corresponde a la ruta más corta y las magnitudes entre cada uno de los nodos que conforman la red.



Un gráfico de la situación: [Results / Graphic Solution](#)



Previamente se ha personalizado la presentación con el menú: [Format / Switch to GraphicModel](#)



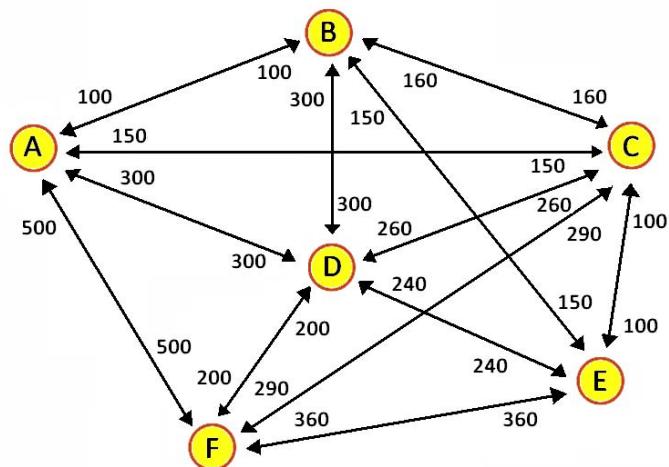






## PROBLEMA DEL VIAJANTE: Traveling Salesman Problem

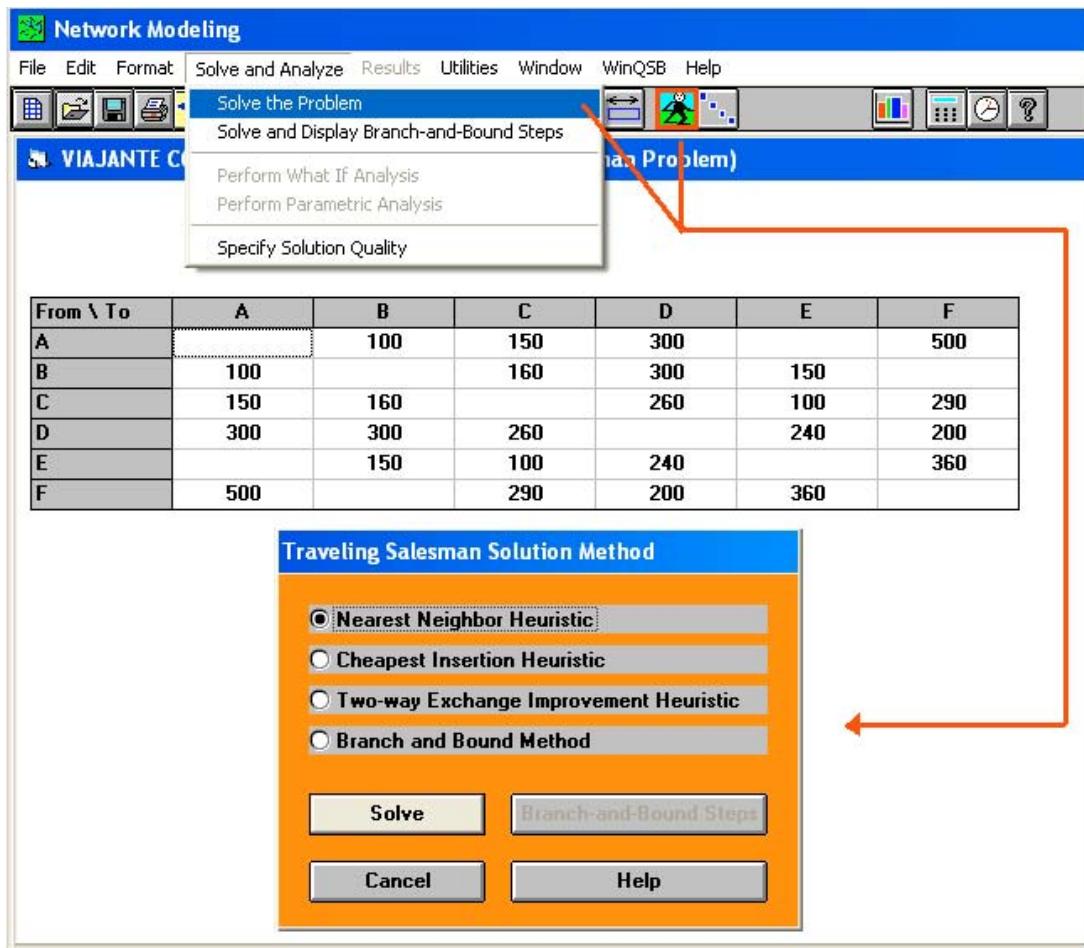
Un agente de comercio trabaja en seis ciudades. Determinar la ruta óptima para minimizar el número de kilómetros recorridos semanalmente, sabiendo que debe pasar una sola vez por cada ciudad y que al final de la semana debe volver a su casa. En el grafo adjunto se refleja las distancias en km. entre las ciudades.



NET Problem Specification

<b>Problem Type</b> <input type="radio"/> Network Flow <input type="radio"/> Transportation Problem <input type="radio"/> Assignment Problem <input type="radio"/> Shortest Path Problem <input type="radio"/> Maximal Flow Problem <input type="radio"/> Minimal Spanning Tree <input checked="" type="radio"/> Traveling Salesman Problem	<b>Objective Criterion</b> <input checked="" type="radio"/> Minimization <input type="radio"/> Maximization	
<b>Data Entry Format</b> <input checked="" type="radio"/> Spreadsheet Matrix Form <input type="radio"/> Graphic Model Form <input type="checkbox"/> Symmetric Arc Coefficients <i>(i.e., both ways same cost)</i>		
<b>Problem Title</b>	VIAJANTE COMERCIO	
<b>Number of Nodes</b>	6	
<b>OK</b>	<b>Cancel</b>	<b>Help</b>

Introducidos los datos, se resuelve con las opciones: **Solve and Analyze** o el ícono **Solve the Problem**:



Aparecen diferentes procedimientos de resolución:

**Nearest Neighbor Heuristic (vecino más cercano):** Parte de un nodo y se va moviendo al nodo de menor coste adyacente hasta que pasa por todos los nodos.

El procedimiento "Vecino más cercano" no garantiza que se pueda cerrar el ciclo, depende del nodo de partida. Por defecto, selecciona siempre como nodo inicial el primer nodo de la tabla.

**Cheapest Insertion Heuristic:** Sigue los siguientes pasos:

1. Se seleccionan dos nodos  $(i, j)$  que se encuentren a menor distancia, formando el subciclo  $i - j - i$
2. Para todos los nodos que no se encuentren en el subciclo anterior, se selecciona el nodo  $k$  de forma que minimice la cantidad  $[C(i, k) + C(k, j) - C(i, j)]$  para todo par de nodos  $(i, j)$  del subciclo, siendo  $C(i, j) \equiv$  distancia entre los nodos  $(i, j)$
3. Introducir el nodo  $k$  en el subciclo y vuelve al paso 2, hasta conectar todos los nodos.

**Two-way Exchange Improvement Heuristic:** Se basa en la bisección de una solución inicial.

**Branch-and-bound Method:** Proporciona la solución óptima exacta planteando el problema como un problema de programación entera 0 – 1.

Cuando el número de nodos es grande el coste computacional puede no ser viable.

Soluciones para cada uno de estos métodos:

**Network Modeling**

File Format Results Utilities Window Help

0.00 A

**Solution for VIAJANTE COMERCIO: Minimization (Traveling Salesman Problem)**

Nearest Neighbor Heuristic

	From Node	Connect To	Distance/Cost		From Node	Connect To	Distance/Cost
1	A	B	100	4	C	D	260
2	B	E	150	5	D	F	200
3	E	C	100	6	F	A	500
	Total [Result]	Minimal from	Traveling Nearest	Distance or Cost Nearest Neighbor Heuristic]		=	1310

**Network Modeling**

File Format Results Utilities Window Help

0.00 A

**Solution for VIAJANTE COMERCIO: Minimization (Traveling Salesman Problem)**

Cheapest Insertion Heuristic

	From Node	Connect To	Distance/Cost		From Node	Connect To	Distance/Cost
1	A	C	150	4	F	D	200
2	C	E	100	5	D	B	300
3	E	F	360	6	B	A	100
	Total [Result]	Minimal from	Traveling Cheapest	Distance Insertion	or Cost Heuristic]	=	1210

**Network Modeling**

File Format Results Utilities Window Help

0.00 A

**Solution for VIAJANTE COMERCIO: Minimization (Traveling Salesman Problem)**

**Two-way Exchange Improvement Heuristic**

	From Node	Connect To	Distance/Cost		From Node	Connect To	Distance/Cost
1	A	C	150	4	F	D	200
2	C	E	100	5	D	B	300
3	E	F	360	6	B	A	100
	Total (Result)	Minimal from	Traveling Cheapest	Distance Insertion	or Cost Heuristic	=	1210

**Network Modeling**

File Format Results Utilities Window Help

0.00 A

**Solution for VIAJANTE COMERCIO: Minimization (Traveling Salesman Problem)**

**Branch and Bound Method**

	From Node	Connect To	Distance/Cost		From Node	Connect To	Distance/Cost
1	A	B	100	4	D	F	200
2	B	E	150	5	F	C	290
3	E	D	240	6	C	A	150
	Total (Result)	Minimal from	Traveling Branch	Distance and	or Cost Bound	=	1130



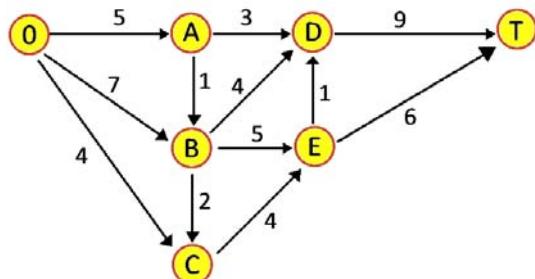




## FLUJO MÁXIMO

Muchos problemas pueden ser modelados mediante una red en donde los arcos limitan la cantidad de un producto que se puede enviar. En estas situaciones, frecuentemente se transporta la máxima cantidad de flujo desde un punto de partida llamado fuente hacia un punto final denominado pozo.

Obtener el máximo flujo que se puede llevar del nodo 0 al nodo T



### Network Modeling - Maximal Flow Problem

NET Problem Specification

<b>Problem Type</b> <input checked="" type="radio"/> Network Flow <input type="radio"/> Transportation Problem <input type="radio"/> Assignment Problem <input type="radio"/> Shortest Path Problem <input checked="" type="radio"/> Maximal Flow Problem <input type="radio"/> Minimal Spanning Tree <input type="radio"/> Traveling Salesman Problem	<b>Objective Criterion</b> <input type="radio"/> Minimization <input checked="" type="radio"/> Maximization	
<b>Data Entry Format</b> <input checked="" type="radio"/> Spreadsheet Matrix Form <input type="radio"/> Graphic Model Form <input type="checkbox"/> Symmetric Arc Coefficients <small>(i.e., both ways same cost)</small>		
<b>Problem Title</b>	FLUJO MÁXIMO	
<b>Number of Nodes</b>	7	
<b>OK</b>	<b>Cancel</b>	<b>Help</b>

Introducidos los datos, se resuelve con las opciones: **Solve and Analyze** o el icono **Solve the Problem**:

**Network Modeling**

**Maximal Flow**

**Select Start and End Nodes**

From \ To	0	A	B	C	D	E	T
0		5	7	4			
A			1		3		
B				2	4	5	
C						4	
D							9
E					1		6
T							

**Solve**    **Solve and Display Steps**

**Cancel**    **Help**

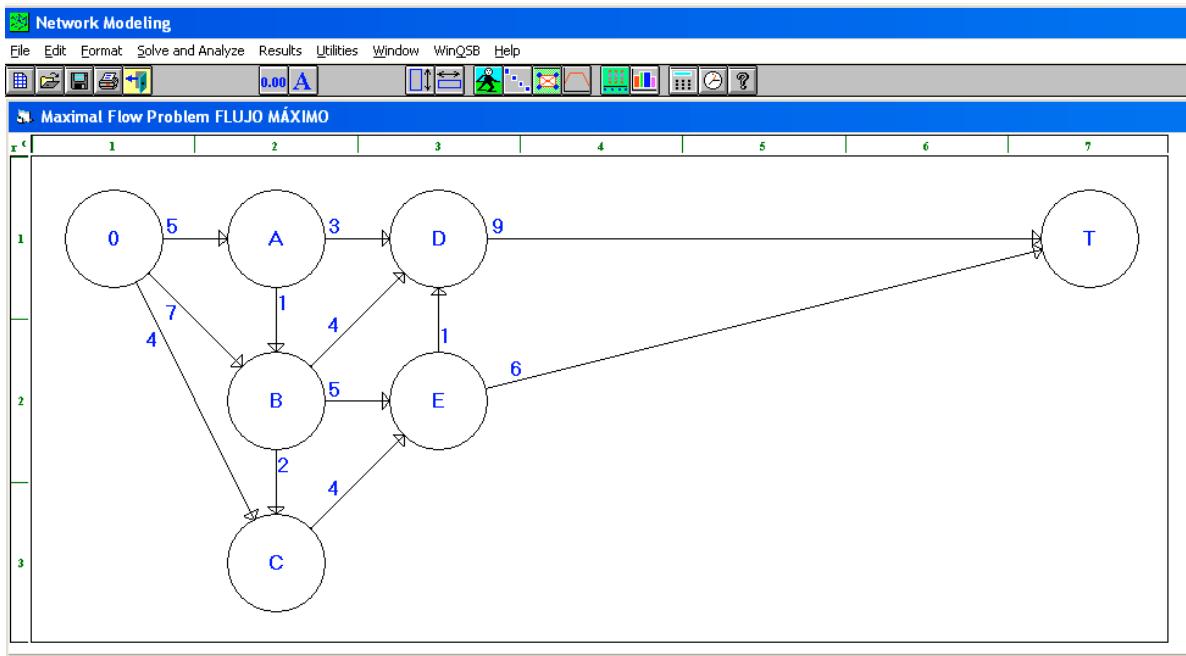
**Network Modeling**

**Maximal Flow**

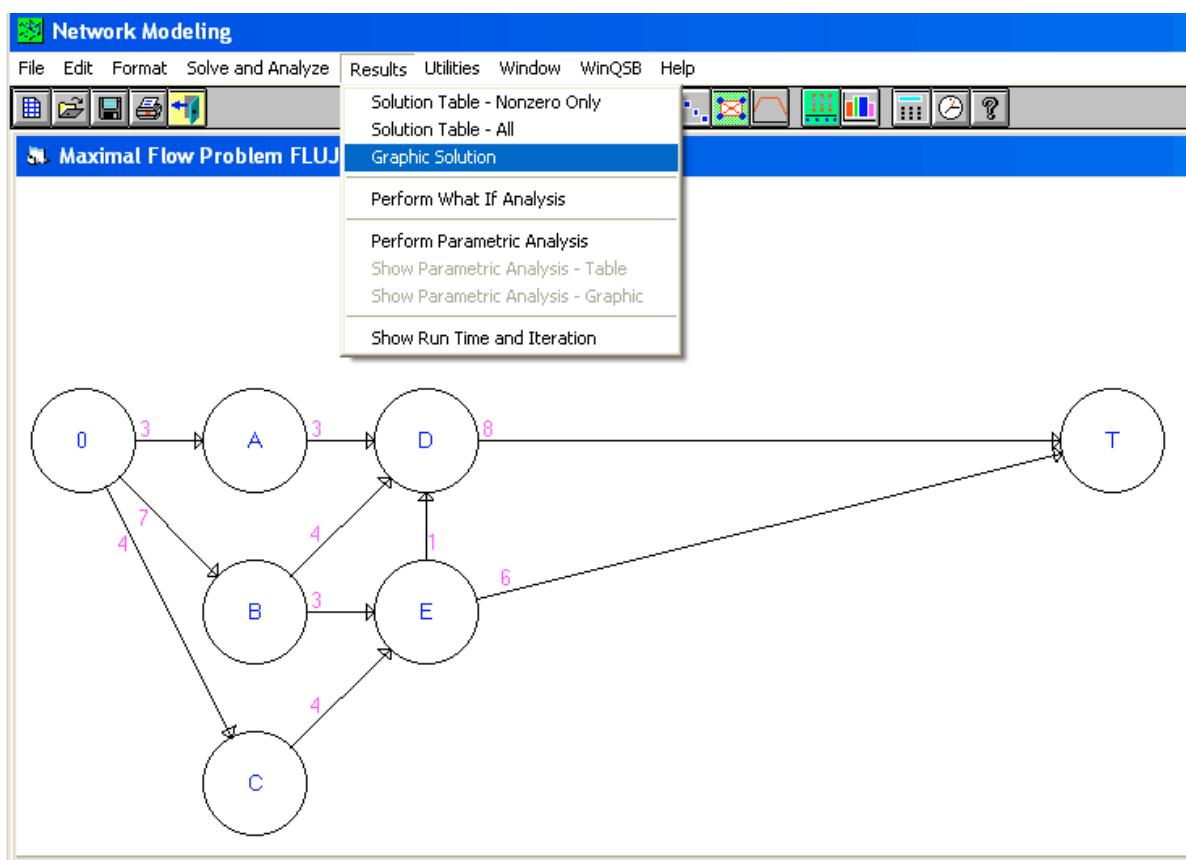
	From	To	Net Flow	From	To	Net Flow
1	0	A	3	6	B	E 3
2	0	B	7	7	C	E 4
3	0	C	4	8	D	T 8
4	A	D	3	9	E	D 1
5	B	D	4	10	E	T 6
Total	Net Flow	From	0	To	T	= 14

El flujo máximo de 0 hasta T es 14.

Para personalizar el flujo máximo: Format / Switch to Graphic Model



La red del flujo óptimo: Results / Graphic Solution



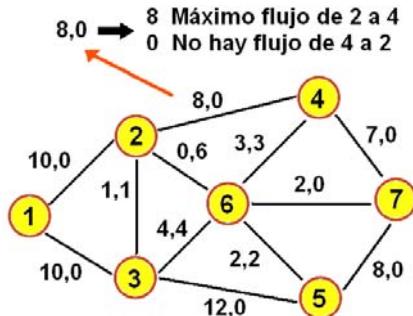




## FLUJO MÁXIMO RED: Network Modeling / Maximal Flow Problem

- Existe un nodo origen (1) del que emanan los demás flujos
- Hay un nodo terminal (n) donde se depositan todos los flujos de la red
- Existen  $(n - 2)$  nodos en donde el flujo que entra es igual al flujo que sale
- La capacidad que transita del nodo i al nodo j se denota por  $C_{ij}$

Encontrar el flujo máximo de la red que sale del nodo 1



**NET Problem Specification**

<b>Problem Type</b>	<b>Objective Criterion</b>	
<input type="radio"/> Network Flow <input type="radio"/> Transportation Problem <input type="radio"/> Assignment Problem <input type="radio"/> Shortest Path Problem <input checked="" type="radio"/> Maximal Flow Problem <input type="radio"/> Minimal Spanning Tree <input type="radio"/> Traveling Salesman Problem	<input type="radio"/> Minimization <input checked="" type="radio"/> Maximization	
<b>Data Entry Format</b>		
<input checked="" type="radio"/> Spreadsheet Matrix Form <input type="radio"/> Graphic Model Form <input type="checkbox"/> Symmetric Arc Coefficients (i.e., both ways same cost)		
<b>Problem Title</b>	RED 1	
<b>Number of Nodes</b>	7	
<b>OK</b>	<b>Cancel</b>	<b>Help</b>

Introducidos los datos, se resuelve con las opciones: **Solve and Analyze** o el ícono **Solve the Problem**:

**Network Modeling**

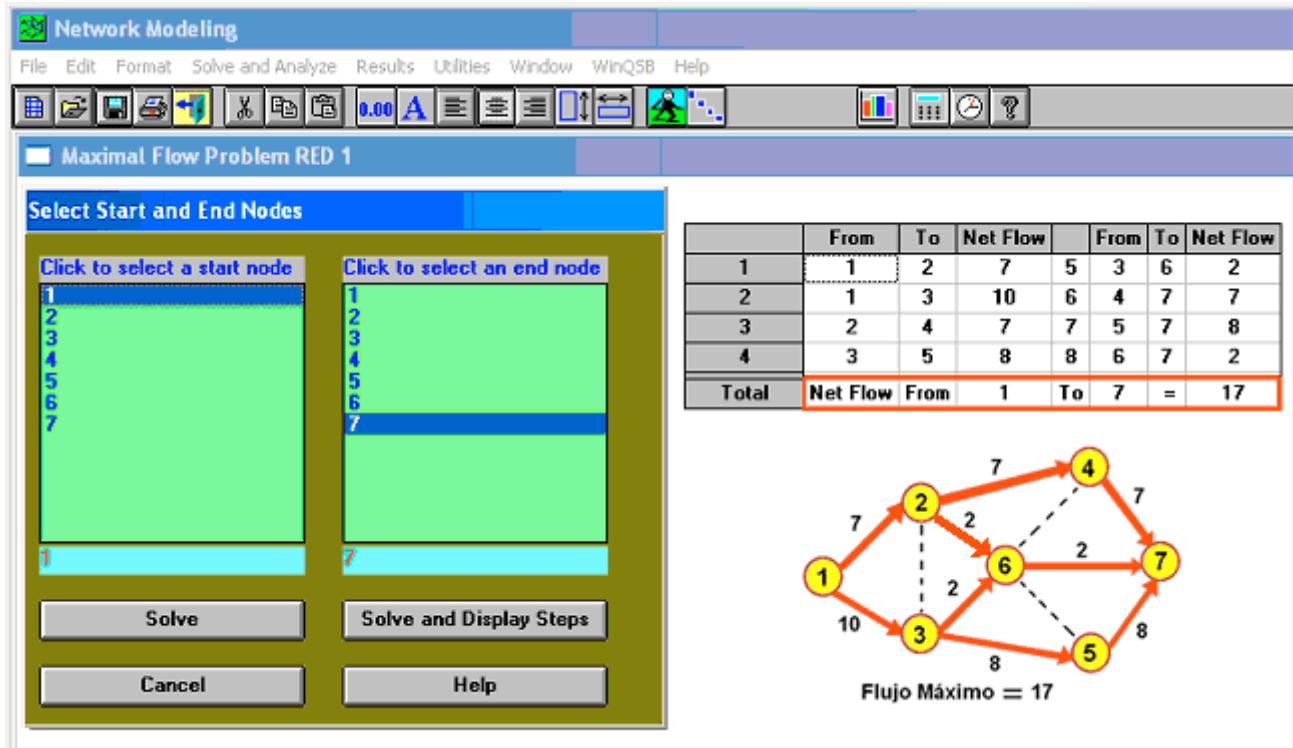
File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

Solve the Problem Solve and Display Steps - Network

Maximal Flow

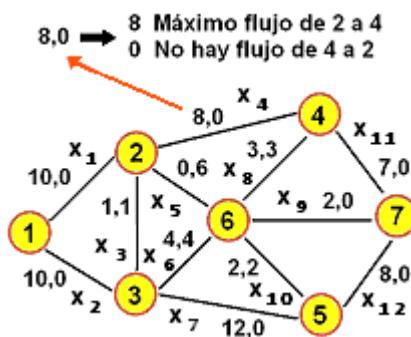
From \ To 1 2 3 4 5 6 7

From \ To	1	2	3	4	5	6	7
1		10	10				
2			1	8			
3		1			12	4	
4						3	7
5						2	8
6		6		3	2		
7							2



Encontrar el flujo máximo de la red que sale del nodo 1, se puede plantear como un problema de programación lineal.

### PROGRAMACIÓN LINEAL: Linear and Integer Programming



$x_{ij} \equiv$  Flujo que viaja desde el nodo i hacia el nodo j a través del arco que conecta ambos nodos.

Función Objetivo  $\equiv$  Maximizar el flujo que sale del nodo 1:  $\text{Max } z = x_{12} + x_{13} \equiv \text{Max } z = x_1 + x_2$

Restricciones:

- Flujo total que sale del nodo 1 = Flujo total que entra en el nodo 7

$$x_{12} + x_{13} = x_{47} + x_{57} + x_{67} \equiv x_1 + x_2 = x_9 + x_{11} + x_{12} \rightarrow x_1 + x_2 - x_9 - x_{11} - x_{12} = 0$$

- Para cada nodo intermedio: Flujo que entra = Flujo que sale

$$\text{Nodo 2: } x_{12} + x_{32} + x_{62}^{-1} = x_{23} + x_{24} + x_{26} \equiv x_1 + x_3 = x_3 + x_4 \rightarrow x_1 - x_4 = 0$$

$$\text{Nodo 3: } x_{13} + x_{23} + x_{63} + x_{53}^{-1} = x_{35} + x_{36} \equiv x_2 + x_3 + x_6 = x_3 + x_7 + x_6 \rightarrow x_2 - x_7 = 0$$

$$\text{Nodo 4: } x_{24} + x_{64} = x_{46} + x_{47} \equiv x_4 + x_8 = x_8 + x_{11} \rightarrow x_4 - x_{11} = 0$$

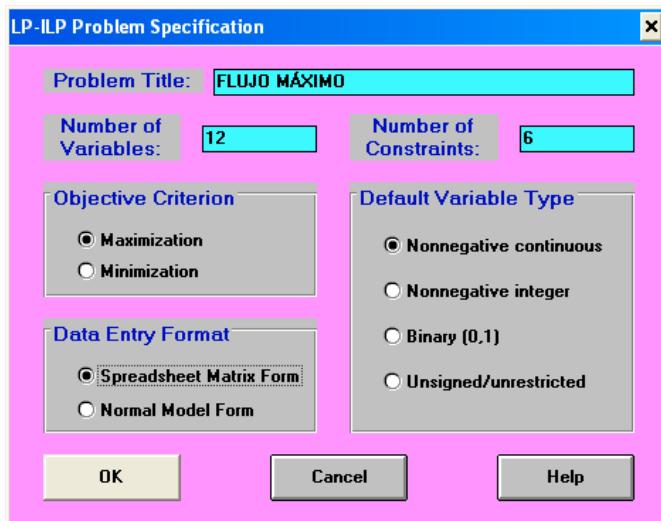
$$\text{Nodo 5: } x_{35} + x_{65} = x_{56} + x_{57} \equiv x_7 + x_{10} = x_{12} + x_6 \rightarrow x_7 + x_{10} - x_{12} - x_6 = 0$$

$$\text{Nodo 6: } x_{26} + x_{36} + x_{46} + x_{56} = x_{63} + x_{64} + x_{65} + x_{67} \equiv x_5 + x_6 + x_8 + x_{10} = x_6 + x_8 + x_{10} + x_9 \\ \rightarrow x_5 - x_9 = 0$$

- El Flujo no puede exceder de la capacidad de los arcos:

$$\begin{array}{llllll} x_{12} \equiv x_1 \leq 10 & x_{13} \equiv x_2 \leq 10 & x_{23} \equiv x_3 \leq 1 & x_{24} \equiv x_4 \leq 8 & x_{26} \equiv x_5 \leq 6 & x_{36} \equiv x_6 \leq 4 \\ x_{35} \equiv x_7 \leq 12 & x_{46} \equiv x_8 \leq 3 & x_{67} \equiv x_9 \leq 2 & x_{65} \equiv x_{10} \leq 2 & x_{47} \equiv x_{11} \leq 7 & x_{57} \equiv x_{12} \leq 8 \\ x_{12} \equiv x_{21} = x_1 & x_{23} \equiv x_{32} = x_3 & x_{26} \equiv x_{62} = x_5 & x_{36} \equiv x_{63} = x_6 \\ x_{46} \equiv x_{64} = x_8 & x_{56} \equiv x_{65} = x_{10} & x_{57} \equiv x_{75} = x_{12} & x_{67} \equiv x_{76} = x_9 \\ x_{21} = x_{26} = x_{31} = x_{53} = 0 \end{array}$$

- Los flujos no pueden ser negativos:  $x_{ij} \geq 0$



Linear and Integer Programming

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

FLUJO MÁXIMO

Variable -->	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9	X10	X11	X12	Direction	R. H. S.
Maximize	1	1							-1		-1	-1	=	0
C1	1	1											=	0
C2			1										=	0
C3				1									=	0
C4					1								=	0
C5						1							=	0
C6							1						=	0
LowerBound	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
UpperBound	10	10	1	8	6	4	12	3	2	2	7	8		
VariableType	Continuous													

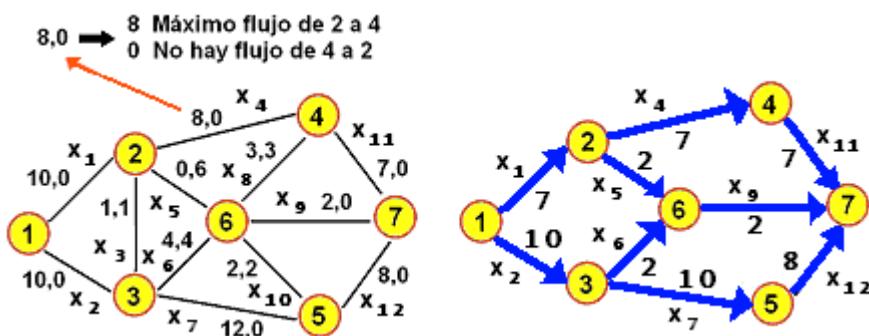
Linear and Integer Programming

File Format Results Utilities Window Help

0.00 A

Combined Report for FLUJO MÁXIMO

			Saturday	September	05	2020		
	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(i)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(i)	Allowable Max. c(i)
1	X1	7,0000	1,0000	7,0000	0	basic	0	M
2	X2	10,0000	1,0000	10,0000	0	basic	0	M
3	X3	0	0	0	0	at bound	-M	0
4	X4	7,0000	0	0	0	basic	-1,0000	M
5	X5	2,0000	0	0	0	basic	0	M
6	X6	2,0000	0	0	0	basic	0	0
7	X7	10,0000	0	0	0	basic	-1,0000	M
8	X8	0	0	0	0	at bound	-M	0
9	X9	2,0000	0	0	0	basic	0	M
10	X10	0	0	0	0	at bound	-M	0
11	X11	7,0000	0	0	0	basic	-1,0000	M
12	X12	8,0000	0	0	0	basic	-1,0000	0
	Objective Function	(Max.) =	17,0000	(Note:	Alternate	Solution	Exists!!)	
	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
1	C1	0	=	0	0	0	0	2,0000
2	C2	0	=	0	0	1,0000	-2,0000	0
3	C3	0	=	0	0	0	-2,0000	2,0000
4	C4	0	=	0	0	1,0000	-2,0000	0
5	C5	0	=	0	0	0	-2,0000	2,0000
6	C6	0	=	0	0	0	-2,0000	4,0000





# **PROGRAMACIÓN LINEAL.**

## **SIMPLEX**

## **WinQSB**

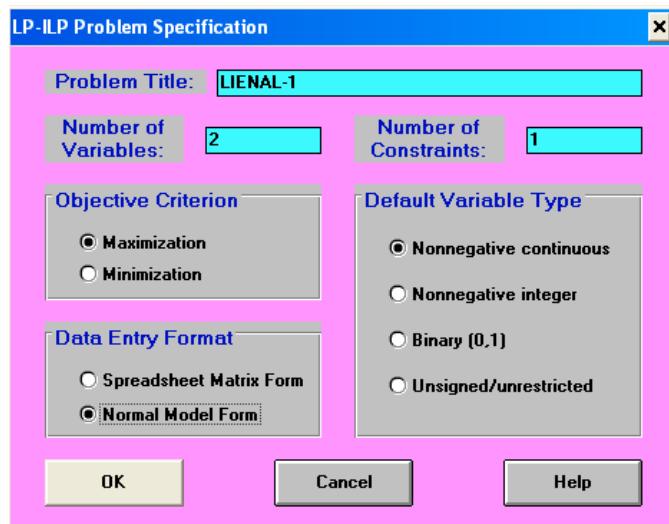




## PROGRAMACIÓN LINEAL: SIMPLEX

Maximizar  $z = 50.000 x + 10.000 y$

$$\text{restricciones: } \begin{cases} 100x + 50y \leq 1.600 \\ 0 \leq x \leq 12 \\ 0 \leq y \leq 16 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x + y \leq 32 \\ 0 \leq x \leq 12 \\ 0 \leq y \leq 16 \end{cases}$$




**Solve the Problem:** Muestra el resultado de la resolución.



**Solve and Display Steps:** Resuelve el problema mostrando las iteraciones del método Simplex necesarias hasta obtener la solución óptima.



**Graphic Method:** Resuelve un problema gráficamente en el caso de problemas con dos variables de decisión.

El problema se resuelve:

[Solve and Analyze / Solve the problem](#)



Icono Solve

Se genera un "Combined Report" (Informe Combinado) que muestra la solución y resultados adicionales (análisis de sensibilidad, precios sombra, valor de las variables de holgura, etc).

Variable -->	X1	X2	Direction	R. H. S.
Maximize	50000	10000		
C1	100	50	<=	1600
LowerBound	0	0		
UpperBound	12	16		
VariableType	Continuous	Continuous		

Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(i)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(i)	Allowable Max. c(i)
1 X1	12	50000	600000	0	basic	20000	M
2 X2	8	10000	80000	0	basic	0	25000
Objective Function	(Max.)	=	680000				

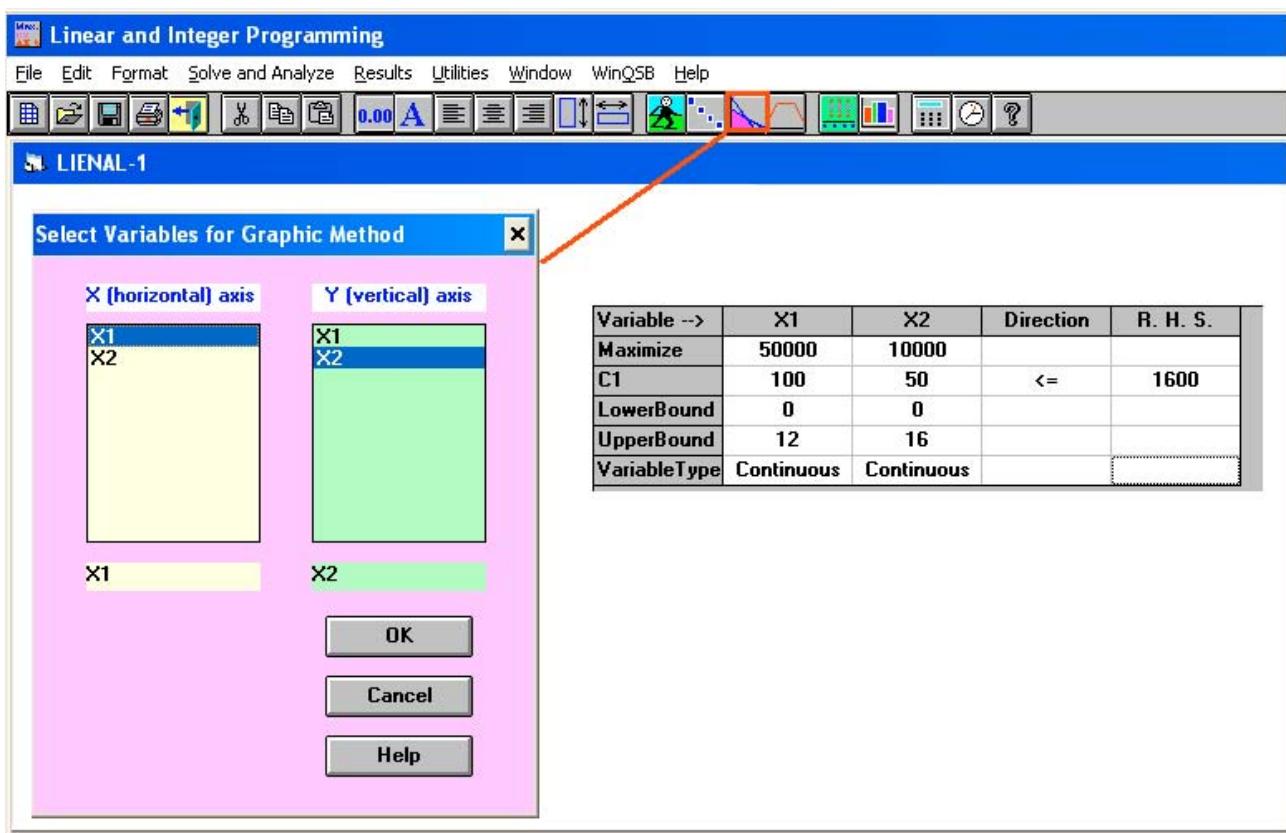
Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
1 C1	1600	<=	1600	0	200	1200	2000

Valores de la solución:  $x_1 = 12$  ,  $x_2 = 8$

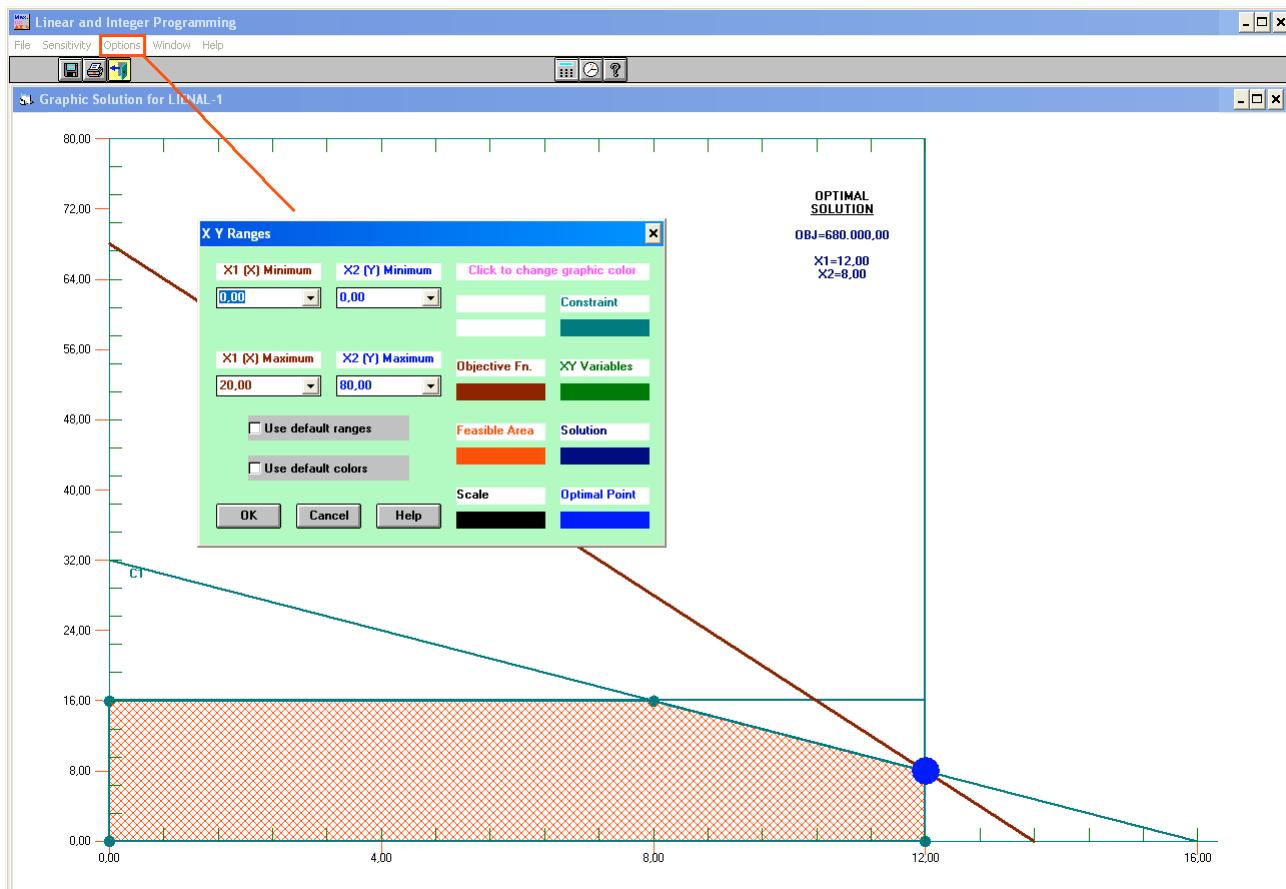
Precios sombra (Shadow Price): Indican cuánto se estaría dispuesto a pagar por una unidad adicional de cada recurso, o bien, la mejora en el valor de la función objetivo por incremento unitario de cada recurso.



**Graphic Method:** Resuelve el problema gráficamente Al hacer clik en el icono sale una ventana para seleccionar variables



Se elige el menú **Option** para seleccionar los nuevos rangos.



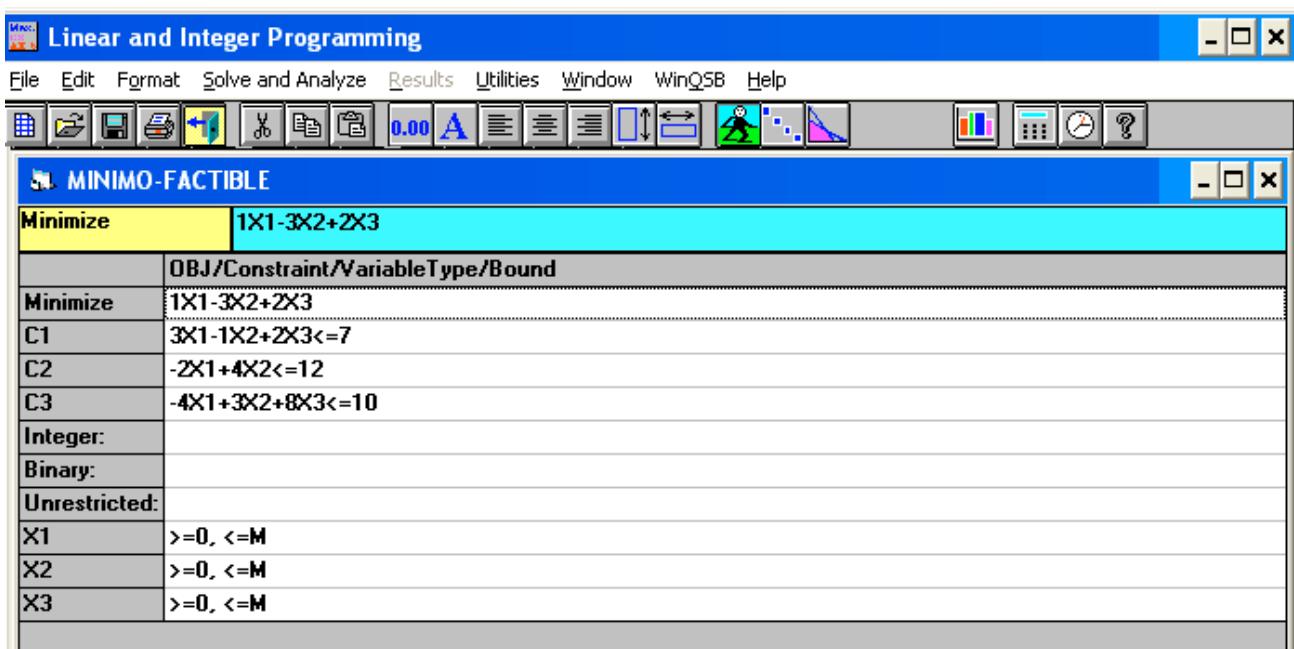
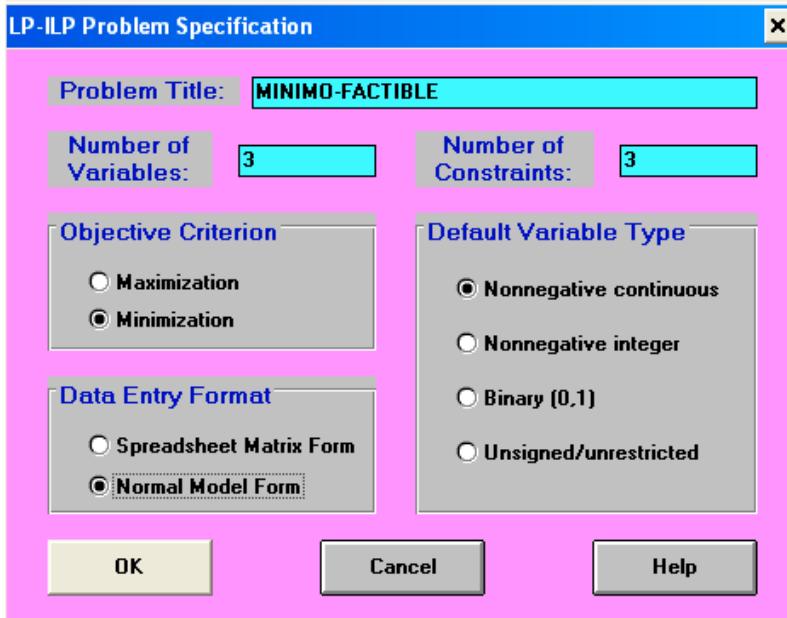




## PROGRAMACIÓN LINEAL: SOLUCIÓN FACTIBLE MÍNIMA

Minimizar:  $z = x_1 - 3x_2 + 2x_3$

restricciones: 
$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 7 \\ -2x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ -4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 10 \\ x_j \geq 0 \end{cases}$$



**Linear and Integer Programming**

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

**MINIMIZE**

**Minimize**

**C1**:  $-2X_1 + 4X_2 \leq 12$

**C2**:  $-4X_1 + 3X_2 + 8X_3 \leq 10$

**Integer:**

**Binary:**

**Unrestricted:**

**X1**:  $\geq 0, \leq M$

**X2**:  $\geq 0, \leq M$

**X3**:  $\geq 0, \leq M$

**VariableType/Bound**

**Switch to Matrix Form**

**Switch to Dual Form**

**Linear and Integer Programming**

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

**Solve the Problem**

**Solve and Display Steps**

**Graphic Method**

**Maximize : C1**

**Perform Parametric Analysis**

**Alternative Solution**

**Change Integer Tolerance**

**Specify Solution Quality**

**Specify Variable Branching Priorities**

Variable -->	X1	X2	X3	Direction	R. H. S.
<b>Minimize</b>	1	-3	2		
<b>C1</b>	3	-1	2	$\leq$	7
<b>C2</b>	-2	4		$\leq$	12
<b>C3</b>	-4	3	8	$\leq$	10
<b>LowerBound</b>	0	0	0		
<b>UpperBound</b>	M	M	M		
<b>VariableType</b>	Continuous	Continuous	Continuous		

**Linear and Integer Programming**

File Format Results Utilities Window Help

**Combined Report for MINIMO-FACIBLE**

			Saturday	June	06	2020		
	<b>Decision Variable</b>	<b>Solution Value</b>	<b>Unit Cost or Profit c(i)</b>	<b>Total Contribution</b>	<b>Reduced Cost</b>	<b>Basis Status</b>	<b>Allowable Min. c(i)</b>	<b>Allowable Max. c(i)</b>
1	X1	4,00	1,00	4,00	0	basic	-M	1,50
2	X2	5,00	-3,00	-15,00	0	basic	-M	-2,00
3	X3	0	2,00	0	2,40	at bound	-0,40	M
	<b>Objective Function</b>	(Min.) =	<b>-11,00</b>					
	<b>Constraint</b>	<b>Left Hand Side</b>	<b>Direction</b>	<b>Right Hand Side</b>	<b>Slack or Surplus</b>	<b>Shadow Price</b>	<b>Allowable Min. RHS</b>	<b>Allowable Max. RHS</b>
1	C1	7,00	$\leq$	7,00	0	-0,20	-3,00	M
2	C2	12,00	$\leq$	12,00	0	-0,80	-4,67	34,00
3	C3	-1,00	$\leq$	10,00	11,00	0	-1,00	M

La solución óptima es:  $x_1 = 4$  ,  $x_2 = 5$  ,  $x_3 = 0$

Valor de la función objetivo:  $z = -11$

Precios sombra (Shadow Price): Indican cuánto se estaría dispuesto a pagar por una unidad adicional de cada recurso, o bien, la mejora en el valor de la función objetivo por incremento unitario de cada recurso.



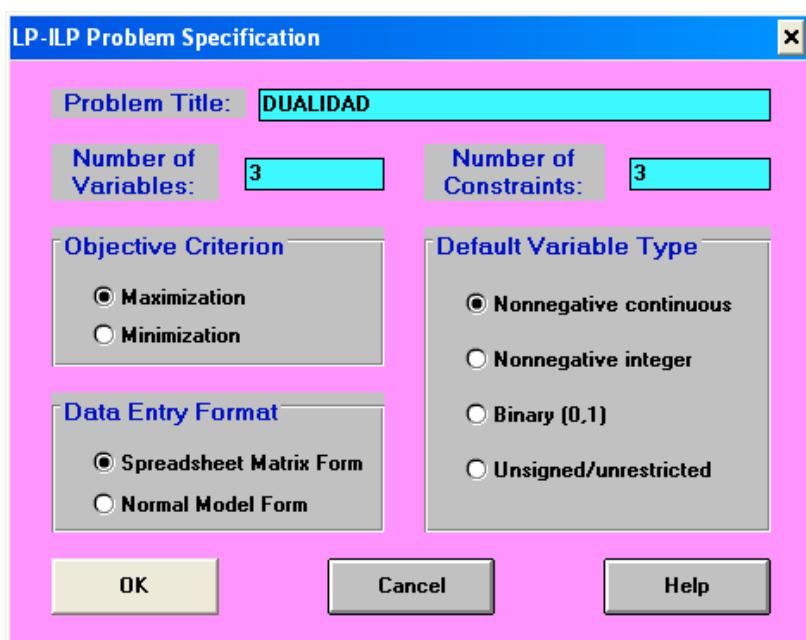


## PROGRAMACIÓN LINEAL: SIMPLEX DUAL

Maximizar:  $z = 4x_1 + 7x_2 + 3x_3$

restricciones: 
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 30 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 45 \\ x_j \geq 0 \end{cases}$$
 Se pide:

- Formular y resolver el problema dual
  - ¿Cuánto se pagaría para que la primera restricción fuera 40?
  - Partiendo del problema dual, ( $x_1 = 5$ ,  $x_2 = 10$ ,  $x_3 = 5$ ), ¿es solución del problema original?
- a)



Introducidos los datos

Variable -->	X1	X2	X3	Direction	R. H. S.
Maximize	4	7	3		
C1	2	1	2	$\leq$	30
C2	1	2	2	$\leq$	45
LowerBound	0	0	0		
UpperBound	M	M	M		
VariableType	Continuous	Continuous	Continuous		

Con la opción: Result / Final Simplex Tableau se obtiene la tabla:

**Linear and Integer Programming**

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

Solution Summary Constraint Summary

**DUALIDAD**

Sensitivity Analysis for OBJ Sensitivity Analysis for RHS

Combined Report Infeasibility Analysis Unboundedness Analysis

Show Parametric Analysis Graphic Parametric Analysis

Final Simplex Tableau Obtain Alternate Optimal

Show Run Time and Iteration

Variable -->	X1	X2	X3	Direction	R. H. S.
Maximize	4	7	3		
C1	2	1	2	<=	30
C2	1	2	2	<=	45
LowerBound	0	0	0		
UpperBound	M	M	M		
VariableType	Continuous	Continuous	Continuous		

	X1	X2	X3	Slack_C1	Slack_C2		
Basis	C(i)	4,0000	7,0000	3,0000	0	0	R. H. S.
X1	4,0000	1,0000	0,0000	0,6667	0,6667	-0,3333	5,0000
X2	7,0000	0,0000	1,0000	0,6667	-0,3333	0,6667	20,0000
	C(i)-Z(i)	0	0	-4,3333	-0,3333	-3,3333	160,0000

Las variables básicas son  $x_1, x_2$ . El valor de la función objetivo es  $z = 160$

$$\text{La matriz asociada a la base inicial es } B^{-1} = \begin{pmatrix} 0,6667 & -0,3333 \\ -0,3333 & 0,6667 \end{pmatrix}$$

a) Para formular el problema dual: [Format / Switch to Dual Form](#)

**Linear and Integer Programming**

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

**DUA**

Number Font Alignment

Row Height Column Width

Switch to Normal Model Form **Switch to Dual Form**

Variable -->	X1	X2	X3	Direction	R. H. S.
Maximize	4	7	3		
C1	2	1	2	<=	30
C2	1	2	2	<=	45
LowerBound	0	0	0		
UpperBound	M	M	M		
VariableType	Continuous	Continuous	Continuous		

Variable -->	C1	C2	Direction	R. H. S.
Minimize	30	45		
X1	2	1	>=	4
X2	1	2	>=	7
X3	2	2	>=	3
LowerBound	0	0		
UpperBound	M	M		
VariableType	Continuous	Continuous		

### Problema Original

$$\text{Maximizar: } z = 4x_1 + 7x_2 + 3x_3$$

$$\text{restricciones: } \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 30 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 45 \\ x_j \geq 0 \end{cases}$$

### Problema Dual

$$\text{Minimizar: } w = 30y_1 + 45y_2$$

$$\text{restricciones: } \begin{cases} 2y_1 + y_2 \geq 4 \\ y_1 + 2y_2 \geq 7 \\ 2y_1 + 2y_2 \geq 3 \\ y_i \geq 0 \end{cases}$$

Con la opción: Result / Final Simplex Tableau se obtiene la tabla:

Variable -->	C1	C2	Direction	R. H. S.
Minimize	30	45		
X1	2	1	$\geq$	4
X2	1	2	$\geq$	7
X3	2	2	$\geq$	3
LowerBound	0	0		
UpperBound	M	M		
VariableType	Continuous	Continuous		

	C1	C2	Surplus_X1	Surplus_X2	Surplus_X3	Artificial_X1	Artificial_X2	Artificial_X3		R. H. S.	Ratio
Basis	C(i)	30,0000	45,0000	0	0	0	0	0	0	4,3333	
Surplus_X3	0	0	0	-0,6667	-0,6667	1,0000	0,6667	0,6667	-1,0000	4,3333	
C2	45,0000	0,0000	1,0000	0,3333	-0,6667	0	-0,3333	0,6667	0	3,3333	
C1	30,0000	1,0000	0,0000	-0,6667	0,3333	0	0,6667	-0,3333	0	0,3333	
C(i)-Z(i)	0	0	5,0000	20,0000	0	-5,0000	-20,0000	0	160,0000		
* Big M	0	0	0	0	0	1,0000	1,0000	1,0000	0	0	

	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(i)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(i)	Allowable Max. c(i)
1	X1	5,000	4,000	20,000	0	basic	3,500	14,000
2	X2	20,000	7,000	140,000	0	basic	2,000	8,000
3	X3	0	3,000	0	-4,333	at bound	-M	7,333
	Objective Function	(Max.) =	160,000					
	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
1	C1	30,000	$\leq$	30,000	0	0,333	22,500	90,000
2	C2	45,000	$\leq$	45,000	0	3,333	15,000	60,000

La solución óptima es:  $y_1 = 0,333$ ,  $y_2 = 3,333$ , obteniendo un valor para la función objetivo  $w = 160$ , igual que la obtenida en el problema original.

Al observar la tabla resumen del problema original, la solución óptima del problema dual coincide con los precios sombra (Shadow price) asociados al problema original.

Los valores de **Shadow price** representan el precio que una empresa está dispuesta a pagar por un incremento unitario del recurso disponible.

Nunca se paga más de este precio por unidad suplementaria del recurso; en caso de hacerse, se pagaría por el uso de esa cantidad adicional un precio superior a la mejora que produce en la función objetivo.

b) Si la primera restricción se aumenta en 10 unidades, el problema queda:

$$\text{Maximizar: } z = 4x_1 + 7x_2 + 3x_3$$

restricciones:  $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 40 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 45 \\ x_j \geq 0 \end{cases}$  Se pide:

Variable -->	X1	X2	X3	Direction	R. H. S.
Maximize	4	7	3		
C1	2	1	2	$\leq$	40
C2	1	2	2	$\leq$	45
LowerBound	0	0	0		
UpperBound	M	M	M		
VariableType	Continuous	Continuous	Continuous		

	X1	X2	X3	Slack_C1	Slack_C2		
Basis	C(i)	4,0000	7,0000	3,0000	0	0	R. H. S.
X1	4,0000	1,0000	0,0000	0,6667	0,6667	-0,3333	11,6667
X2	7,0000	0,0000	1,0000	0,6667	-0,3333	0,6667	16,6667
	C(i)-Z(i)	0	0	-4,3333	-0,3333	-3,3333	163,3333

Se obtiene un valor de la función objetivo  $z = 163,3333$

c) Responder si la solución ( $x_1 = 5$  ,  $x_2 = 10$  ,  $x_3 = 5$ ) es solución del problema original, se puede hacer de varias formas:

c1) Se sabe que la solución óptima es  $x_1 = 5$  ,  $x_2 = 20$  ,  $x_3 = 0$  , con lo cual no puede ser óptima.

c2) Resolviendo el problema dual se conoce que la función objetivo es  $w = 160$  , que coincide con el valor de la función objetivo del problema original.

Para una solución  $x_1 = 5$  ,  $x_2 = 10$  ,  $x_3 = 5$  se tendría:

$$z = 4x_1 + 7x_2 + 3x_3 \rightarrow z = 4 \times 5 + 7 \times 10 + 3 \times 5 = 105 \neq 160 \rightarrow \text{No puede ser}$$

c3) Como la solución del dual tiene todas sus componentes no nulas ( $y_1 = 0,333$  ,  $y_2 = 3,333$ ) en la solución óptima, las restricciones del problema original serán igualdades.

Se prueba si se verifica en la solución propuesta:

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \times 5 + 10 + 2 \times 5 = 30 \rightarrow \text{Sí}$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5 + 2 \times 10 + 2 \times 5 = 35 \neq 45 \rightarrow \text{No}$$





## MÉTODO DEL SIMPLEX: COSTE MÍNIMO

Una empresa tiene 3 centros de producción (A, B, C) con una distribución de sus productos en 4 provincias (1, 2, 3, 4). La matriz de costos se muestra en la tabla adjunta:

	1	2	3	4	Oferta
A	3	7	6	4	5
B	2	4	3	2	2
C	4	3	8	5	3
Demanda	3	3	2	2	

Calcular el coste mínimo de la distribución de productos.



**Solve the Problem:** Se resuelve el problema con programación lineal.

	1	2	3	4	Oferta
A	$3x_{11}$	$7x_{12}$	$6x_{13}$	$4x_{14}$	5
B	$2x_{21}$	$4x_{22}$	$3x_{23}$	$2x_{24}$	2
C	$4x_{31}$	$3x_{32}$	$8x_{33}$	$5x_{34}$	3
Demanda	3	3	2	2	

$$z = 3x_{11} + 7x_{12} + 6x_{13} + 4x_{14} + 2x_{21} + 4x_{22} + 3x_{23} + 2x_{24} + 4x_{31} + 3x_{32} + 8x_{33} + 5x_{34}$$

con las restricciones:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 5 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 2 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 3 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 3 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 3 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 2 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 2 \end{cases}$$

LP-ILP Problem Specification

Problem Title:	DISTRIBUCIÓN PRODUCTOS		
Number of Variables:	12	Number of Constraints:	7
Objective Criterion	<input type="radio"/> Maximization <input checked="" type="radio"/> Minimization		
Data Entry Format	<input type="radio"/> Spreadsheet Matrix Form <input checked="" type="radio"/> Normal Model Form		
Default Variable Type <input checked="" type="radio"/> Nonnegative continuous <input type="radio"/> Nonnegative integer <input type="radio"/> Binary {0,1} <input type="radio"/> Unsigned/unrestricted			
<input type="button" value="OK"/>		<input type="button" value="Cancel"/>	<input type="button" value="Help"/>

**Linear and Integer Programming**

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

DISTRIBUCIÓN PRODUCTOS

Unrestricted													
	OBJ/Constraint/VariableType/Bound												
Minimize	$3X_1 + 7X_2 + 6X_3 + 4X_4 + 2X_5 + 4X_6 + 3X_7 + 2X_8 + 4X_9 + 3X_{10} + 8X_{11} + 5X_{12}$												
C1	$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 5$												
C2	$X_5 + X_6 + X_7 + X_8 = 2$												
C3	$X_9 + X_{10} + X_{11} + X_{12} = 3$												
C4	$X_1 + X_5 + X_9 = 3$												
C5	$X_2 + X_6 + X_{10} = 3$												
C6	$X_3 + X_7 + X_{11} = 2$												
C7	$X_4 + X_8 + X_{12} = 2$												
Integer:													
Binary:													
Unrestricted:													
X1	$\geq 0, \leq M$												
X2	$\geq 0, \leq M$												
X3	$\geq 0, \leq M$												
X4	$\geq 0, \leq M$												
X5	$\geq 0, \leq M$												
X6	$\geq 0, \leq M$												
X7	$\geq 0, \leq M$												
X8	$\geq 0, \leq M$												
X9	$\geq 0, \leq M$												
X10	$\geq 0, \leq M$												
X11	$\geq 0, \leq M$												
X12	$\geq 0, \leq M$												

**Linear and Integer Programming**

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

DISTRIBUCIÓN PRODUCTOS

Variable	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9	X10	X11	X12	Direction	R. H. S.
Minimize	3	7	6	4	2	4	3	2	4	3	8	5		
C1	1	1	1	1									=	5
C2					1	1	1	1					=	2
C3									1	1	1	1	=	3
C4	1				1				1				=	3
C5		1				1				1			=	3
C6			1				1				1		=	2
C7				1				1				1	=	2
LowerBd	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
UpperBd	M	M	M	M	1	M	M	M	M	M	M	M		
Variable														



## Solve the Problem

Linear and Integer Programming

File Format Results Utilities Window Help

0.00 A

Combined Report for DISTRIBUCIÓN PRODUCTOS

	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(i)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(i)	Allowable Max. c(i)
1	X1	3,0000	3,0000	9,0000	0	basic	-M	4,0000
2	X2	0	7,0000	0	4,0000	at bound	3,0000	M
3	X3	0	6,0000	0	1,0000	at bound	5,0000	M
4	X4	2,0000	4,0000	8,0000	0	basic	3,0000	5,0000
5	X5	0	2,0000	0	1,0000	at bound	1,0000	M
6	X6	0	4,0000	0	3,0000	at bound	1,0000	M
7	X7	2,0000	3,0000	6,0000	0	basic	-M	4,0000
8	X8	0	2,0000	0	0	basic	1,0000	3,0000
9	X9	0	4,0000	0	1,0000	at bound	3,0000	M
10	X10	3,0000	3,0000	9,0000	0	basic	-M	6,0000
11	X11	0	8,0000	0	3,0000	at bound	5,0000	M
12	X12	0	5,0000	0	1,0000	at bound	4,0000	M
	Objective Function	(Min.) =	32,0000					
	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
1	C1	5,0000	=	5,0000	0	0	5,0000	M
2	C2	2,0000	=	2,0000	0	-2,0000	2,0000	4,0000
3	C3	3,0000	=	3,0000	0	0	3,0000	M
4	C4	3,0000	=	3,0000	0	3,0000	0	3,0000
5	C5	3,0000	=	3,0000	0	3,0000	0	3,0000
6	C6	2,0000	=	2,0000	0	5,0000	0	2,0000
7	C7	2,0000	=	2,0000	0	4,0000	0	2,0000

Interpretación del resultado:

$$x_{ij} \equiv x_{\text{origen destino}} : x_{11} = 3 \quad x_{14} = 2 \quad x_{23} = 2 \quad x_{32} = 3$$

	1	2	3	4
A	3 ( $x_{11} = 3$ )			4 ( $x_{14} = 2$ )
B			3 ( $x_{23} = 2$ )	
C		3 ( $x_{32} = 3$ )		

$$\text{Función objetivo: } z = 3x_{11} + 4x_{14} + 3x_{23} + 3x_{32} = 3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 32$$

Del origen A se envían 3 unidades al destino 1

Del origen A se envían 2 unidades al destino 4

Del origen B se envían 2 unidades al destino 3

Del origen C se envían 3 unidades al destino 2



Max.  
Cx  
 $\Delta X \leq b$

## MÉTODO DEL SIMPLEX: COSTE MÍNIMO DE ELECTRICIDAD

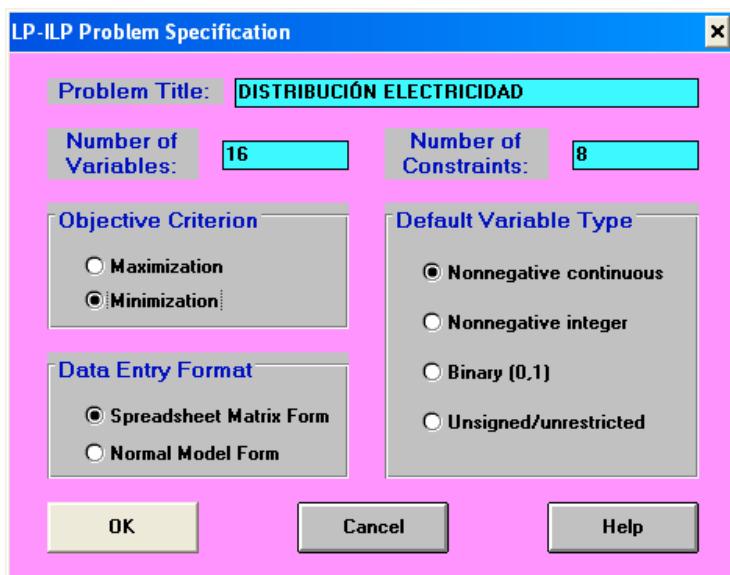
Coste mínimo de la distribución de energía de Centrales Eléctricas a Ciudades.

	Ciudad A	Ciudad B	Ciudad C	Ciudad D	Oferta
Central 1	$5x_{11}$	$2x_{12}$	$7x_{13}$	$3x_{14}$	80
Central 2	$3x_{21}$	$6x_{22}$	$6x_{23}$	$x_{24}$	30
Central 3	$6x_{31}$	$x_{32}$	$2x_{33}$	$4x_{34}$	60
Central 4	$4x_{41}$	$3x_{42}$	$6x_{43}$	$6x_{44}$	45
Demanda	70	40	70	35	215

$$z = 5x_{11} + 2x_{12} + 7x_{13} + 3x_{14} + 3x_{21} + 6x_{22} + 6x_{23} + x_{24} + \\ + 6x_{31} + x_{32} + 2x_{33} + 4x_{34} + 4x_{41} + 3x_{42} + 6x_{43} + 6x_{44}$$

restricciones:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 80 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 30 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 60 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 45 \end{cases} \quad \begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 70 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 40 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 70 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 35 \end{cases}$$





Solve the Problem, una vez que se introduzcan los datos

Linear and Integer Programming

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

0.00 A

DISTRIBUCIÓN ELECTRICIDAD

OBJ/Constraint/VariableType/Bound	
Minimize	$5X_1 + 2X_2 + 7X_3 + 3X_4 + 3X_5 + 6X_6 + 6X_7 + X_8 + 6X_9 + X_{10} + 2X_{11} + 4X_{12} + 4X_{13} + 3X_{14} + 6X_{15} + 6X_{16}$
C1	$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 80$
C2	$X_5 + X_6 + X_7 + X_8 = 30$
C3	$X_9 + X_{10} + X_{11} + X_{12} = 60$
C4	$X_{13} + X_{14} + X_{15} + X_{16} = 45$
C5	$X_1 + X_5 + X_9 + X_{13} = 70$
C6	$X_2 + X_6 + X_{10} + X_{14} = 40$
C7	$X_3 + X_7 + X_{11} + X_{15} = 70$
C8	$X_4 + X_8 + X_{12} + X_{16} = 35$
Integer:	
Binary:	
Unrestricted:	
X1	$\geq 0, \leq M$
X2	$\geq 0, \leq M$
X3	$\geq 0, \leq M$
X4	$\geq 0, \leq M$
X5	$\geq 0, \leq M$
X6	$\geq 0, \leq M$
X7	$\geq 0, \leq M$
X8	$\geq 0, \leq M$
X9	$\geq 0, \leq M$
X10	$\geq 0, \leq M$
X11	$\geq 0, \leq M$
X12	$\geq 0, \leq M$
X13	$\geq 0, \leq M$
X14	$\geq 0, \leq M$
X15	$\geq 0, \leq M$
X16	$\geq 0, \leq M$

## Forma Matricial: Format / Switch to Matrix Form

Linear and Integer Programming																	
	File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help																
<b>DISTRIBUCIÓN ELECTRICIDAD</b>																	
Variable -->	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9	X10	X11	X12	X13	X14	X15	X16	irection	R. H.
Minimize	2	7	3	3	6	6	1	6	1	2	4	4	3	6	6		
C1	1	1	1													=	80
C2				1	1	1	1									=	30
C3								1	1	1	1					=	60
C4												1	1	1	1	=	45
C5				1				1				1				=	70
C6	1				1				1				1			=	40
C7		1				1				1				1		=	70
C8			1				1				1				1	=	35
LowerBound	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
UpperBound	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M		
VariableType																	

Linear and Integer Programming								
	File Format Results Utilities Window Help							
<b>Combined Report for DISTRIBUCIÓN ELECTRICIDAD</b>								
	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
1	X1	25,0000	5,0000	125,0000	0	basic	5,0000	5,0000
2	X2	40,0000	2,0000	80,0000	0	basic	-M	4,0000
3	X3	10,0000	7,0000	70,0000	0	basic	3,0000	7,0000
4	X4	5,0000	3,0000	15,0000	0	basic	3,0000	7,0000
5	X5	0	3,0000	0	0	at bound	3,0000	M
6	X6	0	6,0000	0	6,0000	at bound	0	M
7	X7	0	6,0000	0	1,0000	at bound	5,0000	M
8	X8	30,0000	1,0000	30,0000	0	basic	-M	1,0000
9	X9	0	6,0000	0	6,0000	at bound	0	M
10	X10	0	1,0000	0	4,0000	at bound	-3,0000	M
11	X11	60,0000	2,0000	120,0000	0	basic	-M	6,0000
12	X12	0	4,0000	0	6,0000	at bound	-2,0000	M
13	X13	45,0000	4,0000	180,0000	0	basic	-M	4,0000
14	X14	0	3,0000	0	2,0000	at bound	1,0000	M
15	X15	0	6,0000	0	0	at bound	6,0000	M
16	X16	0	6,0000	0	4,0000	at bound	2,0000	M
	Objective	Function	(Min.) =	620,0000	(Note:	Alternate	Solution	Exists!!)
	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
1	C1	80,0000	=	80,0000	0	0	80,0000	M
2	C2	30,0000	=	30,0000	0	-2,0000	30,0000	35,0000
3	C3	60,0000	=	60,0000	0	-5,0000	60,0000	70,0000
4	C4	45,0000	=	45,0000	0	-1,0000	45,0000	70,0000
5	C5	70,0000	=	70,0000	0	5,0000	45,0000	70,0000
6	C6	40,0000	=	40,0000	0	2,0000	0	40,0000
7	C7	70,0000	=	70,0000	0	7,0000	60,0000	70,0000
8	C8	35,0000	=	35,0000	0	3,0000	30,0000	35,0000

Interpretación del resultado:

$$x_{ij} \equiv x_{\text{origen destino}} : x_{11} = 25 \quad x_{12} = 40 \quad x_{13} = 10 \quad x_{14} = 5 \quad x_{24} = 30 \quad x_{33} = 60 \quad x_{41} = 45$$

	Ciudad A	Ciudad B	Ciudad C	Ciudad D	Oferta
Central 1	5 ( $x_{11} = 25$ )	2 ( $x_{12} = 40$ )	7 ( $x_{13} = 10$ )	3 ( $x_{14} = 5$ )	80
Central 2				1 ( $x_{24} = 30$ )	30
Central 3			2 ( $x_{33} = 60$ )		60
Central 4	4 ( $x_{41} = 45$ )				45
Demanda	70	40	70	35	215

Función objetivo:

$$\begin{aligned}
 z &= 5x_{11} + 2x_{12} + 7x_{13} + 3x_{14} + x_{24} + 2x_{33} + 4x_{41} = \\
 &= 5 \times 25 + 2 \times 40 + 7 \times 10 + 3 \times 5 + 30 + 2 \times 60 + 4 \times 45 = 620
 \end{aligned}$$

De la Central 1 se envían 25 unidades a la Ciudad A

De la Central 1 se envían 40 unidades a la Ciudad B

De la Central 1 se envían 10 unidades a la Ciudad C

De la Central 1 se envían 5 unidades a la Ciudad D

De la Central 2 se envían 30 unidades a la Ciudad D

De la Central 3 se envían 60 unidades a la Ciudad C

De la Central 4 se envían 45 unidades a la Ciudad A



Una compañía diseña cuatro artículos (A, B, C y D) utilizando cobre y aluminio. La tabla refleja las cantidades que utiliza de estos dos elementos por unidad de artículo, cantidad máxima disponible de los elementos y beneficios unitarios.

	A	B	C	D	Recursos
Cobre	4 $x_{11}$	9 $x_{12}$	7 $x_{13}$	10 $x_{14}$	6.000
Aluminio	2 $x_{21}$	2 $x_{22}$	4 $x_{23}$	20 $x_{24}$	4.000
Beneficios	12	26	20	60	

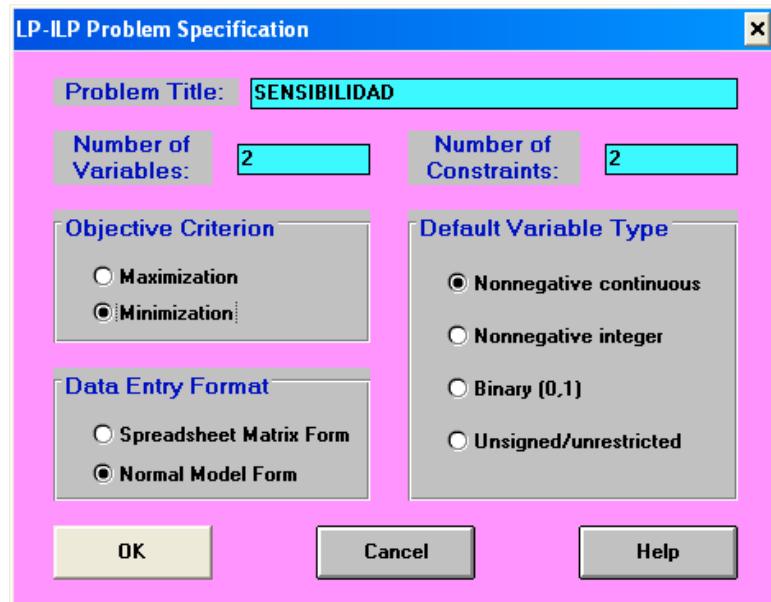
- (1) ¿Cuál es el rango de variación del artículo B para que la solución siga siendo óptima?, ¿Cuál sería la solución si el artículo B aumenta en 10 unidades?
- (2) Determinar el rango de variación del aluminio si la cantidad disminuye en 1000 kg?, ¿Cuál es la solución óptima?
- (3) Si se perturba el vector de coste con el vector  $(-1, 0, 2, 0)$ , determinar las soluciones y el valor óptimo de la función objetivo.
- (4) Si se perturba el vector de recursos con el vector  $(160, 0)$ , determinar las soluciones y el valor óptimo de la función objetivo.

Función objetivo:

$$z = 12x_{11} + 26x_{12} + 20x_{13} + 60x_{14}$$

restricciones:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 6.000 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 4.000 \end{cases}$$



Linear and Integer Programming

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

Maximize  $12A+26B+20C+60D$

OBJ/Constraint/VariableType/Bound

Maximize	$12A+26B+20C+60D$			
C1	$4A+9B+7C+10D=6000$			
C2	$2A+2B+4C+20D=4000$			
Integer:				
Binary:				
Unrestricted:				
X1	$>=0, <=M$			
X2	$>=0, <=M$			
X3	$>=0, <=M$			
X4	$>=0, <=M$			

Variable -->	A	B	C	D	Direction	R. H. S.
Maximize	12	26	20	60		
Cobre	4	9	7	10	=	6000
Aluminio	2	2	4	20	=	4000
LowerBound	0	0	0	0		
UpperBound	M	M	M	M		
VariableType	Continuous	Continuous	Continuous	Continuous		

	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
1	A	0	12,0000	0	-1,5000	at bound	-M	13,5000
2	B	500,0000	26,0000	13.000,0000	0	basic	22,0000	M
3	C	0	20,0000	0	-4,5000	at bound	-M	24,5000
4	D	150,0000	60,0000	9.000,0000	0	basic	36,0000	M
	Objective Function	(Max.) =	22.000,0000					
Constraint		Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
1	Cobre	6.000,0000	=	6.000,0000	0	2,5000	2.000,0000	18.000,0000
2	Aluminio	4.000,0000	=	4.000,0000	0	1,7500	1.333,3330	12.000,0000

Solución:  $x_{11} = 0 \quad x_{12} = 500 \quad x_{13} = 0 \quad x_{14} = 150$

Función objetivo:  $z = 26x_{12} + 60x_{14} = 26 \times 500 + 60 \times 150 = 22.000$

Rango de variación del beneficio (22, →) del artículo B para que la solución siga siendo óptima, no cambian las variables básicas.

Rango de variación del aluminio (1.333,333, 12.000) para que las variables sigan siendo básicas.

- (1) Si el artículo B aumenta en 10 unidades pasa a ser 36, con lo que se encuentra dentro del cambio de variación para que la solución siga siendo óptima. El valor de la función objetivo sería:

$$z = 36x_{12} + 60x_{14} = 36 \times 500 + 60 \times 150 = 27.000$$

- (2) El rango de variación del aluminio (1.333,333, 12.000) para que las variables sigan siendo básicas. Para saber cuál sería su variación si la cantidad disminuye en 1000 kg, se recurre a la tabla final del Simplex: [Results / Final Simplex Tableau](#)

		A	B	C	D	Artificial_Cobre	Artificial_Aluminio		
Basis	C(i)	12,0000	26,0000	20,0000	60,0000	0	0	R. H. S.	Ratio
X2	26,0000	0,3750	1,0000	0,6250	0	0,1250	-0,0625	500,0000	
X4	60,0000	0,0625	0,0000	0,1375	1,0000	-0,0125	0,0562	150,0000	
C(i)-Z(i)	-1,5000	0	-4,5000	0		-2,5000	-1,7500	22.000,0000	
* Big M	0	0	0	0		-1,0000	-1,0000	0	

Matriz inversa básica:  $B^{-1} = \begin{pmatrix} 0,1250 & -0,0625 \\ -0,0125 & 0,0562 \end{pmatrix}$

Para los nuevos recursos  $\begin{pmatrix} 6.000 \\ 3.000 \end{pmatrix}$  se obtienen nuevos valores de las variables solución:

$$\begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{14} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,1250 & -0,0625 \\ -0,0125 & 0,0562 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6000 \\ 3000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 562,5 \\ 93,75 \end{pmatrix}$$

con lo cual,  $x_{11} = 0 \quad x_{12} = 562,5 \quad x_{13} = 0 \quad x_{14} = 93,75$

Función objetivo:  $z = 26x_{12} + 60x_{14} = 26 \times 562,5 + 60 \times 93,75 = 20.250$

- (3) Análisis paramétrico global: Variación conjunta de los costes

[Results / Perform Parametric Analysis / Objective Function](#)

Con una variación conjunta de todos los costes función de un parámetro, se tiene:

El nuevo vector de costes será:  $C' = C + \mu\tau$

$C \equiv$  Vector original de costes,  $\mu \equiv$  constante y  $\tau \equiv$  Vector perturbación.

Si se perturba el vector de coste con el vector  $(-1,0,2,0)$ ,

The screenshot shows the WinQSB software interface. On the left, a vertical menu tree under 'Perform Parametric Analysis' is expanded, listing options like 'Show Parametric Analysis' and 'Graphic Parametric Analysis'. A red arrow points from this menu to a 'Parametric Analysis' dialog box. This dialog has a radio button group 'Analysis on' with 'Objective Function' selected. To its right is another dialog titled 'Objective Function Perturbation Vector', which contains a table with four rows for variables A, B, C, and D, each with a perturbation value of -1, 0, 2, and 0 respectively.

Range	From $\mu$ (Vector)	To $\mu$ (Vector)	From OBJ Value	To OBJ Value	Slope	Leaving Variable	Entering Variable
1	0	2,2500	22.000,0000	22.000,0000	0	B	C
2	2,2500	M	22.000,0000	M	1.600,0000		
3	0	-1,5000	22.000,0000	22.000,0000	0	B	A
4	-1,5000	-M	22.000,0000	M	-1.333,3330		

Rango de los valores del parámetro

Función objetivo en puntos extremos del intervalo

Incremento función objetivo

Variable que deja y entra en la base

$$z = (\text{From OBJ Value}) + (\text{Slope}) \times (t - \text{From } \mu)$$

$$(-\infty, -1,5) \quad z = 22.000 - 1.333,33(t + 1,5)$$

$$(-1,5, 0) \quad z = 22.0000$$

$$(0, 2,25) \quad z = 22.0000$$

$$(2,25, \infty) \quad z = 22.000 + 1.600(t - 2,25)$$

#### (4) Análisis paramétrico global: Variación conjunta de los recursos.

[Results / Perform Parametric Analysis / Right Hand Side](#)

Con una variación conjunta de todos los costes o recursos en función de un parámetro, se tiene:

El nuevo vector de recursos será:  $b' = b + \mu \tau$

$b \equiv$  Vector original de recursos,  $\mu \equiv$  constante y  $\tau \equiv$  Vector perturbación.

Linear and Integer Programming

File Format Results Utilities Window Help

Solution Summary Constraint Summary

**Combin**

- Sensitivity Analysis for OBJ
- Sensitivity Analysis for RHS
- Combined Report
- Infeasibility Analysis
- Unboundedness Analysis
- Perform Parametric Analysis**
- Show Parametric Analysis
- Graphic Parametric Analysis
- Final Simplex Tableau
- Obtain Alternate Optimal
- Show Run Time and Iteration

Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(i)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(i)	Allowable Max. c(i)
1 A	0	12,0000	0	-1,5000	at bound	-M	13,5000
2 B	500,0000	26,0000	13,000,0000	0	basic	22,0000	M
3 C	0	20,0000	0	-4,5000	at bound	-M	24,5000
4 D	150,0000	60,0000	9,000,0000	0	basic	36,0000	M
<b>Objective Function</b>		(Max.) =	22,000,0000				
<b>Constraint</b>	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
1 Cobre	6,000,0000	=	6,000,0000	0	2,5000	2,000,0000	18,000,0000
2 Aluminio	4,000,0000	=	4,000,0000	0	1,7500	1,333,3330	12,000,0000

**Parametric Analysis**

Analysis on:

- Objective Function
- Right Hand Side

Select one:

- Perturbation Vector
- Cobre
- Aluminio

OK Cancel Help Perturbation Vector

**Right-Hand-Side Perturbation Vector**

Constraint	Perturbation Vector
Cobre	160
Aluminio	0

OK Cancel Help

Range	From $\mu$ (Vector)	To $\mu$ (Vector)	From OBJ Value	To OBJ Value	Slope	Leaving Variable	Entering Variable
1	0	75,0000	22,000,0000	52,000,0000	400,0000	D	
2	75,0000	Infinity	Infeasible				
3	0	-25,0000	22,000,0000	12,000,0000	400,0000	B	
4	-25,0000	-Infinity	Infeasible				

Rango de los valores del parámetro

Función objetivo en puntos extremos del intervalo

Incremento función objetivo

Variable que deja y entra en la base

$$z = (\text{From OBJ Value}) + (\text{Slope}) \times (t - \text{From } \mu)$$

$(-\infty, -25)$  No factible

$$(-25, 0) \quad z = 22,0000 + 400 t$$

$$(0, 75) \quad z = 22,000 + 400 t$$

$(75, \infty)$  No factible



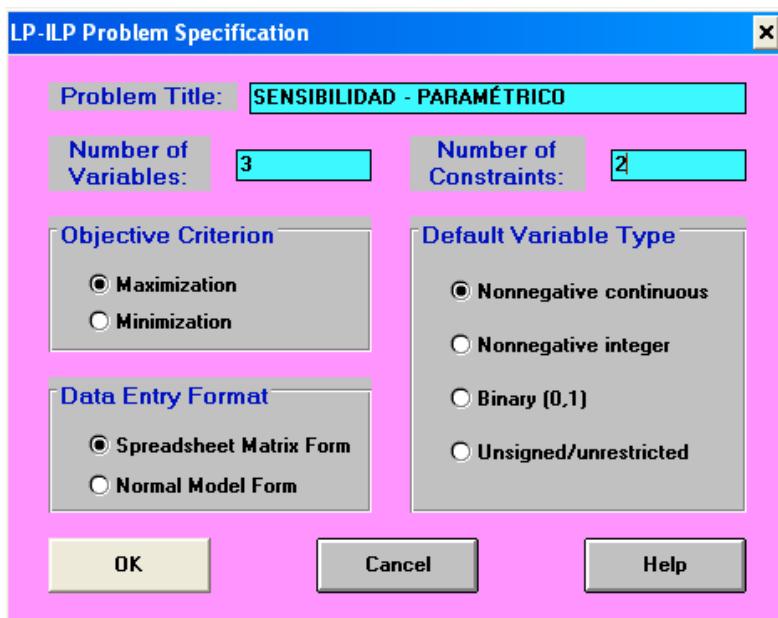
Max.  
Cx  
 $\Delta X \leq b$

## PROGRAMACIÓN LINEAL: ANÁLISIS SENSIBILIDAD Y PARAMÉTRICO

Maximizar:  $z = 4x_1 + 7x_2 + 3x_3$

restricciones: 
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 30 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 45 \\ x_j \geq 0 \end{cases}$$
 Se pide:

- ¿Cuánto puede variar cada coste de los recursos de forma individual para que la solución siga siendo óptima?
- Dependiendo del valor del coste  $c_3$ , ¿cómo varia la función objetivo?
- ¿Qué sucede si varia el vector de costes o el de recursos en función de un parámetro?



Introducidos los datos

Se obtiene la solución óptima

**Linear and Integer Programming**

File Format Results Utilities Window Help

0.00 A

Combined Report for SENSIBILIDAD - PARAMÉTRICO

	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(i)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(i)	Allowable Max. c(i)
1	X1	5,000	4,000	20,000	0	basic	3,500	14,000
2	X2	20,000	7,000	140,000	0	basic	2,000	8,000
3	X3	0	3,000	0	-4,333	at bound	-M	7,333
	Objective Function	(Max.) =	160,000					
	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
1	C1	30,000	<=	30,000	0	0,333	22,500	90,000
2	C2	45,000	<=	45,000	0	3,333	15,000	60,000

La solución óptima es:  $x_1 = 5$  ,  $x_2 = 20$  ,  $x_3 = 0$

Valor de la función objetivo:  $z = 160$

Precios sombra (Shadow Price): Indica cuánto se estaría dispuesto a pagar por una unidad adicional de cada recurso, o bien, la mejora en el valor de la función objetivo por incremento unitario de cada recurso.

Variación de los recursos (Allowable RHS) para que la base siga siendo óptima:

$$22,5 \leq c_1 \leq 90 \text{ y } 15 \leq c_2 \leq 60$$

- a) Para conocer cuánto puede variar cada coste de recursos para que la solución siga siendo óptima, hay que seleccionar la opción [Results / Sensitivity Analysis for OBJ](#)

**Linear and Integer Programming**

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

SENSIBILIDAD - PARAMÉTRICO

- Sensitivity Analysis for OBJ
- Sensitivity Analysis for RHS
- Combined Report
- Infeasibility Analysis
- Unboundedness Analysis
- Show Parametric Analysis
- Graphic Parametric Analysis
- Final Simplex Tableau
- Obtain Alternate Optimal
- Show Run Time and Iteration

**Sensitivity Analysis of the OBJ Coefficients for SENSIBILIDAD - PARAMÉTRICO**

	Decision Variable	Solution Value	Reduced Cost	Unit Cost or Profit C(i)	Allowable Min. C(i)	Allowable Max. C(i)
1	X1	5,000	0	4,000	3,500	14,000
2	X2	20,000	0	7,000	2,000	8,000
3	X3	0	-4,333	3,000	-M	7,333

En la última tabla se observa la variación que pueden sufrir los costes de manera individual para que la solución obtenida siga siendo óptima:

$$3,5 \leq c_1 \leq 14 \quad 2 \leq c_2 \leq 8 \quad -\infty \leq c_3 \leq 7,333$$

Para ver hasta dónde se pueden variar los recursos, se selecciona:

[Results / Sensitivity Analysis for RHS](#)

Variable -->	X1	X2	X3	Direction	R. H. S.
Maximize	4	7	3		
C1	2	1	2	$\leq$	30
C2	1	2	2	$\leq$	45
LowerBound	0	0	0		
UpperBound	M	M	M		
VariableType	Continuous	Continuous	Continuous		

	Constraint	Direction	Shadow Price	Right Hand Side	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
1	C1	$\leq$	0,333	30,000	22,500	90,000
2	C2	$\leq$	3,333	45,000	15,000	60,000

El coste  $c_3$  es un parámetro que varía restricción) puede variar  $15 \leq c_2 \leq 60$  para que la base que se obtuvo siga siendo óptima.

b) Análisis paramétrico individual: El coste  $c_3$  varía

Se selecciona la opción [Results / Perform Parametric Analysis](#)

Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit $c(i)$	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. $c(i)$	Allowable Max. $c(i)$
1 X1	5,000	4,000	20,000	0	basic	3,500	14,000
2 X2	20,000	7,000	140,000	0	basic	2,000	8,000
3 X3	0	3,000	0	-4,333	at bound	-M	7,333

Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
1 C1	30,000	$\leq$	30,000	0	0,333	22,500	90,000
2 C2	45,000	$\leq$	45,000	0	3,333	15,000	60,000

Range	From Coeff.	To Coeff. of X3	From OBJ	To OBJ	Slope	Leaving Variable	Entering Variable
1	3,000	7,333	160,000	160,000	0	X1	X3
2	7,333	14,000	160,000	210,000	7,500	X2	Slack_C2
3	14,000	M	210,000	M	15,000		
4	3,000	-M	160,000	160,000	0		

- ◆ Si el coste asociado a la variable  $x_3$  varía en el intervalo  $[3, 7,333]$  el valor de la función objetivo  $z = 160$ , saliendo la variable  $x_1$  de la base y entrando la variable  $x_3$

- ◆ Si el coste asociado a la variable  $x_3$  varía en el intervalo  $[7,333, 14]$  el valor de la función objetivo varia entre  $160 \leq z < 210$ , con una variación por unidad de coste de 7,5 unidades, saliendo de la base la variable  $x_2$  y entrando la segunda variable de holgura (Slack\_C2).
- ◆ Si el coste asociado a la variable  $x_3$  varía en el intervalo  $[14, \infty)$ , el valor de la función objetivo varia entre  $210 < z < \infty$ , con una variación por unidad de coste de 15 unidades.
- ◆ Si el coste asociado a la variable  $x_3$  varía en el intervalo  $(-\infty, 3)$ , el valor de la función objetivo es  $z = 160$

En consecuencia, se tiene:

$$\text{Si } c_3 \in (-\infty, 7,333) \rightarrow x_1 = 5, x_2 = 20, x_3 = 0 \quad \text{Base} = \{x_1, x_2\} \quad z = 160$$

$$\text{Si } c_3 \in (7,333, 14) \rightarrow \text{Base} = \{x_2, x_3\} \quad 160 \leq z \leq 210, x_1 = 0, x_2 = 15, x_3 = 7,5$$

$$\text{Si } c_3 \geq 14 \rightarrow \text{Base} = \{x_2, \text{holgura } c_2\} \quad 210 \leq z < \infty, x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 15$$

### b) Análisis paramétrico global: Variación conjunta de los costes o recursos.

**Results / Perform Parametric Analysis** → **Objetive Function**  
**Right Hand Side**

Con una variación conjunta de todos los costes o recursos en función de un parámetro, se tiene:

- (1) El nuevo vector de costes será:  $C' = C + \mu\tau$   
 $C \equiv$  Vector original de costes,  $\mu \equiv$  constante y  $\tau \equiv$  Vector perturbación .
- (2) El nuevo vector de recursos será:  $b' = b + \mu\tau$   
 $b \equiv$  Vector original de recursos,  $\mu \equiv$  constante y  $\tau \equiv$  Vector perturbación .

(1)

The screenshot shows the WinQSB software interface with the following components:

- Top Menu Bar:** File, Format, Results, Utilities, Window, Help.
- Sensitivity Analysis Buttons:** Sensitivity Analysis for OBJ, Sensitivity Analysis for RHS.
- Combined Report:** Combined Report, Infeasibility Analysis, Unboundedness Analysis.
- Parametric Analysis Options:** Perform Parametric Analysis, Show Parametric Analysis, Graphic Parametric Analysis.
- Final Simplex Tableau:** Final Simplex Tableau, Obtain Alternate Optimal.
- Show Run Time and Iteration:**
- Central Table (PARAMÉTRICO):**

	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit $c_{ij}$	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. $c_{ij}$	Allowable Max. $c_{ij}$
1	X1	5,000	4,000	20,000	0	basic	3,500	14,000
2	X2	20,000	7,000	140,000	0	basic	2,000	8,000
3	X3	0	3,000	0	-4,333	at bound	-M	7,333
Objective	Function	(Max.) =		160,000				
Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS	
1	C1	30,000	<=	30,000	0	0,333	22,500	90,000
2	C2	45,000	<=	45,000	0	3,333	15,000	60,000
- Parametric Analysis Dialog:** Shows "Analysis on" set to "Objective Function". "Select one:" dropdown shows "Perturbation Vector" selected. Buttons: OK, Cancel, Help.
- Objective Function Perturbation Vector Dialog:** Shows a table with 1 row. Buttons: OK, Cancel, Help.

Se ha introducido un vector perturbación  $\tau = (1, -1, 1)$ , obteniendo la siguiente tabla:

The screenshot shows the WinQsb software interface with the title "Linear and Integer Programming". The menu bar includes File, Format, Results, Utilities, Window, and Help. A toolbar with various icons is at the top, and a status bar at the bottom shows "0.00 A". The main window displays a table titled "Parametric Analysis for SENSIBILIDAD - PARAMÉTRICO -- Objective Function". The table has columns: Range, From  $\mu$  (Vector), To  $\mu$  (Vector), From OBJ Value, To OBJ Value, Slope, Leaving Variable, and Entering Variable. The data rows are:

Range	From $\mu$ (Vector)	To $\mu$ (Vector)	From OBJ Value	To OBJ Value	Slope	Leaving Variable	Entering Variable
1	0	3,333	160,000	110,000	-15,000	X2	Slack_C2
2	3,333	M	110,000	M	15,000		
3	0	-0,333	160,000	165,000	-15,000	X1	Slack_C1
4	-0,333	-M	165,000	M	-22,500		

◆ Si  $\mu \in (-0,333, 3,333)$  el valor de la función objetivo se encuentra entre  $110 < z < 165$ , con una variación por unidad de incremento de  $\mu$  de  $(-15)$ . La base óptima estará formada por  $\{x_1, x_2\}$  y la solución óptima será la obtenida para  $\mu = 0$ , es decir,  $x_1 = 4$ ,  $x_2 = 7$ ,  $x_3 = 0$

◆ Para  $\mu = 10 / 3 = 3,333$  hay soluciones alternativas, la variable  $x_2$  sale de la base y entra la segunda variable de holgura. La base óptima esta formada por  $\{x_1, \text{holgura } c_2\}$

Esta nueva base se mantendrá optima para  $\mu > 3,333$ , la función objetivo  $110 < z < \infty$ , con una variación por unidad de  $\mu = 15$  unidades.

Para obtener la solución óptima se requiere volver a resolver el problema para un determinado valor del parámetro  $\mu > 3,333$ .

Para  $\mu = 4$  el nuevo vector de costes es  $(8, 3, 7)$ , obteniendo:  $x_1 = 15$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 0$

◆ Para  $\mu = -1 / 3 = -0,333$  hay soluciones alternativas, la variable  $x_1$  sale de la base y entra la primera variable de holgura, es decir, la base óptima es  $\{\text{holgura } 1, x_2\}$

◆ Si  $-\infty < \mu < -0,333 \rightarrow 165 \leq z < \infty$  con una variación por unidad de  $\mu = -22,5$  unidades.

Para obtener la solución óptima se necesita resolver el problema para un determinado valor del parámetro  $\mu < -0,333$

Para  $\mu = -1$  el nuevo vector de costes es  $(3, 8, 2)$ , obteniendo como solución:

$$x_1 = 0, x_2 = 22,5, x_3 = 0$$

(2) El nuevo vector de recursos será:  $b' = b + \mu\tau$

### Results / Perform Parametric Analysis / Right Hand Side

The screenshot shows the WinQSB software interface. On the left, there is a vertical menu under 'Perform Parametric Analysis' with options like 'Sensitivity Analysis for OBJ', 'Combined Report', 'Infeasibility Analysis', 'Final Simplex Tableau', and 'Show Run Time and Iteration'. The main window displays two tables: one for 'PARAMÉTRICO' showing decision variables X1, X2, X3 with values 5,000, 20,000, and 0 respectively, and another for 'Right-Hand-Side Perturbation Vector' showing constraints C1 and C2 with perturbation vectors [-1] and [-1] respectively. Below these are two dialog boxes: 'Parametric Analysis' (set to 'Right Hand Side') and 'Right-Hand-Side Perturbation Vector' (showing the same data as the table).

Se ha introducido un vector perturbación  $\tau = (-1, -1)$ , obteniendo la siguiente tabla:

This screenshot shows the 'Parametric Analysis for SENSIBILIDAD - PARAMÉTRICO -- Objective Function' dialog box. It contains a table with four rows (Range 1 to 4) and columns for 'From μ (Vector)', 'To μ (Vector)', 'From OBJ Value', 'To OBJ Value', 'Slope', 'Leaving Variable', and 'Entering Variable'. The data is as follows:

Range	From μ (Vector)	To μ (Vector)	From OBJ Value	To OBJ Value	Slope	Leaving Variable	Entering Variable
1	0	15,000	160,000	105,000	-3,667	X1	Slack_C2
2	15,000	30,000	105,000	0	-7,000	X2	
3	30,000	Infinity	Infeasible				
4	0	-M	160,000	M	-3,667		

- ◆ Si  $\mu \in (-\infty, 15)$  el valor de la función objetivo se encuentra entre  $105 < z < \infty$ , la base óptima estará formada por los vectores  $\{x_1, x_2\}$   
Para  $\mu = 15$  se produce un cambio en la base óptima pasando a ser  $\{x_2\}$ , holgura 2}
- ◆ Si  $\mu \in (15, 30)$  el valor de la función objetivo se encuentra entre  $0 < z < 105$ , con una variación por unidad de incremento  $\mu = -7$  y base óptima  $\{x_2\}$ , holgura 2}
- ◆ Si  $\mu = 30$  la variable  $x_2$  abandona la base (queda sin recurso en la primera restricción) y la solución óptima es  $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$ .
- ◆ Si  $\mu > 30$  el problema no es factible (el recurso asociado a la primera restricción se vuelve negativo).



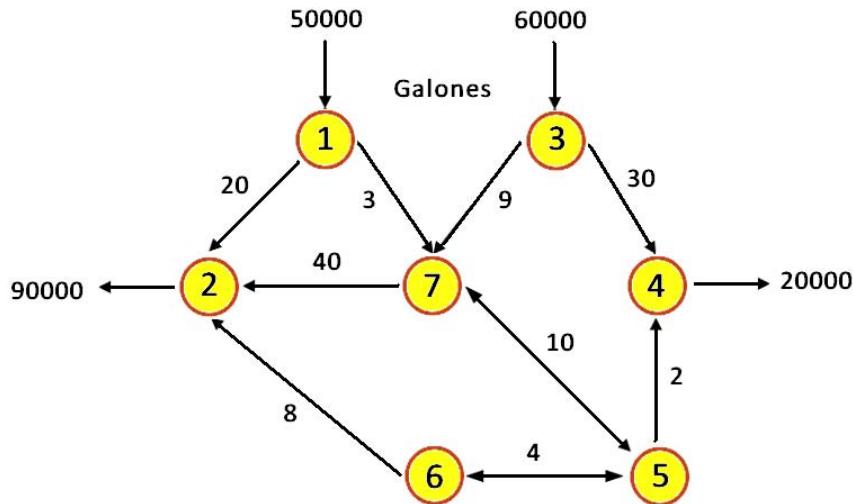


El Transbordo es un caso mixto del transporte en el que existen nodos con oferta pura, nodos con demanda pura y nodos de transbordo que a su vez presentan oferta y demanda. El objetivo es minimizar el coste total del transporte satisfaciendo las demandas.

Es un problema de transporte donde aparece una nueva familia de restricciones, las llamadas restricciones de balanceo que posibilitan que el sistema sea viable, es decir, que todas las unidades que ingresen a un nodo sean iguales a las que salgan del mismo. (unidades que salen + unidades que conserve el nodo).

Calcular el coste mínimo del suministro (galones) de una red de gasoductos en donde los distintos nodos representan estaciones de bombeo y recepción.

Los costos se encuentran en las rutas de la figura.



Denotando por  $x_{ij}$  ≡ Cantidad de galones enviados de la estación i a la estación j

Función objetivo:

$$\text{Minimizar } z = 20x_{12} + 3x_{17} + 9x_{37} + 30x_{34} + 40x_{72} + 10x_{75} + 10x_{57} + 8x_{62} + 4x_{65} + 4x_{56} + 2x_{54}$$

- Restricciones de balanceo para nodos únicamente transitorios:

Restricciones oferta y demanda:

$$\begin{cases} x_{12} + x_{17} = 50.000 \\ x_{37} + x_{34} = 60.000 \\ x_{12} + x_{72} + x_{62} = 90.000 \\ x_{34} + x_{54} = 20.000 \end{cases}$$

- Restricciones de balanceo para nodos transitorios con requerimientos: Consolidan que todas las unidades que llegan (oferta) sean iguales a la suma de todas de las unidades que salen más los requerimientos del nodo (demanda).

Restricciones balance:

$$\begin{cases} x_{17} + x_{37} + x_{57} = x_{72} + x_{75} \\ x_{56} = x_{65} + x_{62} \\ x_{75} + x_{65} = x_{57} + x_{56} + x_{54} \end{cases}$$

**LP-ILP Problem Specification**

Problem Title: **TRANSBORDO**

Number of Variables: **11**      Number of Constraints: **7**

Objective Criterion

Maximization  
 Minimization

Default Variable Type

Nonnegative continuous  
 Nonnegative integer  
 Binary (0,1)  
 Unsigned/unrestricted

Data Entry Format

Spreadsheet Matrix Form  
 Normal Model Form

OK      Cancel      Help

**Linear and Integer Programming**

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

0.00 A

**TRANSBORDO**

Variable -->	x12	x17	x37	x31	x72	x75	x57	x62	x65	x56	x54	Direction	R. H. S.
Minimize	20	3	9	30	40	10	10	8	4	4	2		
Estación 1	1	1										=	50000
Estación 2			1	1								=	60000
Estación 3	1				1			1				=	90000
Estación 4				1		-1	-1	1			1	=	20000
Estación 5		1	1									=	0
Estación 6									-1	-1	1	=	0
Estación 7							1	-1		1	-1	=	0
LowerBound	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
UpperBound	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M		
VariableType	Continuous												

**Linear and Integer Programming**

File Format Results Utilities Window Help

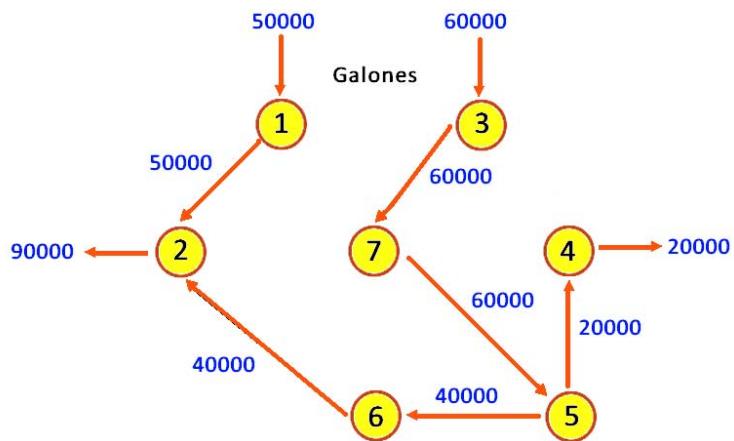
0.00 A

**Combined Report for TRANSBORDO**

	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(i)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(i)	Allowable Max. c(i)
1	x12	50.000.0000	20,000	1.000.000.0000	0	basic	-M	25,0000
2	x17	0	3,0000	0	5,0000	at bound	-2,0000	M
3	x37	60.000.0000	9,0000	540.000.0000	0	basic	-2,0000	18,0000
4	x31	0	30,0000	0	9,0000	at bound	21,0000	M
5	x72	0	40,0000	0	18,0000	at bound	22,0000	M
6	x75	60.000.0000	10,0000	600.000.0000	0	basic	5,0000	19,0000
7	x57	0	10,0000	0	20,0000	at bound	-10,0000	M
8	x62	40.000.0000	8,0000	320.000.0000	0	basic	3,0000	26,0000
9	x65	0	4,0000	0	8,0000	at bound	-4,0000	M
10	x56	40.000.0000	4,0000	160.000.0000	0	basic	-1,0000	22,0000
11	x54	20.000.0000	2,0000	40.000.0000	0	basic	-M	11,0000
	Objective Function	(Min.) =	2.660.000.0000					
	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
1	Estación 1	50.000.0000	=	50.000.0000	0	-11,0000	50.000.0000	90.000.0000
2	Estación 2	60.000.0000	=	60.000.0000	0	0	60.000.0000	M
3	Estación 3	90.000.0000	=	90.000.0000	0	31,0000	50.000.0000	90.000.0000
4	Estación 4	20.000.0000	=	20.000.0000	0	21,0000	0	20.000.0000
5	Estación 5	0	=	0	0	9,0000	-60.000.0000	0
6	Estación 6	0	=	0	0	23,0000	-40.000.0000	0
7	Estación 7	0	=	0	0	19,0000	-60.000.0000	0

El coste óptimo es de 2.660.000 unidades monetarias.

Representación gráfica de la solución:





# **PROBLEMA DEL TRANSPORTE**







## ASIGNACIÓN: Assignment Problem

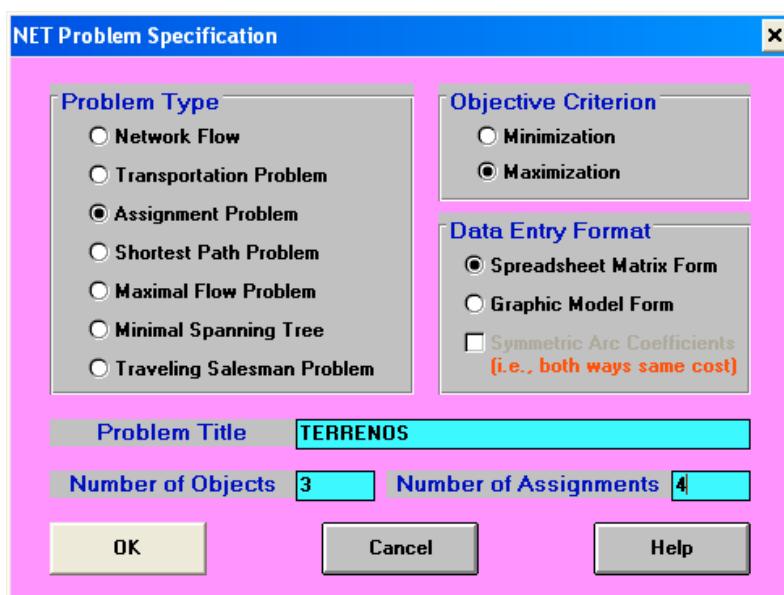
Una compañía cafetera dispone de cuatro terrenos, dependiendo de su ubicación tiene condiciones particulares de rendimiento. La compañía dispone de tres equipos.

¿Cuál será la asignación de los equipos, dependiendo de la capacidad de cosecha (cientos de sacos de café), para maximizar el rendimiento?

	Terreno 1	Terreno 2	Terreno 3	Terreno 4
Equipo A	13	7	12	12
Equipo B	10	13	15	7
Equipo C	13	10	8	8

Para aplicar el método húngaro el número de filas y el de columnas debe de ser igual. En consecuencia, hay que crear un **Equipo Ficticio** y asignarle un número de sacos cosechados equivalente a cero en cada uno de los terrenos.

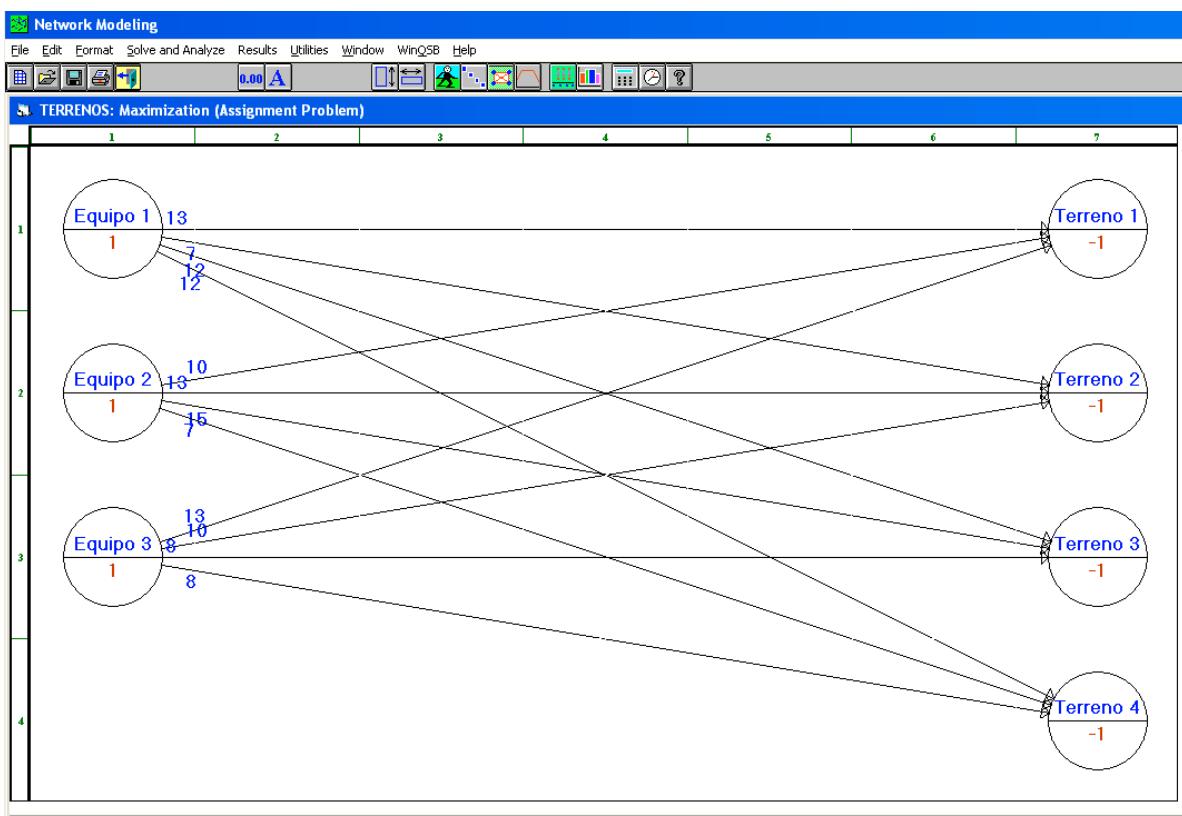
No obstante, la empresa cafetera ha previsto que uno de los equipos se encargase de dos terrenos. En este caso, se puede crear un Equipo B Bis, prescindiendo del Equipo Ficticio, con la misma capacidad de cosecha que el Equipo B.



Introducidos los datos se puede pasar a forma gráfica con la opción **Format / Switch to Graphic**

From \ To	Terreno 1	Terreno 2	Terreno 3	Terreno 4
Equipo 1	13	7	12	12
Equipo 2	10	13	15	7
Equipo 3	13	10	8	8

Los nodos tienen el valor 1 en cada uno de los equipos y  $-1$  en cada una de los terrenos. Sobre cada arco se indica el coste asociado a la asignación de cada equipo a cada terreno.



La asignación óptima se resuelve con el método Húngaro.

	Terreno 1	Terreno 2	Terreno 3	Terreno 4
Equipo 1	0	6	1	1
Equipo 2	5	2	0	8
Equipo 3	0	3	5	5
Dummy	0	0	0	0

**Network Modeling**

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

Solve the Problem

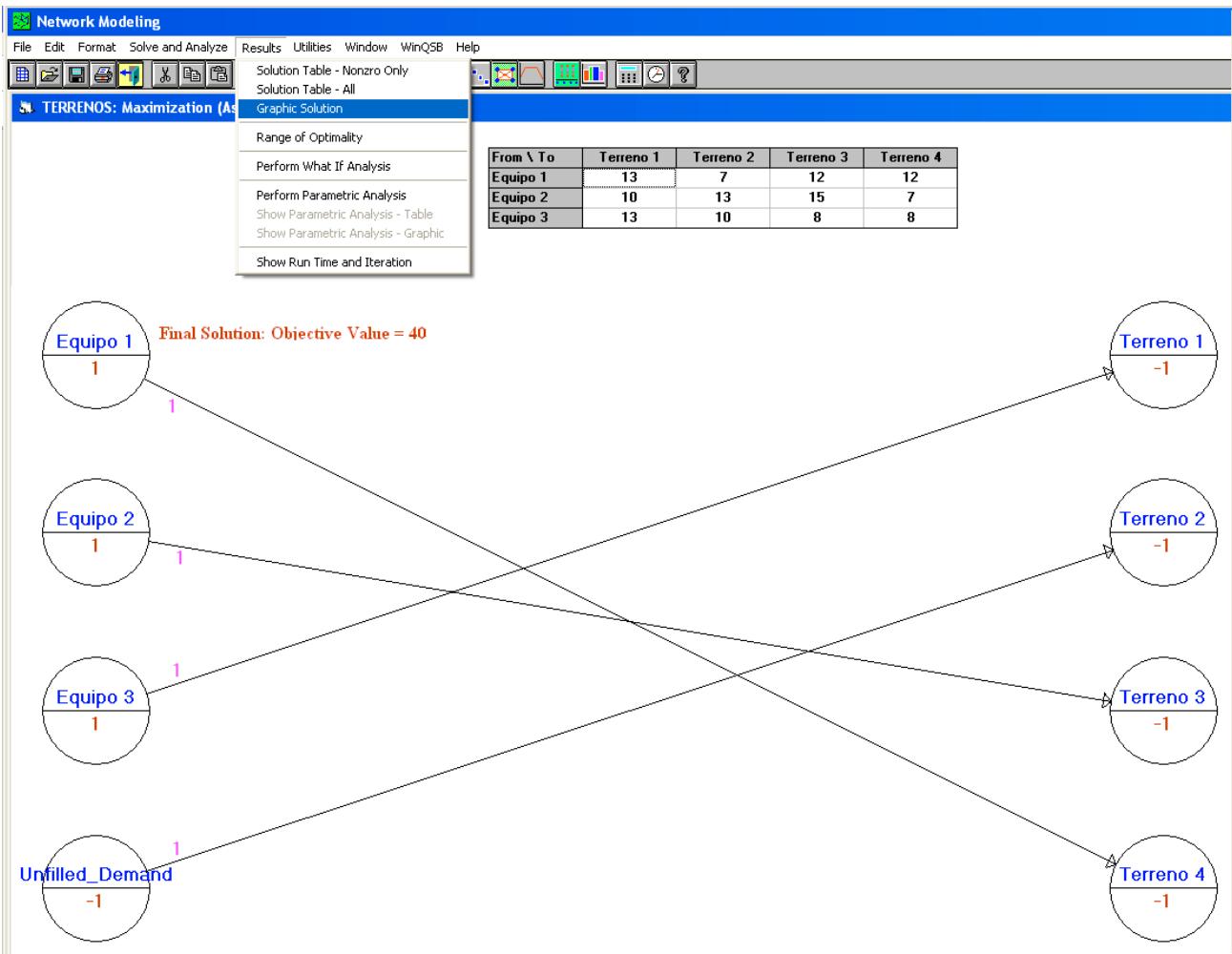
Solve and Display Steps - Network  
Solve and Display Steps - Tableau  
Select Initial Solution Method

Perform What If Analysis  
Perform Parametric Analysis

From \ To	Terreno 1	Terreno 2	Terreno 3	Terreno 4
Equipo 1	13	7	12	12
Equipo 2	10	13	15	7
Equipo 3	13	10	8	8

	From	To	Assignment	Unit Profit	Total Profit	Reduced Cost
1	Equipo 1	Terreno 4	1	12	12	0
2	Equipo 2	Terreno 3	1	15	15	0
3	Equipo 3	Terreno 1	1	13	13	0
4	Unfilled_Demand	Terreno 2	1	0	0	0
	Total	Objective	Function	Value =	40	

### La resolución gráfica con la asignación óptima: Results / Graphic Solution





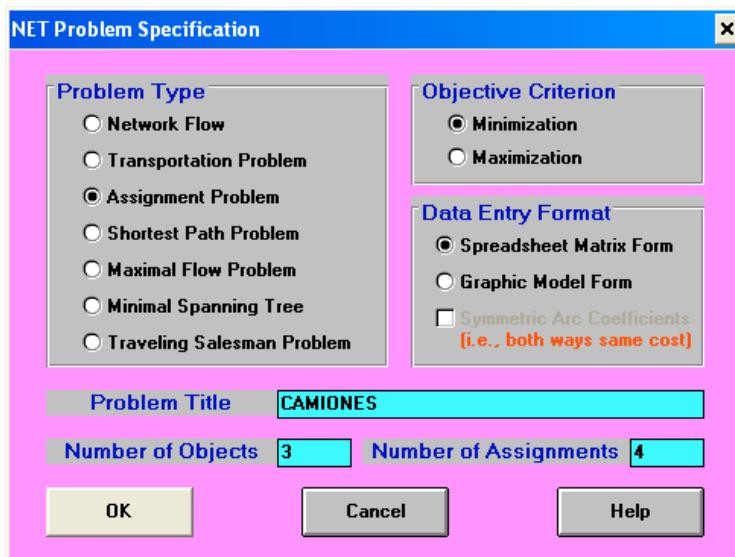


## ASIGNACIÓN: Assignment Problem

Una empresa de transportes dispone de cuatro modelos diferentes de camiones. Dependiendo de la pericia del conductor, el camión consume más o menos combustible. En la actualidad la plantilla tiene tres conductores. En la tabla aparecen los costes en euros por uso adicional de combustible. ¿Qué asignación minimiza los costes de combustible adicional?

	Camión 1	Camión 2	Camión 3	Camión 4
Conductor A	180	150	200	200
Conductor B	250	305	450	500
Conductor C	200	208	320	100

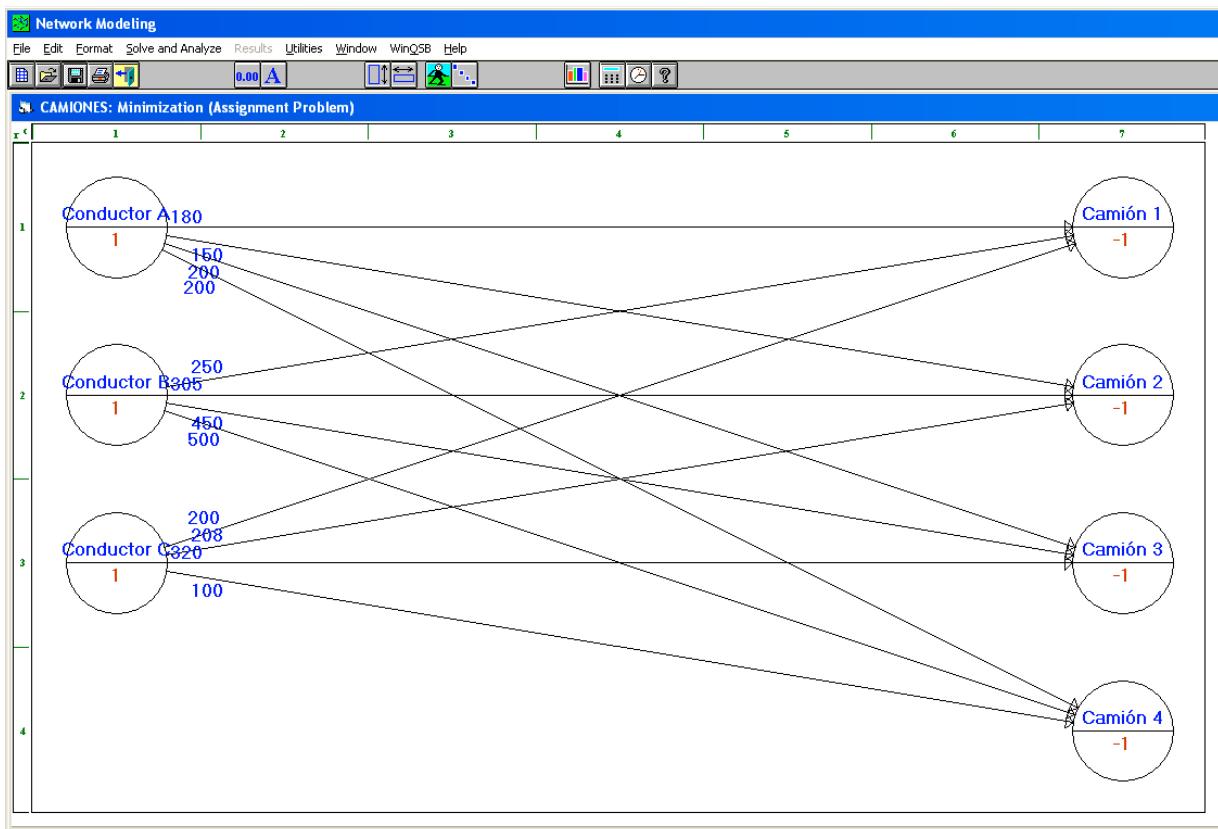
Para aplicar el método Húngaro el número de filas y el de columnas debe ser igual. En consecuencia, hay que crear un Conductor Ficticio ([Dummy](#)) y asignarle un número adicional de combustible equivalente a cero en cada uno de los camiones, para que de esta manera no afecte el resultado de la función objetivo.



Introducidos los datos se puede pasar a forma gráfica con la opción [Format / Switch to Graphic](#)

From \ To	Camión 1	Camión 2	Camión 3	Camión 4
Conductor A	180	150	200	200
Conductor B	250	305	450	500
Conductor C	200	208	320	100

Los nodos tienen el valor 1 en cada uno de los conductores y  $-1$  en cada una de los camiones. Sobre cada arco se indica el coste asociado a la asignación de cada equipo a cada terreno.



La asignación óptima por el método Húngaro: [Solve and Analyze / Solve and Display Steps](#)

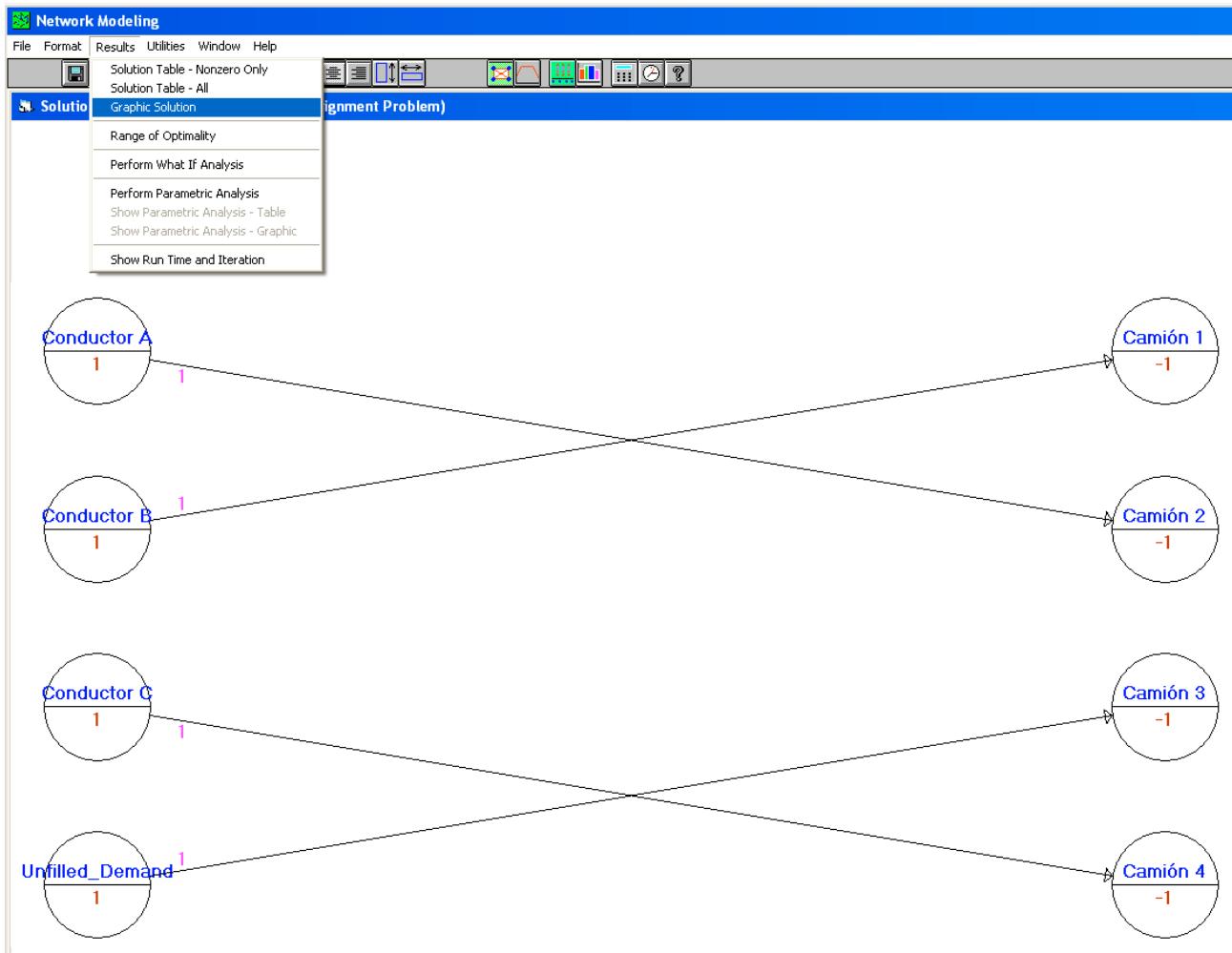
	Camión 1	Camión 2	Camión 3	Camión 4
Conductor A	30	0	50	50
Conductor B	0	55	200	250
Conductor C	100	108	220	0
Dummy	0	0	0	0

**Network Modeling**

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

	From	To	Assignment	Unit Cost	Total Cost	Reduced Cost
1	Conductor A	Camión 2	1	150	150	0
2	Conductor B	Camión 1	1	250	250	0
3	Conductor C	Camión 4	1	100	100	0
4	Unfilled_Demand	Camión 3	1	0	0	0
	Total	Objective	Function	Value =	500	

La resolución gráfica con la asignación óptima: [Results / Graphic Solution](#)







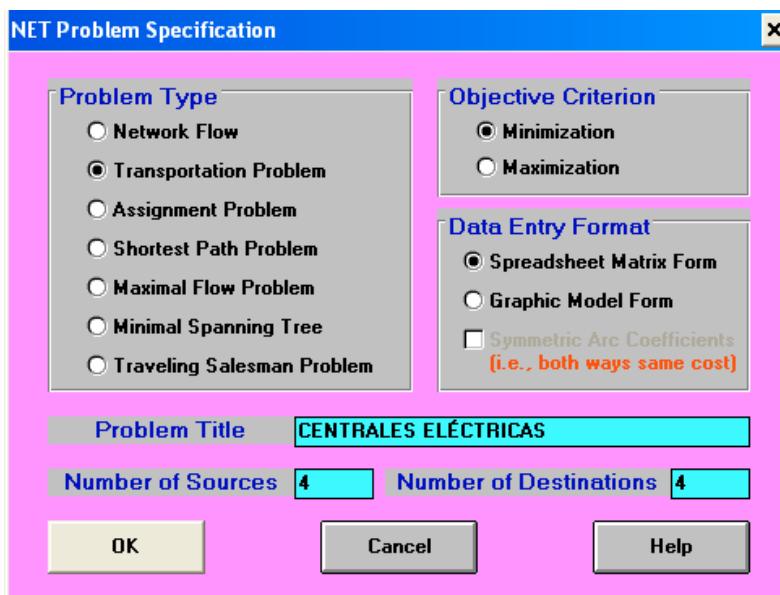


## PROBLEMA TRANSPORTE: MÉTODOS HEURÍSTICOS

La tabla adjunta refleja el costo asociado al envío de suministro eléctrico por cada millón de Kw entre cada central y cada ciudad. Se requiere calcular el mínimo coste.

	Ciudad A	Ciudad B	Ciudad C	Ciudad D	Oferta
Central 1	5	2	7	3	80
Central 2	3	6	6	1	30
Central 3	6	1	2	4	60
Central 4	4	3	6	6	45
Demanda	70	40	70	35	

Para acceder a Transporte Asignación se ejecuta el módulo **Network Modeling (NET)** de Winqs. Aparece la siguiente ventana:



Se introducen los datos y se personaliza con [Edit / Node Names](#)

From \ To	Ciudad A	Ciudad B	Ciudad C	Ciudad D	Supply
Central 1	5	2	7	3	80
Central 2	3	6	6	1	30
Central 3	6	1	2	6	60
Central 4	4	3	6	6	45
Demand	70	40	70	35	



[Solve the Problem:](#) Muestra el resultado óptimo



[Solve and Display Steps-Network:](#) Resuelve el problema mostrando las distintas redes o grafos hasta obtener la solución óptima.



Solve and Display Steps-Tableau: Resuelve el problema mostrando las distintas tablas solución hasta obtener la solución óptima.

Network Modeling

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

43: Minimization (Transportation Problem)

From \ To	Ciudad A	Ciudad B	Ciudad C	Ciudad D	Supply
Central 1	5	2	7	3	80
Central 2	3	6	6	1	30
Central 3	6	1	2	6	60
Central 4	4	3	6	6	45
Demand	70	40	70	35	

	From	To	Shipment	Unit Cost	Total Cost	Reduced Cost
1	Central 1	Ciudad A	5	5	25	0
2	Central 1	Ciudad B	40	2	80	0
3	Central 1	Ciudad D	35	3	105	0
4	Central 2	Ciudad A	30	3	90	0
5	Central 3	Ciudad C	60	2	120	0
6	Central 4	Ciudad A	35	4	140	0
7	Central 4	Ciudad C	10	6	60	0
	Total	Objective	Function	Value =	620	

The diagram illustrates the transportation network. Nodes are labeled 1 through 7. Origins are Central 1 (5), Central 2 (3), Central 3 (6), and Central 4 (4). Destinations are Ciudad A (70), Ciudad B (40), Ciudad C (70), and Ciudad D (35). Arcs represent shipping routes with their respective costs:

- Central 1 to Ciudad A: 5 (cost 5)
- Central 1 to Ciudad B: 40 (cost 2)
- Central 1 to Ciudad D: 35 (cost 3)
- Central 2 to Ciudad A: 30 (cost 3)
- Central 3 to Ciudad C: 60 (cost 2)
- Central 4 to Ciudad A: 35 (cost 4)
- Central 4 to Ciudad C: 10 (cost 6)

Each node also displays its supply/demand status: Central 1 has supply 80/0, Central 2 has supply 30/0, Central 3 has supply 60/5, and Central 4 has supply 45/1. Ciudad A has demand 70/5, Ciudad B has demand 40/2, Ciudad C has demand 70/7, and Ciudad D has demand 35/3.

Con el icono **Solve the Problem** se obtiene la solución óptima del modelo de transporte.

Sin embargo, también se obtienen los resultados que ofrecen los métodos heurísticos como:

Método de la Esquina Noroeste (NWC), Método del Mínimo Coste (MM) y Método de Aproximación de Vogel (VAM).

A métodos heurísticos se accede con la pestaña:  
**Solve and Analyze / Select Initial Solution Method**

From \ To	Ciudad A	Ciudad B	Ciudad C	Ciudad D	Supply
Central 1	5	2	7	3	80
Central 2	3	6	6	1	30
Central 3	6	1	2	6	60
Central 4	4	3	6	6	45
Demand	70	40	70	35	

Seleccionando el método de la Esquina Noroeste (NWC) se procede a ejecutar la opción  
**Solve and Analyze / Solve and Display Steps-Tableau**

Para visualizar la asignación: **Solve and Analyze / Solve and Display -Network**

**Solve and Display Steps - Tableau**

	Ciudad A	Ciudad B	Ciudad C	Ciudad D	
Central 1	5	2	7	3	
	70	10			
Central 2	3	6	6	1	
		30*	0		
Central 3	6	1	2	6	
			60		
Central 4	4	3	6	6	
			10	35	

Objective Value = 940 (Minimization,

\*\* Entering: Central 2 to Ciudad A \* Leaving: Central 2 to Ciudad B

**Solve and Display Steps - Network**

## MÉTODO MM: Solve and Analyze / Select Initial Solution Method

The screenshot shows the WinQSB interface with the 'Solve and Analyze' menu open. A sub-menu 'Select Initial Solution Method' is displayed, listing eight different methods for solving the problem. The 'Matrix Minimum (MM)' option is selected. Below the list are buttons for 'OK', 'Solve', 'Cancel', and 'Help'.

From \ To	Ciudad A	Ciudad B	Ciudad C	Ciudad D	Supply
Central 1	5	2	7	3	80
Central 2	3	6	6	1	30
Central 3	6	1	2	6	60
Central 4	4	3	6	6	45
Demand	70	40	70	35	

Seleccionando el método de Mínimo Costo (MM) se procede a ejecutar la opción  
Solve and Analyze / Solve and Display Steps-Tableau

Para visualizar la asignación: Solve and Analyze / Solve and Display -Network

The screenshot shows the WinQSB interface with the 'Solve and Display Steps - Tableau' and 'Solve and Display Steps - Network' sections highlighted. The Tableau section displays the assignment matrix and the objective value. The Network section shows a directed graph where nodes represent cities and arcs represent assignments with their corresponding values.

From \ To	Ciudad A	Ciudad B	Ciudad C	Ciudad D	Supply
Central 1	5	2	7	3	80
Central 2	3	6	6	1	30
Central 3	6	1	2	6	60
Central 4	4	3	6	6	45
Demand	70	40	70	35	

**Solve and Display Steps - Tableau**

	Ciudad A	Ciudad B	Ciudad C	Ciudad D
Central 1	5	2	7	3
	25	40	10	5
Central 2	3	6	6	1
			30	
Central 3	6	1	2	6
			60	
Central 4	4	3	6	6
	45			

Objective Value = 620 (Minimization)

**Solve and Display Steps - Network**

## MÉTODO VAM: Solve and Analyze / Select Initial Solution Method

The screenshot shows the WinQSB interface with the 'Solve and Analyze' menu open. The 'Select Initial Solution Method' option is highlighted. A dialog box is displayed with the following options:

- Row Minimum (RM)
- Modified Row Minimum (MRM)
- Column Minimum (CM)
- Modified Column Minimum (MCM)
- Northwest Corner Method (NWC)
- Matrix Minimum (MM)
- Vogel's Approximation Method (VAM)
- Russell's Approximation Method (RAM)

Seleccionado el método de aproximación de Vogel (VAM) se procede a ejecutar la opción  
Solve and Analyze / Solve and Display Steps-Tableau

Para visualizar la asignación: Solve and Analyze / Solve and Display -Network

The screenshot shows the WinQSB interface with the 'Solve and Display Steps - Tableau' and 'Solve and Display Steps - Network' sections visible.

**Solve and Display Steps - Tableau:**

From \ To	Ciudad A	Ciudad B	Ciudad C	Ciudad D	Supply
Central 1	5	2	7	3	80
Central 2	3	6	6	1	30
Central 3	6	1	2	6	60
Central 4	4	3	6	6	45
Demand	70	40	70	35	

**Objective Value = 620 (Minimization)**

**Solve and Display Steps - Network:**

A network diagram showing flows between four locations (Central 1, Central 2, Central 3, Central 4) and four cities (Ciudad A, Ciudad B, Ciudad C, Ciudad D). The flows are represented by arrows with values:

- Central 1 to Ciudad A: 35
- Central 1 to Ciudad B: 40
- Central 1 to Ciudad C: 5
- Central 2 to Ciudad B: 6
- Central 2 to Ciudad C: 6
- Central 2 to Ciudad D: 30
- Central 3 to Ciudad A: 6
- Central 3 to Ciudad B: 1
- Central 3 to Ciudad C: 2
- Central 3 to Ciudad D: 60
- Central 4 to Ciudad A: 4
- Central 4 to Ciudad B: 3
- Central 4 to Ciudad C: 6
- Central 4 to Ciudad D: 6

Al aplicar el método de aproximación Vogel (VAM) se puede obtener una solución alternativa.

Obtenido el resultado óptimo ([Solve the Problem](#)) se accede a la pestaña

**Results / Obtain Alternative Solution**

**Network Modeling**

File Format Results Utilities Window Help

Solution Table - Nonzero Only  
Solution Table - All  
Graphic Solution

**Solutio**

Obtain Alternative Solution

Range of Optimality  
Range of Feasibility

Perform What If Analysis  
Perform Parametric Analysis

Show Parametric Analysis - Table  
Show Parametric Analysis - Graphic

Show Run Time and Iteration

**Optimization Problem)**

	From	To	Shipment	Unit Cost	Total Cost	Reduced Cost
1	Central 1	Ciudad A	35	5	175	0
2	Central 1	Ciudad B	40	2	80	0
3	Central 1	Ciudad D	5	3	15	0
4	Central 2	Ciudad D	30	1	30	0
5	Central 3	Ciudad C	60	2	120	0
6	Central 4	Ciudad A	35	4	140	0
7	Central 4	Ciudad C	10	6	60	0
	Total	Objective	Function	Value =	620	

	From	To	Shipment	Unit Cost	Total Cost	Reduced Cost
1	Central 1	Ciudad A	25	5	125	0
2	Central 1	Ciudad B	40	2	80	0
3	Central 1	Ciudad C	10	7	70	0
4	Central 1	Ciudad D	5	3	15	0
5	Central 2	Ciudad D	30	1	30	0
6	Central 3	Ciudad C	60	2	120	0
7	Central 4	Ciudad A	45	4	180	0
	Total	Objective	Function	Value =	620	

## PROBLEMA DE ASIGNACIÓN

Para cambiar el tipo de problema: [Edit / Problem Type / Assignment Problem](#)

The screenshot shows the WinQSB Network Modeling interface. In the main window, under the 'File' menu, 'Problem Type' is selected. A sub-menu titled 'NET Problem Type' is open, showing various problem types with 'Assignment Problem' selected. Below this, a table for '43: Minimization (Assignment Problem)' is displayed.

From \ To	Ciudad A	Ciudad B	Ciudad C	Ciudad D	Supply
Central 1	5	2	7	3	80
Central 2	3	6	6	1	30
Central 3	6	1	2	6	60
Central 4	4	3	6	6	45
Demand	70	40	70	35	

La asignación óptima por el método Húngaro: [Solve and Analyze / Solve and Display Steps](#)

The screenshot shows the WinQSB Network Modeling interface with the 'Solve and Display Steps' option selected from the 'Solve and Analyze' menu. Below the menu, a table for '43: Minimization (Assignment Problem)' is shown with red lines indicating the Hungarian Method steps for finding the optimal assignment.

From \ To	Ciudad A	Ciudad B	Ciudad C	Ciudad D
Central 1	2	0	4	1
Central 2	1	5	4	0
Central 3	4	0	0	5
Central 4	0	0	2	3

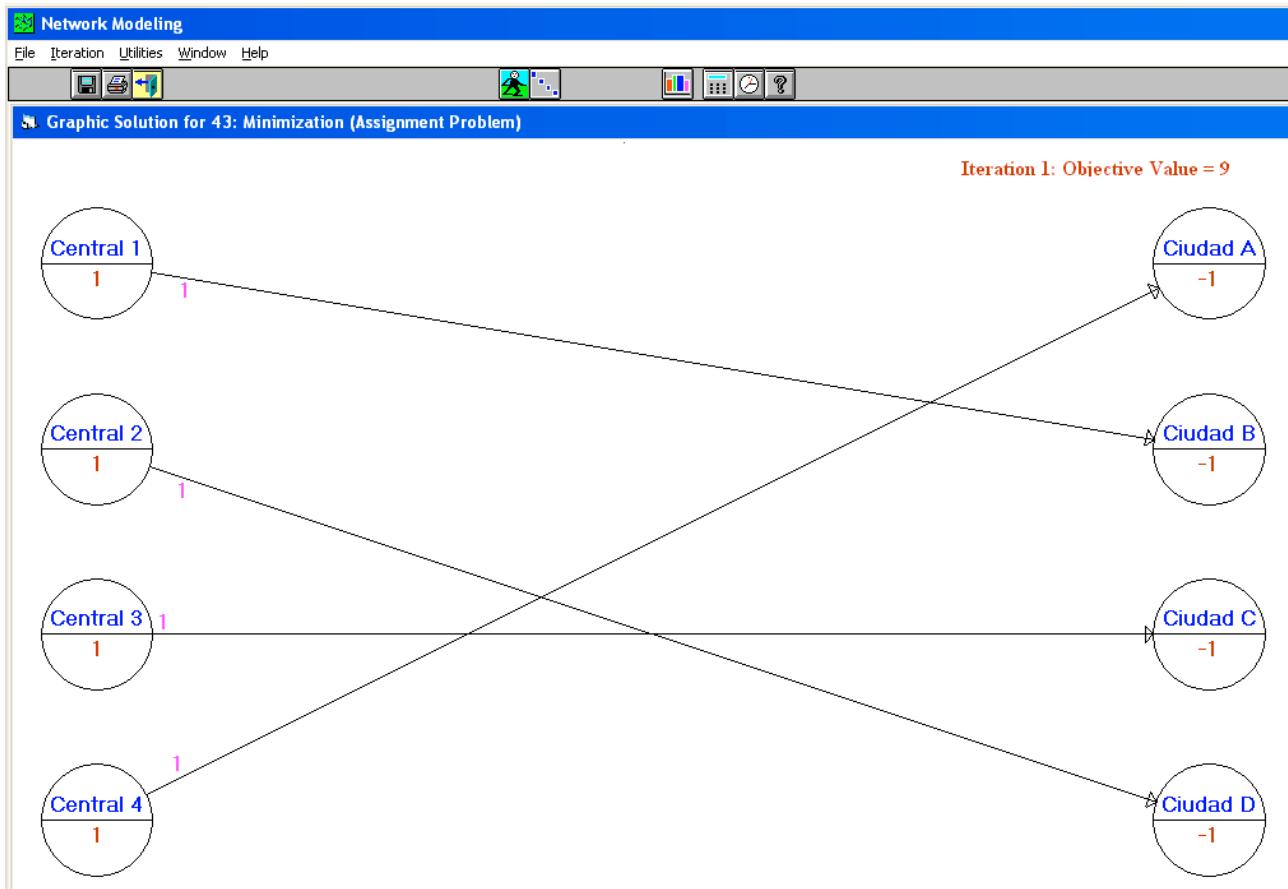
**Network Modeling**

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

43: Minimization (Transportation Problem)

	From	To	Assignment	Unit Cost	Total Cost	Reduced Cost
1	Central 1	Ciudad B	1	2	2	0
2	Central 2	Ciudad D	1	1	1	0
3	Central 3	Ciudad C	1	2	2	0
4	Central 4	Ciudad A	1	4	4	0
	Total	Objective	Function	Value =	9	

La resolución gráfica con la asignación óptima: [Results / Graphic Solution](#)



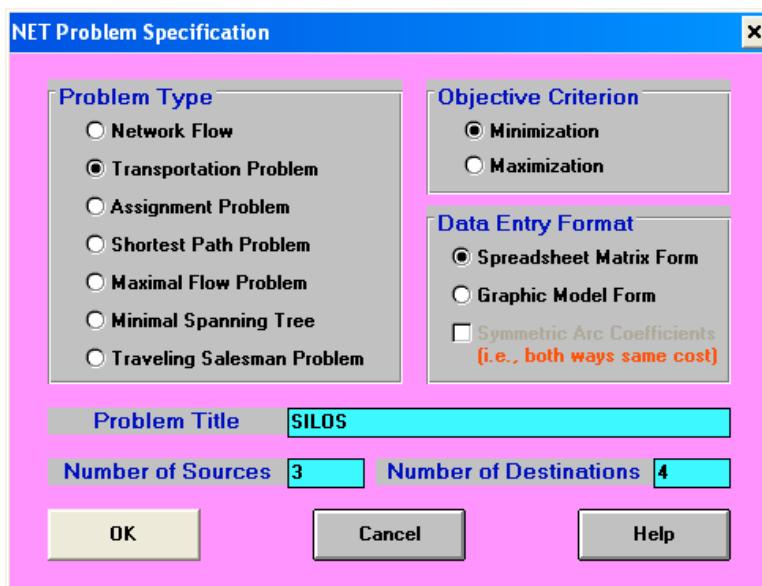




## PROBLEMA TRANSPORTE: MÉTODOS HEURÍSTICOS

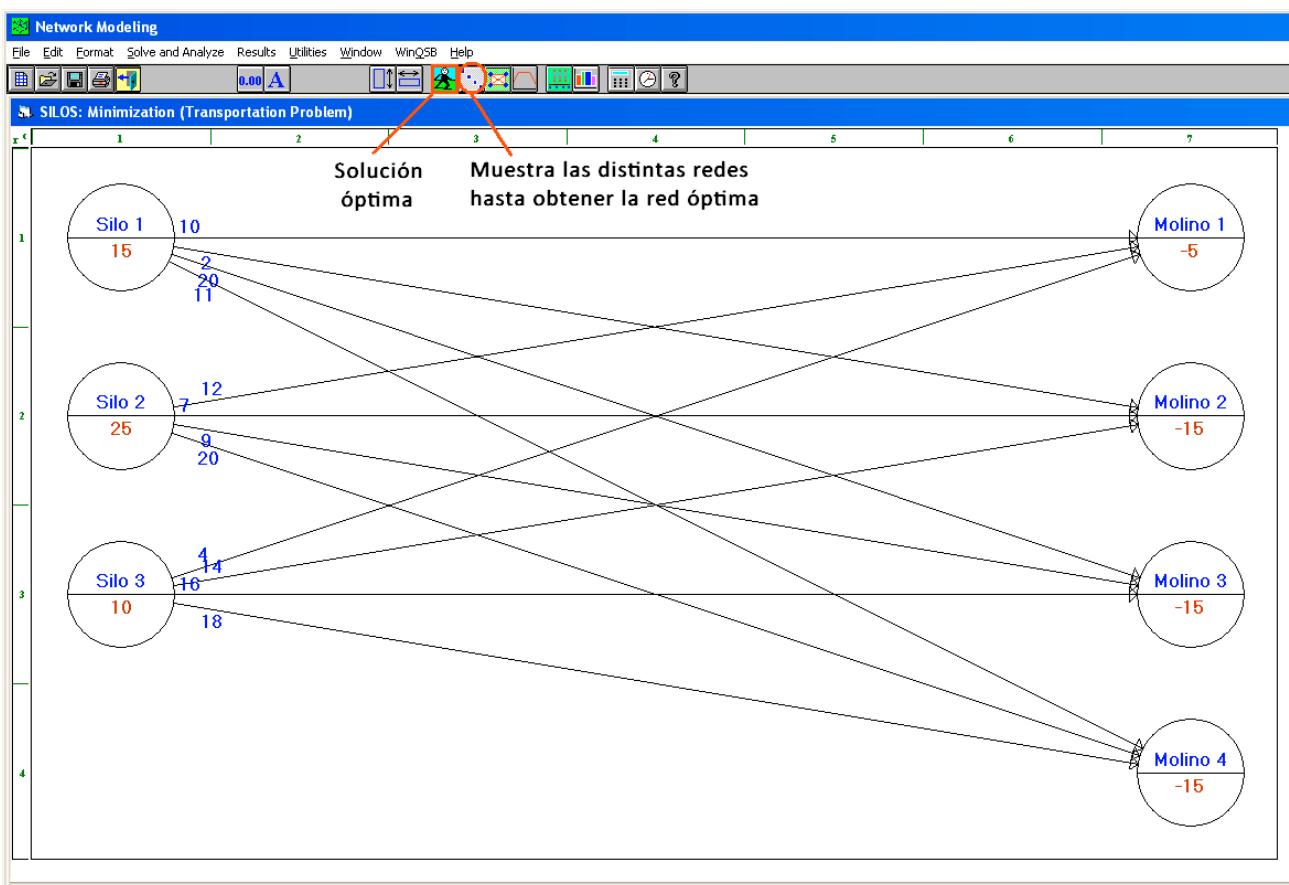
Tres Silos satisfacen la demanda de cuatro Molinos, los costes unitarios del transporte en euros de cada Silo a cada Molino correspondiente aparecen en la tabla adjunta. Obtener el coste mínimo de transporte.

	Molino 1	Molino 2	Molino 3	Molino 4	Oferta
Silo 1	10	2	20	11	15
Silo 2	12	7	9	20	25
Silo 3	4	14	16	18	10
Demanda	5	15	15	15	



Se introducen los datos y se personaliza con [Edit / Node Names](#)

Con la opción [Format / Switch to Graphic Model](#) se obtiene un Gráfico del problema introducido, pudiendo personalizarse.



**Solve the Problem:** Muestra el resultado óptimo



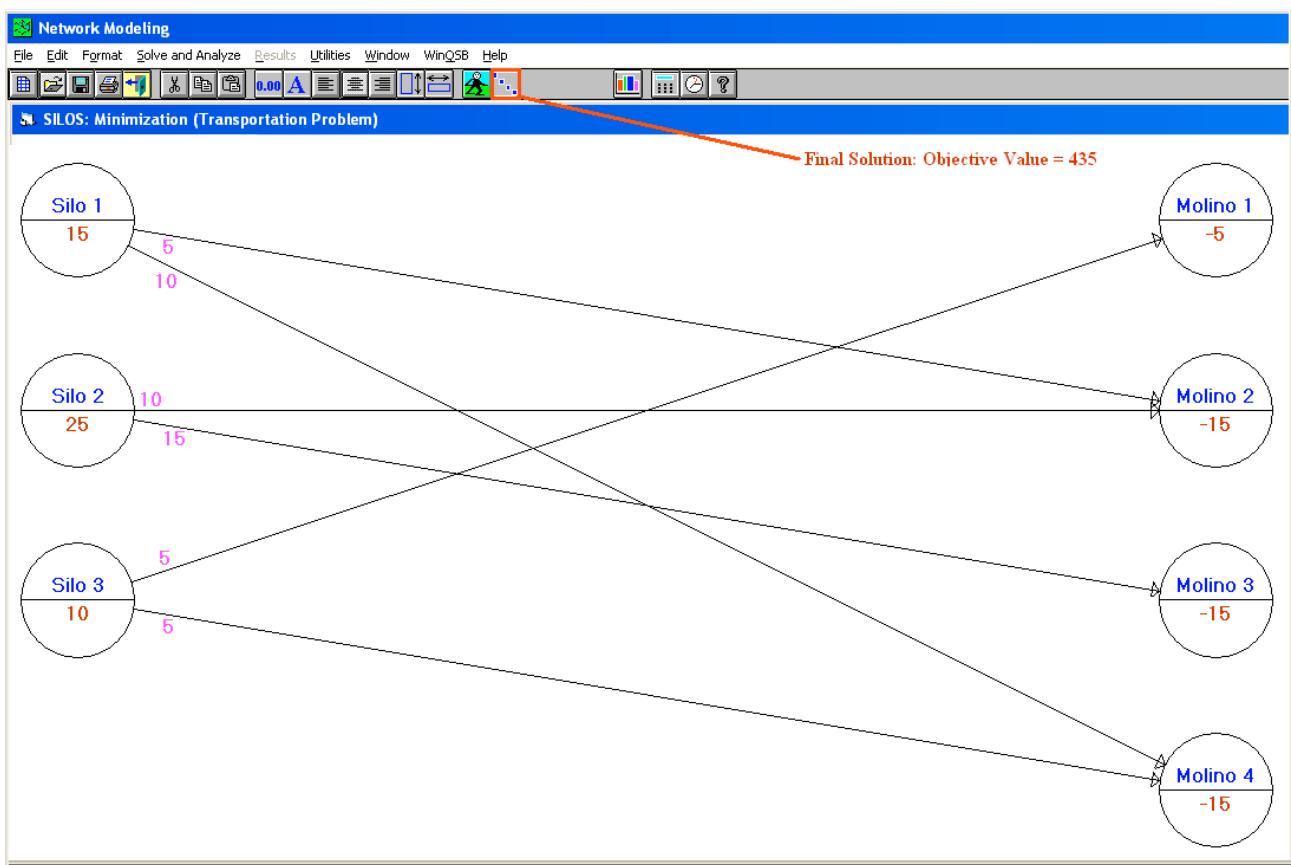
**Solve and Display Steps-Network:** Resuelve el problema mostrando las distintas redes o grafos hasta obtener la solución óptima.

SILOS: Minimization (Transportation Problem)

From \ To	Molino 1	Molino 2	Molino 3	Molino 4	Supply
Silo 1	10	2	20	11	15
Silo 2	12	7	9	20	25
Silo 3	4	14	16	18	10
Demand	5	15	15	15	

	From	To	Shipment	Unit Cost	Total Cost	Reduced Cost
1	Silo 1	Molino 2	5	2	10	0
2	Silo 1	Molino 4	10	11	110	0
3	Silo 2	Molino 2	10	7	70	0
4	Silo 2	Molino 3	15	9	135	0
5	Silo 3	Molino 1	5	4	20	0
6	Silo 3	Molino 4	5	18	90	0
	Total	Objective	Function	Value =	435	



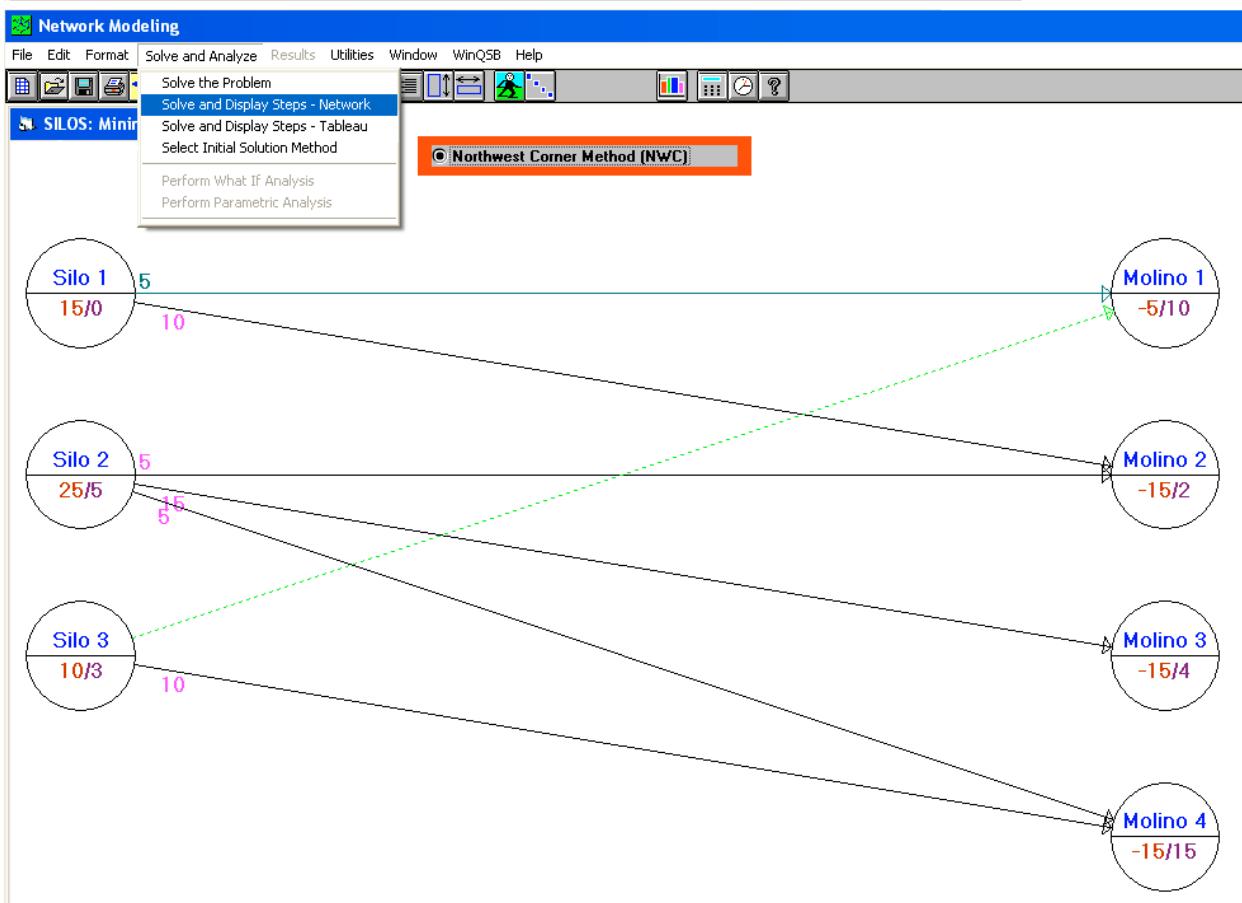
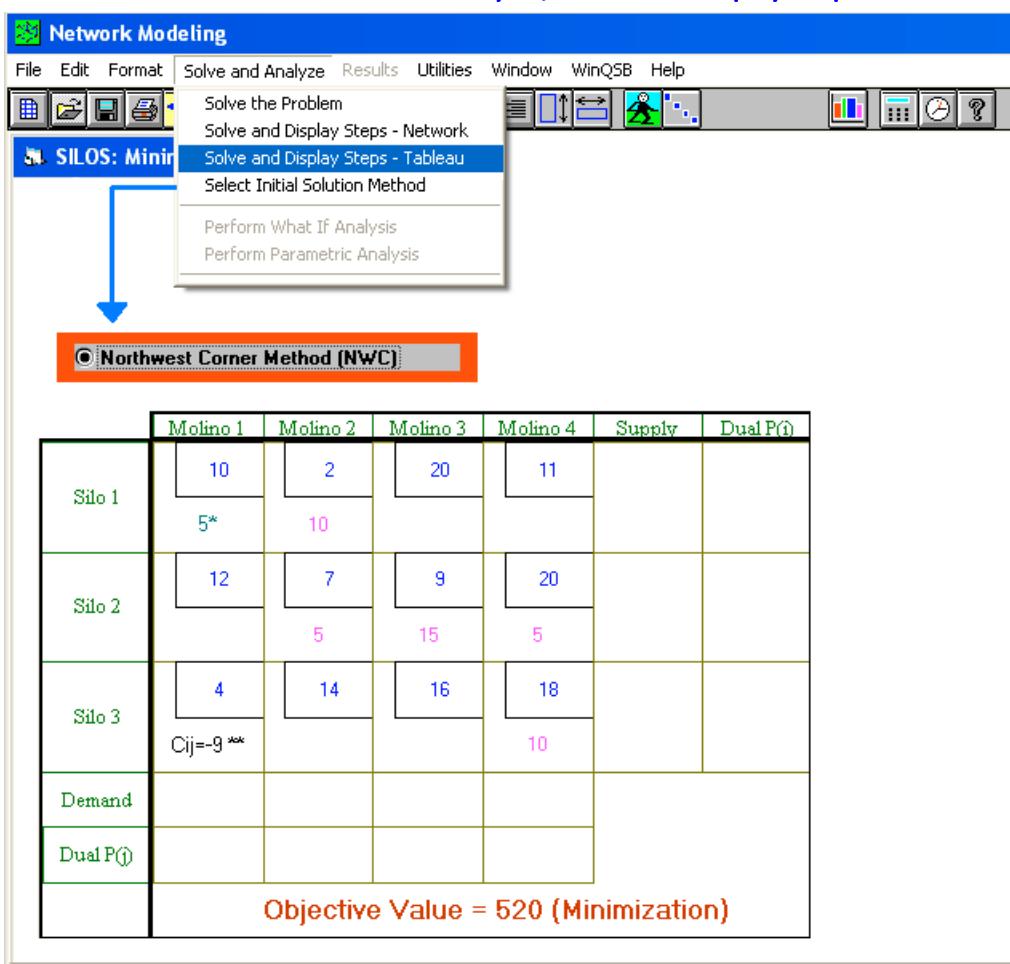
Con el icono **Solve the Problem** se obtiene la solución óptima del modelo de transporte.

A Los resultados que ofrecen los métodos heurísticos como: Método de la Esquina Noroeste (NWC), Método del Mínimo Coste (MM) y Método de Aproximación de Vogel (VAM), se accede con la pestaña: **Solve and Analyze / Select Initial Solution Method**

From \ To	Molino 1	Molino 2	Molino 3	Molino 4	Supply
Silo 1	10	2	20	11	15
Silo 2	12	7	9	20	25
Silo 3	4	14	16	18	10
Demand	5	15	15	15	

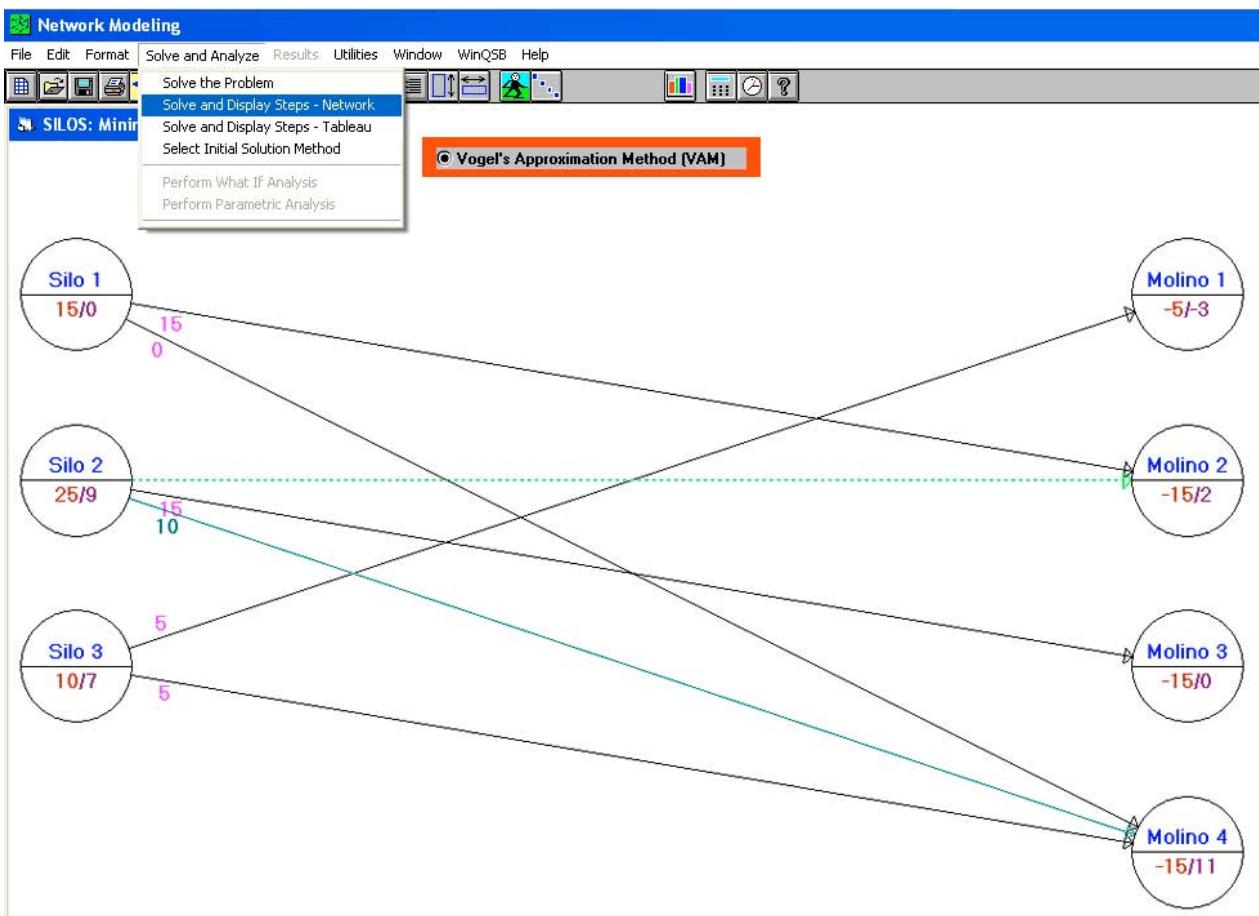
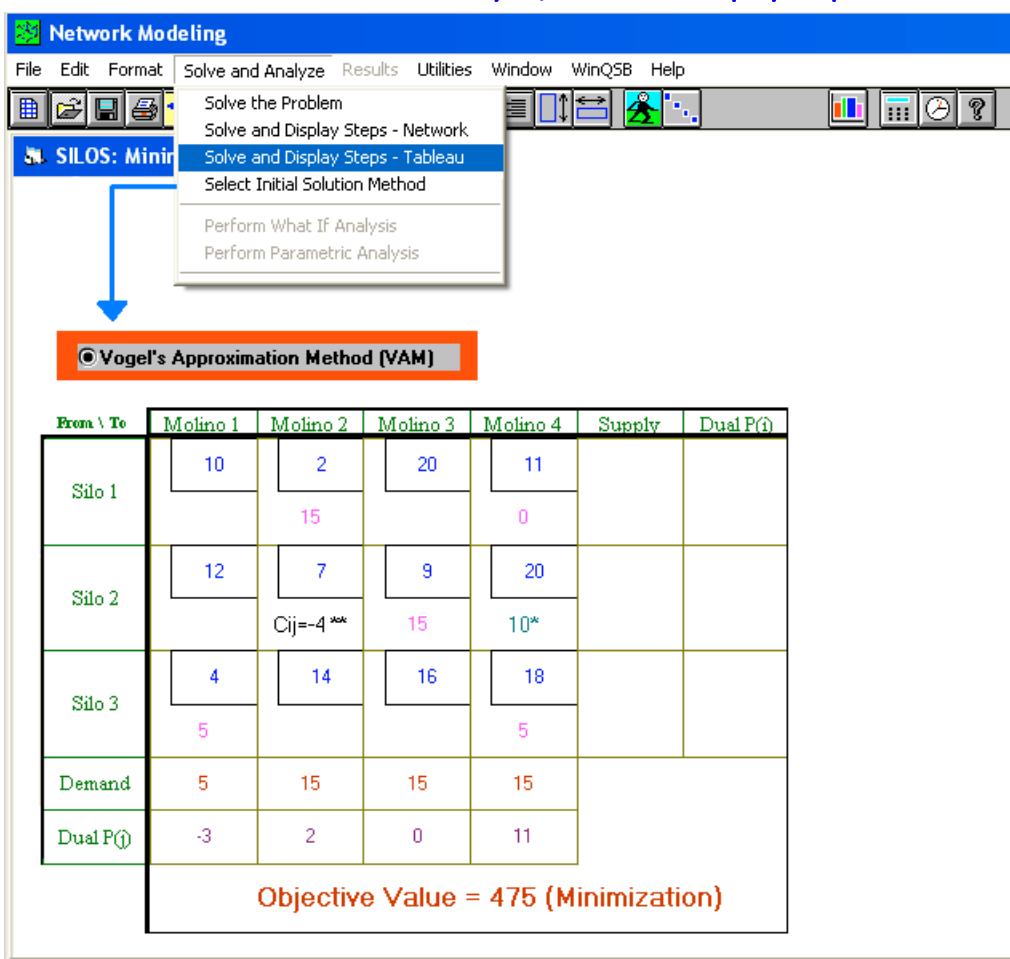
## Solución Método Esquina Noroeste (NWC): Solve and Analyze / Solve and Display Steps-Tableau

### Solución Gráfica NWC: Solve and Analyze / Solve and Display Steps-Network



## Solución Método Aproximación Vogel (VAM): Solve and Analyze / Solve and Display Steps-Tableau

### Solución Gráfica VAM: Solve and Analyze / Solve and Display Steps-Network

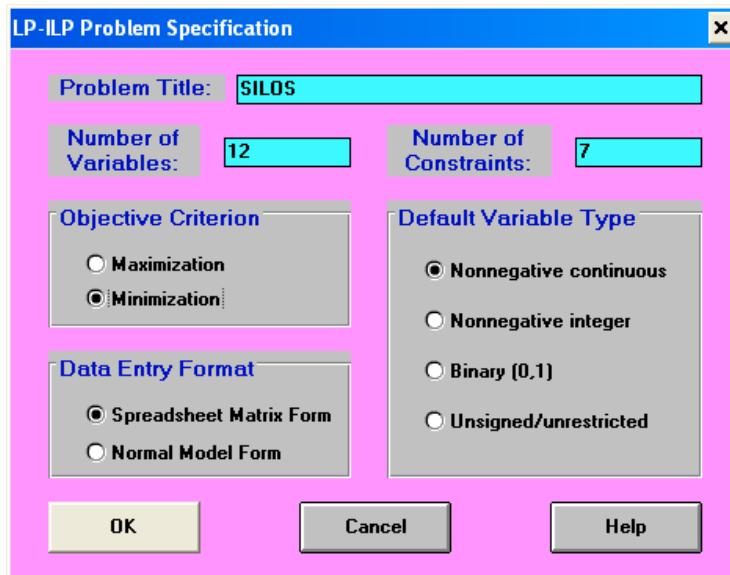


Max.  
Cx  
 $\Delta X \leq b$

## MÉTODO DEL SIMPLEX: COSTE MÍNIMO DEL TRANSPORTE

Coste mínimo de la distribución de Silos a Molinos.

	Molino 1	Molino 2	Molino 3	Molino 4	Oferta
Silo 1	10 $x_{11}$	2 $x_{12}$	20 $x_{13}$	11 $x_{14}$	15
Silo 2	12 $x_{21}$	7 $x_{22}$	9 $x_{23}$	20 $x_{24}$	25
Silo 3	4 $x_{31}$	14 $x_{32}$	16 $x_{33}$	18 $x_{34}$	10
Demandas	5	15	15	15	



Linear and Integer Programming

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

SILOS

Variable -->	x11	x12	x13	x14	x21	x22	x23	x24	x31	x32	x33	x34	Direction	R. H. S.
Minimize	10	2	20	11	12	7	9	20	4	10	16	18	=	15
C1	1	1	1	1		1	1	1					=	25
C2													=	10
C3	1								1	1	1	1	=	5
C5	1				1				1				=	15
C6		1				1				1			=	15
C7			1					1				1	=	15
LowerBound	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
UpperBound	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M		
VariableType	Continuous													

Linear and Integer Programming								
File Format Results Utilities Window Help								
0.00 A								
<b>Combined Report for SILOS</b>								
	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c[i]	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c[i]	Allowable Max. c[i]
1	x <sub>11</sub>	0	10,0000	0	0	basic	-M	M
2	x <sub>12</sub>	5,0000	2,0000	10,0000	0	basic	-2,0000	3,0000
3	x <sub>13</sub>	0	20,0000	0	16,0000	at bound	4,0000	M
4	x <sub>14</sub>	10,0000	11,0000	110,0000	0	basic	10,0000	15,0000
5	x <sub>21</sub>	0	12,0000	0	10,0000	at bound	2,0000	M
6	x <sub>22</sub>	10,0000	7,0000	70,0000	0	basic	2,0000	11,0000
7	x <sub>23</sub>	15,0000	9,0000	135,0000	0	basic	-M	14,0000
8	x <sub>24</sub>	0	20,0000	0	4,0000	at bound	16,0000	M
9	x <sub>31</sub>	5,0000	4,0000	20,0000	0	basic	-M	14,0000
10	x <sub>32</sub>	0	10,0000	0	1,0000	at bound	9,0000	M
11	x <sub>33</sub>	0	16,0000	0	5,0000	at bound	11,0000	M
12	x <sub>34</sub>	5,0000	18,0000	90,0000	0	basic	8,0000	19,0000
	Objective Function	(Min.) =	435,0000					
	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
1	C1	15,0000	=	15,0000	0	6,0000	15,0000	20,0000
2	C2	25,0000	=	25,0000	0	11,0000	25,0000	30,0000
3	C3	10,0000	=	10,0000	0	13,0000	10,0000	15,0000
4	C5	5,0000	=	5,0000	0	-9,0000	2,5000	5,0000
5	C5	15,0000	=	15,0000	0	-4,0000	10,0000	15,0000
6	C6	15,0000	=	15,0000	0	-2,0000	10,0000	15,0000
7	C7	15,0000	=	15,0000	0	5,0000	10,0000	15,0000

El coste mínimo del transporte es de 435 unidades monetarias.

Interpretación del resultado:

$$x_{ij} \equiv x_{\text{origen destino}} : x_{12} = 5 \quad x_{14} = 10 \quad x_{22} = 10 \quad x_{23} = 15 \quad x_{31} = 5 \quad x_{34} = 5$$

	Molino 1	Molino 2	Molino 3	Molino 4	Oferta
Silo 1		2 ( $x_{12} = 5$ )		11 ( $x_{14} = 10$ )	15
Silo 2		7 ( $x_{22} = 10$ )	9 ( $x_{23} = 15$ )		25
Silo 3	4 ( $x_{31} = 5$ )			18 ( $x_{34} = 5$ )	10
Demanda	5	15	15	15	

Función objetivo: 
$$\begin{aligned} z &= 2x_{12} + 11x_{14} + 7x_{22} + 9x_{23} + 4x_{31} + 18x_{34} = \\ &= 2 \times 5 + 11 \times 10 + 7 \times 10 + 9 \times 15 + 4 \times 5 + 18 \times 5 = 435 \end{aligned}$$

Del Silo 1 se envían: 5 unidades al Molino 2 - 10 unidades al Molino 4

Del Silo 2 se envían: 10 unidades al Molino 2 - 15 unidades al Molino 3

Del Silo 3 se envían: 5 unidades al Molino 1 - 5 unidades al Molino 4



# **GESTIÓN DE PROYECTOS**

**PERT - CPM**

**WinQSB**





Un proyecto para diseñar un ordenador consiste en 7 actividades etiquetadas (A, B, . . . , G), la duración (en semanas) y las precedencias se dan adjuntan en la siguiente tabla:

Actividad	Asignación	Predecesores	Tiempos esperados (semanas)		
			Optimista	Más probable	Pesimista
Diseño	A	----	10	22	28
Fabricar prototipo	B	A	4	4	10
Evaluar equipo	C	A	4	6	14
Probar prototipo	D	B	1	2	3
Informe equipo	E	C, D	1	5	9
Informe métodos	F	C, D	7	8	9
Informe final	G	E, F	2	2	2

- Calcular la ruta crítica y las actividades críticas.
- Desarrollar el diagrama de Gantt.
- Probabilidad de completar el proyecto a lo sumo en 35 semanas.

Problem Specification

Problem Title	ORDENADOR	
Number of Activities:	7	
Time Unit:	semanas	
Problem Type	Select CPM Data Field	
<input type="radio"/> Deterministic CPM	<input checked="" type="checkbox"/> Normal Time	
<input checked="" type="radio"/> Probabilistic PERT	<input type="checkbox"/> Crash Time	
<input type="checkbox"/> Normal Cost		
<input type="checkbox"/> Crash Cost		
<input type="checkbox"/> Actual Cost		
<input type="checkbox"/> Percent Complete		
Data Entry Format	Activity Time Distribution: 3-Time estimate Choose Activity Time Distribution	
<input checked="" type="radio"/> Spreadsheet		
<input type="radio"/> Graphic Model		
OK	Cancel	Help

a)

The screenshot shows the PERT/CPM software interface with two tables of project data:

Activity Number	Activity Name	Immediate Predecessor (list number/name, separated by ',')	Optimistic time (a)	Most likely time (m)	Pessimistic time (b)
1	A		10	22	28
2	B	A	4	4	10
3	C	A	4	6	14
4	D	B	1	2	3
5	E	C,D	1	5	9
6	F	C,D	7	8	9
7	G	E,F	2	2	2

	Activity Name	On Critical Path	Activity Mean Time	Earliest Start	Earliest Finish	Latest Start	Latest Finish	Slack (LS-ES)	Activity Time Distribution	Standard Deviation
1	A	Yes	21	0	21	0	21	0	3-Time estimate	3
2	B	Yes	5	21	26	21	26	0	3-Time estimate	1
3	C	Yes	7	21	28	21	28	0	3-Time estimate	1,6667
4	D	Yes	2	26	28	26	28	0	3-Time estimate	0,3333
5	E	no	5	28	33	31	36	3	3-Time estimate	1,3333
6	F	Yes	8	28	36	28	36	0	3-Time estimate	0,3333
7	G	Yes	2	36	38	36	38	0	3-Time estimate	0
	Project Completion	Time	=	38	semanas					
	Number of Critical	Path(s)	=	2						

**On Critical Path:** YES si pertenece a alguna ruta crítica

**Activity Mean Time:** Tiempo Pert

**3-time estímate:** Tiempo Pert utilizando los tiempos optimista, más probable y pesimista.

**Project Completion Time:** Tiempo de terminación del proyecto en 38 semanas

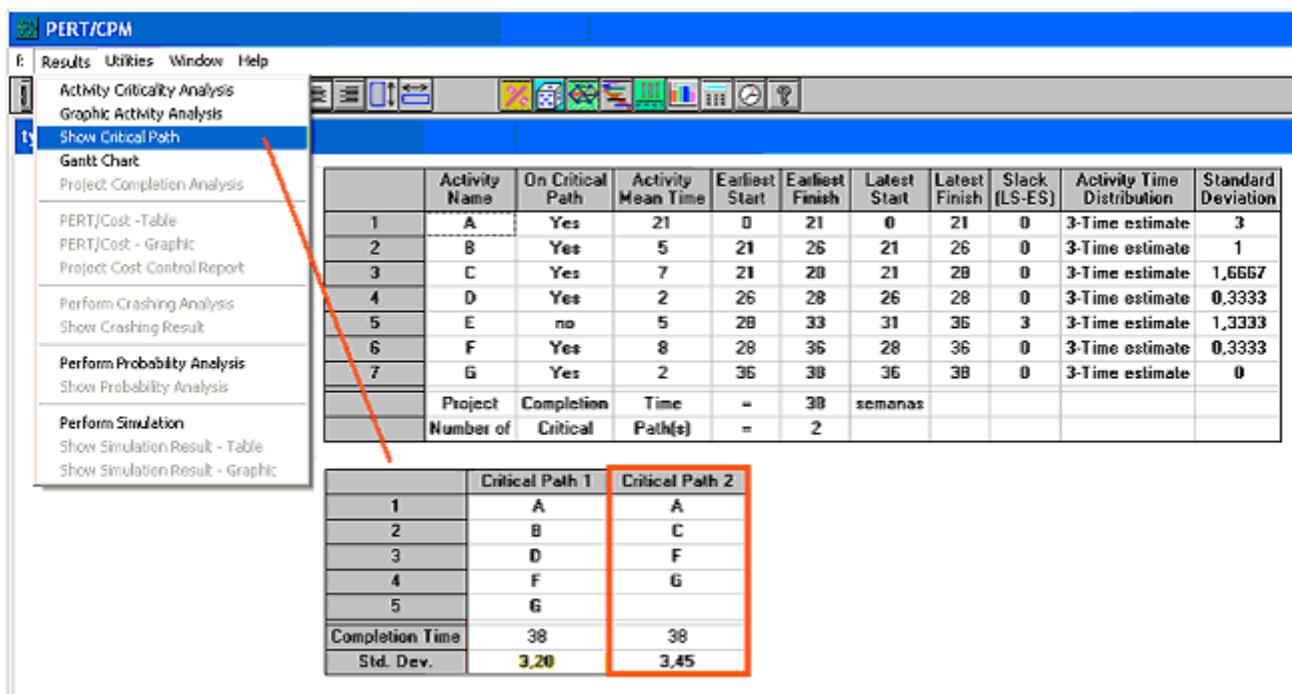
**Number of Critical Path(s):** 2 rutas críticas

Otra forma de acceder al resultado: [Results / Activity Criticalaly Analysis](#)

The screenshot shows the PERT/CPM software interface with the Activity Criticality Analysis table:

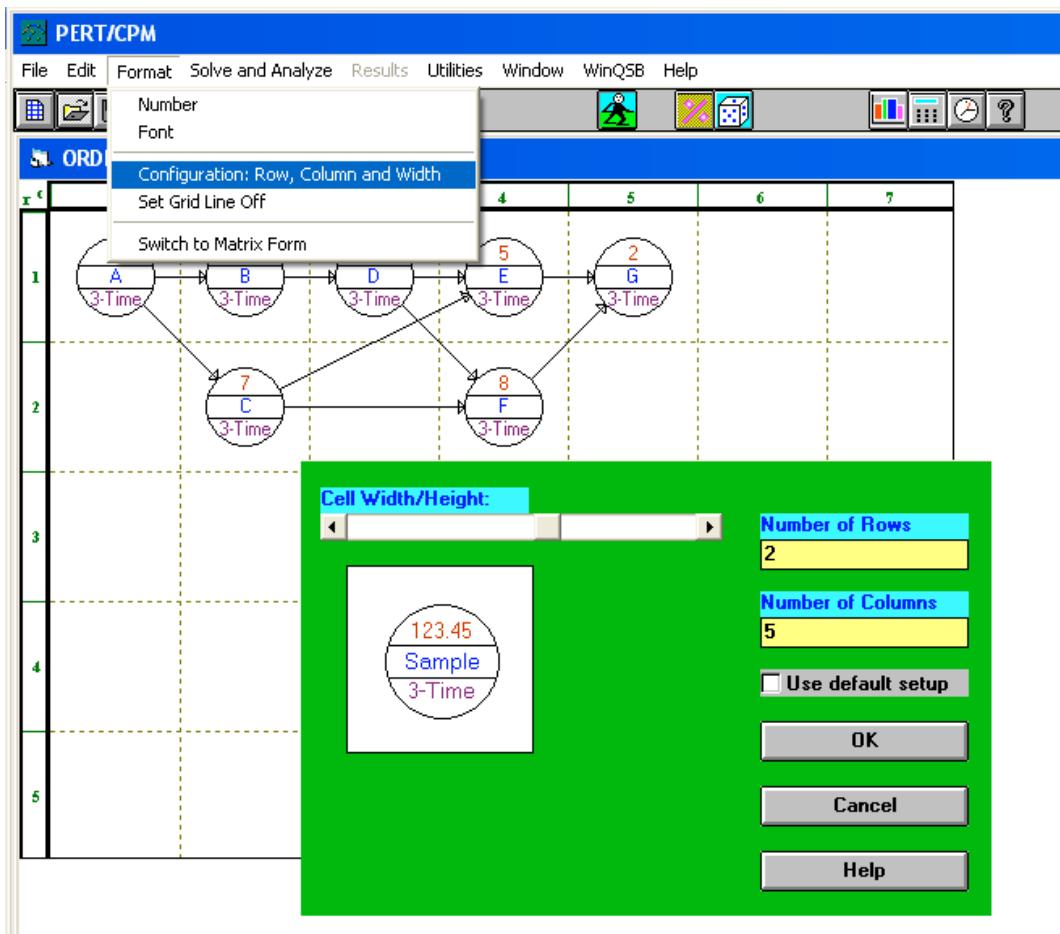
	Activity Name	On Critical Path	Activity Mean Time	Earliest Start	Earliest Finish	Latest Start	Latest Finish	Slack (LS-ES)	Activity Time Distribution	Standard Deviation
1	A	Yes	21	0	21	0	21	0	3-Time estimate	3
2	B	Yes	5	21	26	21	26	0	3-Time estimate	1
3	C	Yes	7	21	28	21	28	0	3-Time estimate	1,6667
4	D	Yes	2	26	28	26	28	0	3-Time estimate	0,3333
5	E	no	5	28	33	31	36	3	3-Time estimate	1,3333
6	F	Yes	8	28	36	28	36	0	3-Time estimate	0,3333
7	G	Yes	2	36	38	36	38	0	3-Time estimate	0
	Project Completion	Time	=	38	semanas					
	Number of Critical	Path(s)	=	2						

## Rutas críticas: Results / Show Critical Path

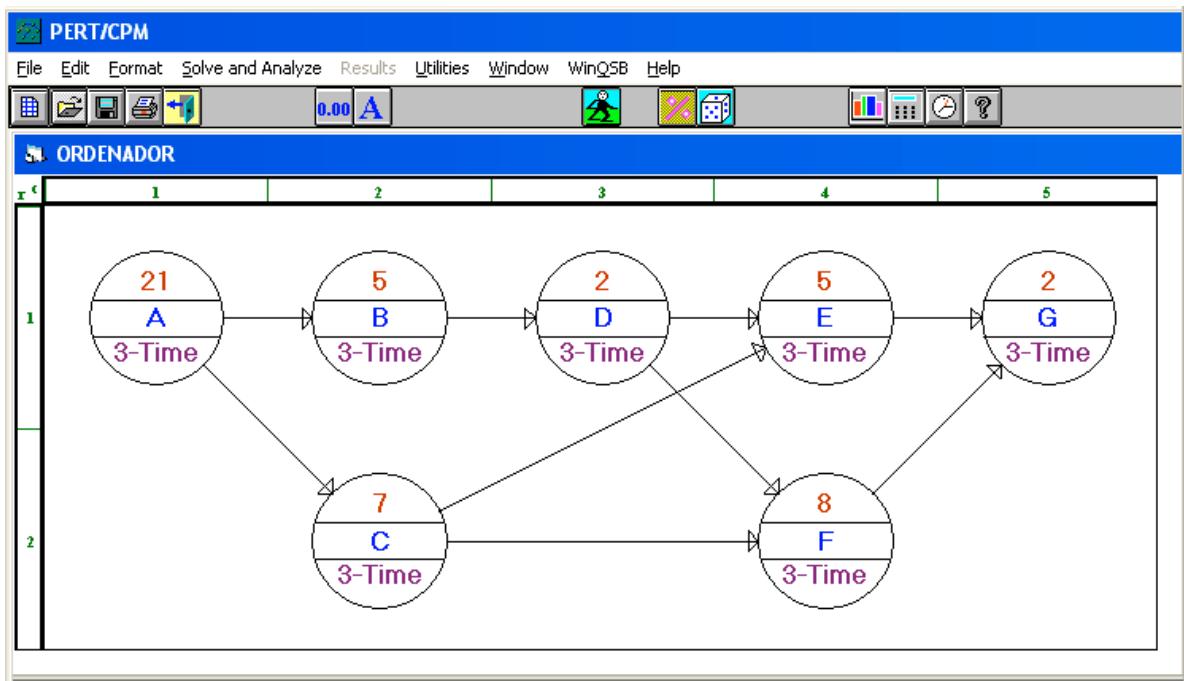


Se elige la ruta crítica (A – C – F – G) que presenta mayor desviación típica

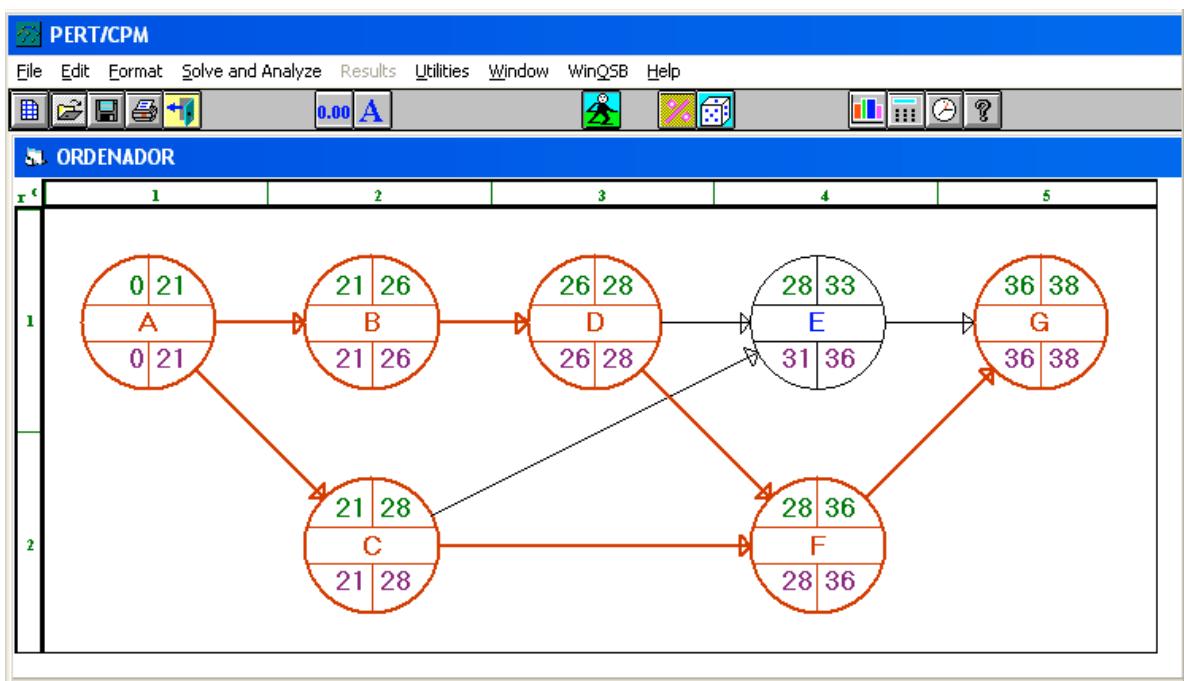
Gráfico: Desde la entrada de datos – Format / Switch Graphic Model



## Personalizar Gráfico: Format / Configuration Row, Column and width

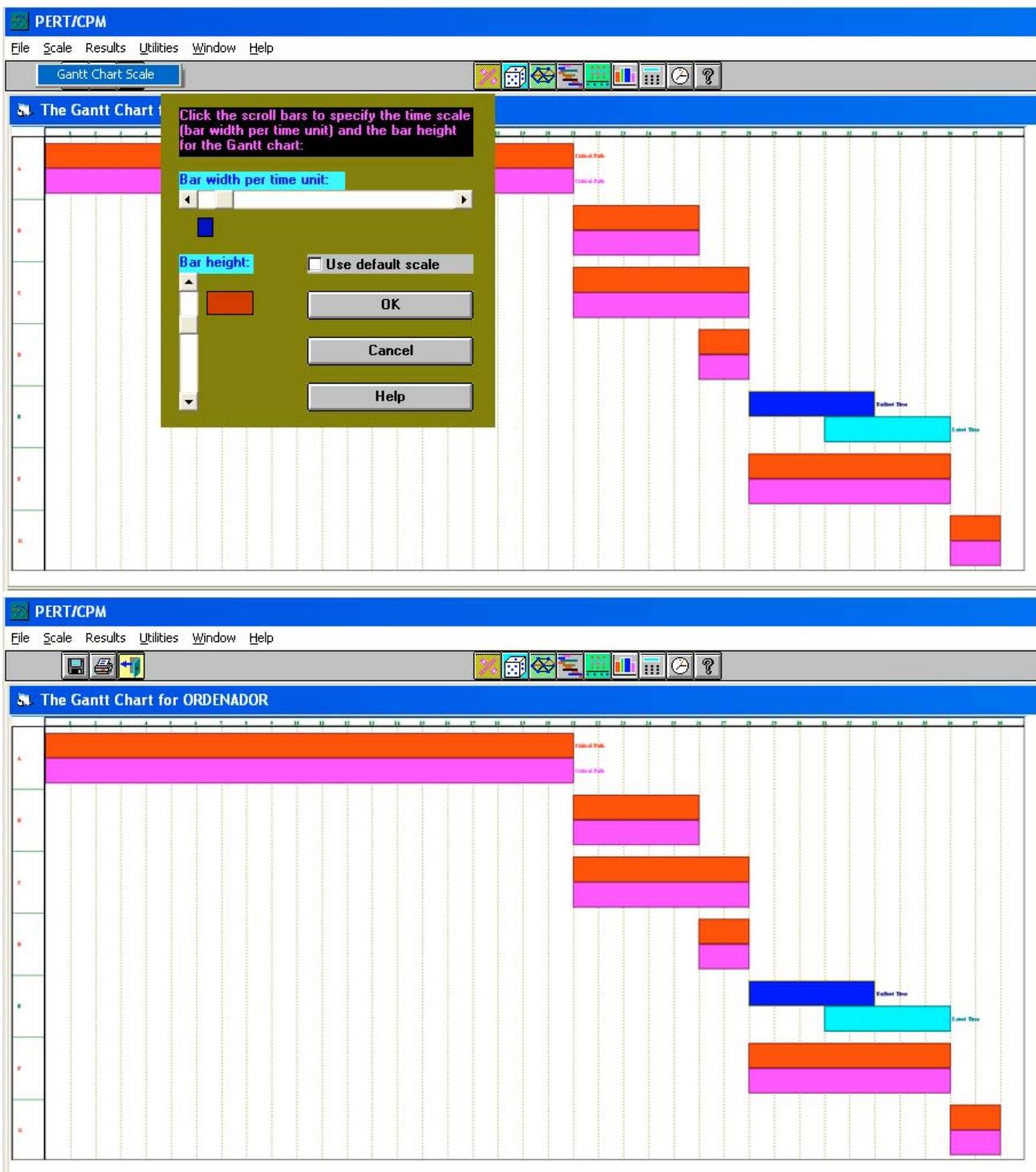


## Rutas críticas: Results / Graphic Activity Analysis



## b) Diagrama de Gantt: Results / Gantt Chart

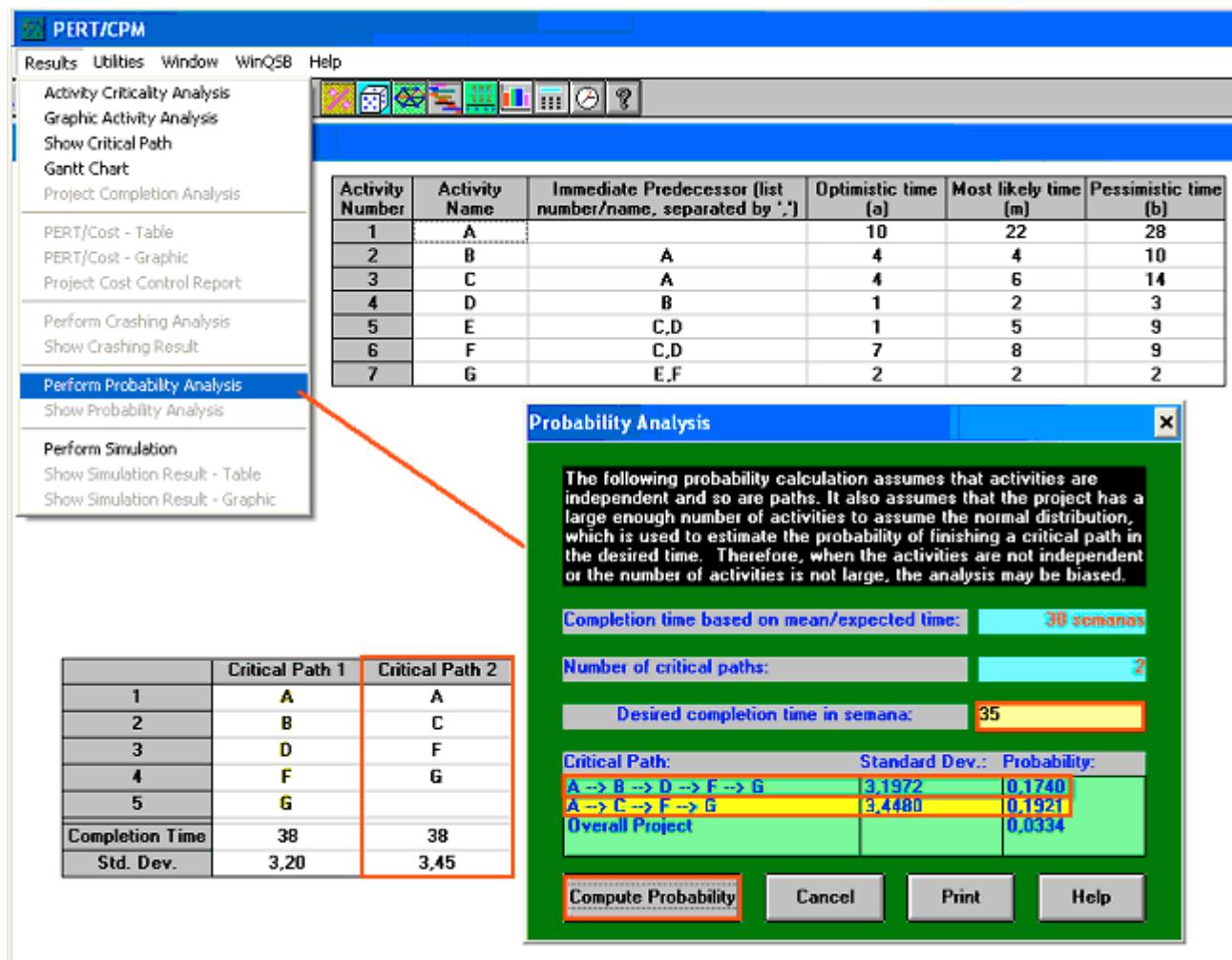
La primera pantalla resulta ilegible, se personaliza Scale / Gantt Chart Scale



Las actividades críticas aparecen en rojo y rosado con la primera y segunda programación de Gantt, la actividad E que no es crítica tiene dos posibles programaciones: azul y celeste.  
Se puede personalizar color y otros aspectos.

c) Probabilidad de completar el proyecto a lo sumo en 35 semanas.

### Results / Perform Probability Analysis



Se elige la segunda ruta crítica (A – C – F – G) con mayor desviación típica  $\sigma_{A-C-F-G} = 3,45$

La distribución del tiempo de finalización del proyecto, según el Teorema Central del Límite, sigue una distribución normal  $N(38, 3,45)$

$$P(X \leq 35) = P\left(z \leq \frac{35 - 38}{3,45}\right) = P(z \leq -0,869) = 0,1921 (19,21\%)$$

La primera ruta crítica (A – B – D – F – G) sigue una distribución normal  $N(38, 3,20)$ :

$$P(X \leq 35) = P(z \leq -0,9375) = P(z \geq 0,9375) = 0,1740 (17,40\%)$$





## GESTIÓN DE PROYECTOS: REDES PERT

Un proyecto aeronáutico consiste en 17 actividades etiquetadas (A, B, . . . , Q), con duración en días. Las precedencias se adjuntan en la siguiente tabla:

Actividad	Precedentes	Duración (días)		
		Optimista	Más probable	Pesimista
A	-	1	1	1
B	-	1	2	3
C	-	2	3	4
D	A	2	4	6
E	A	1	3	5
F	C	1	2	3
G	C	0	1	2
H	D	5	7	9
I	D	6	8	10
J	B, E, F	5	7	15
K	B, E, F	6	7	8
L	G	3	5	7
M	H	1	1	1
N	I, J	1	2	3
O	K, L	2	3	4
P	M, N	3	4	5
Q	O, P	1	2	3

- Calcular la ruta crítica y las actividades críticas.
- ¿Qué actividades se pueden retrasar 2 días sin afectar a la duración total del proyecto?
- ¿Cómo afectada a la duración total del proyecto si la actividad J se retrasa 2 días?
- ¿Cómo afectada a la duración total del proyecto si la actividad M se retrasa 4 días y la actividad J se retrasa 1 día?
- ¿Cuál es la probabilidad de terminar el proyecto antes de 20 días?
- ¿Qué plazos de ejecución tienen un 90% de probabilidad de cumplirse?

Problem Specification

Problem Title	PROYECTO	
Number of Activities:	17	
Time Unit:	días	
Problem Type	<input checked="" type="radio"/> Deterministic CPM <input checked="" type="radio"/> Probabilistic PERT	
Data Entry Format	<input checked="" type="radio"/> Spreadsheet <input type="radio"/> Graphic Model	
Select CPM Data Field	<input checked="" type="checkbox"/> Normal Time <input type="checkbox"/> Crash Time <input type="checkbox"/> Normal Cost <input type="checkbox"/> Crash Cost <input type="checkbox"/> Actual Cost <input type="checkbox"/> Percent Complete	
Activity Time Distribution:	3-Time estimate	
Choose Activity Time Distribution		
OK	Cancel	Help

a)

**PERT/CPM**

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

0.00 A

**PROYECTO**

Activity Number	Activity Name	Immediate Predecessor (list number/name, separated by ',')	Optimistic time (a)	Most likely time (m)	Pessimistic time (b)
1	A		1	1	1
2	B		1	2	3
3	C		2	3	4
4	D	A	2	4	6
5	E	A	1	3	5
6	F	C	1	2	3
7	G	C	0	1	2
8	H	D	5	7	9
9	I	D	6	8	10
10	J	B,E,F	5	7	15
11	K	B,E,F	6	7	8
12	L	G	3	5	7
13	M	H	1	1	1
14	N	I,J	1	2	3
15	O	K,L	2	3	4
16	P	M,N	3	4	5
17	Q	O,P	1	2	3

	Activity Name	On Critical Path	Activity Mean Time	Earliest Start	Earliest Finish	Latest Start	Latest Finish	Slack (LS-ES)	Activity Time Distribution	Standard Deviation
1	A	Yes	1	0	1	0	1	0	3-Time estimate	0
2	B	no	2	0	2	3	5	3	3-Time estimate	0,3333
3	C	Yes	3	0	3	0	3	0	3-Time estimate	0,3333
4	D	Yes	4	1	5	1	5	0	3-Time estimate	0,6667
5	E	no	3	1	4	2	5	1	3-Time estimate	0,6667
6	F	Yes	2	3	5	3	5	0	3-Time estimate	0,3333
7	G	no	1	3	4	10	11	7	3-Time estimate	0,3333
8	H	no	7	5	12	7	14	2	3-Time estimate	0,6667
9	I	Yes	8	5	13	5	13	0	3-Time estimate	0,6667
10	J	Yes	8	5	13	5	13	0	3-Time estimate	1,6667
11	K	no	7	5	12	9	16	4	3-Time estimate	0,3333
12	L	no	5	4	9	11	16	7	3-Time estimate	0,6667
13	M	no	1	12	13	14	15	2	3-Time estimate	0
14	N	Yes	2	13	15	13	15	0	3-Time estimate	0,3333
15	O	no	3	12	15	16	19	4	3-Time estimate	0,3333
16	P	Yes	4	15	19	15	19	0	3-Time estimate	0,3333
17	Q	Yes	2	19	21	19	21	0	3-Time estimate	0,3333
	Project	Completion	Time	=	21	dias		Holgura		
	Number of	Critical	Path(s)	=	2					

**On Critical Path:** YES si pertenece a alguna ruta crítica

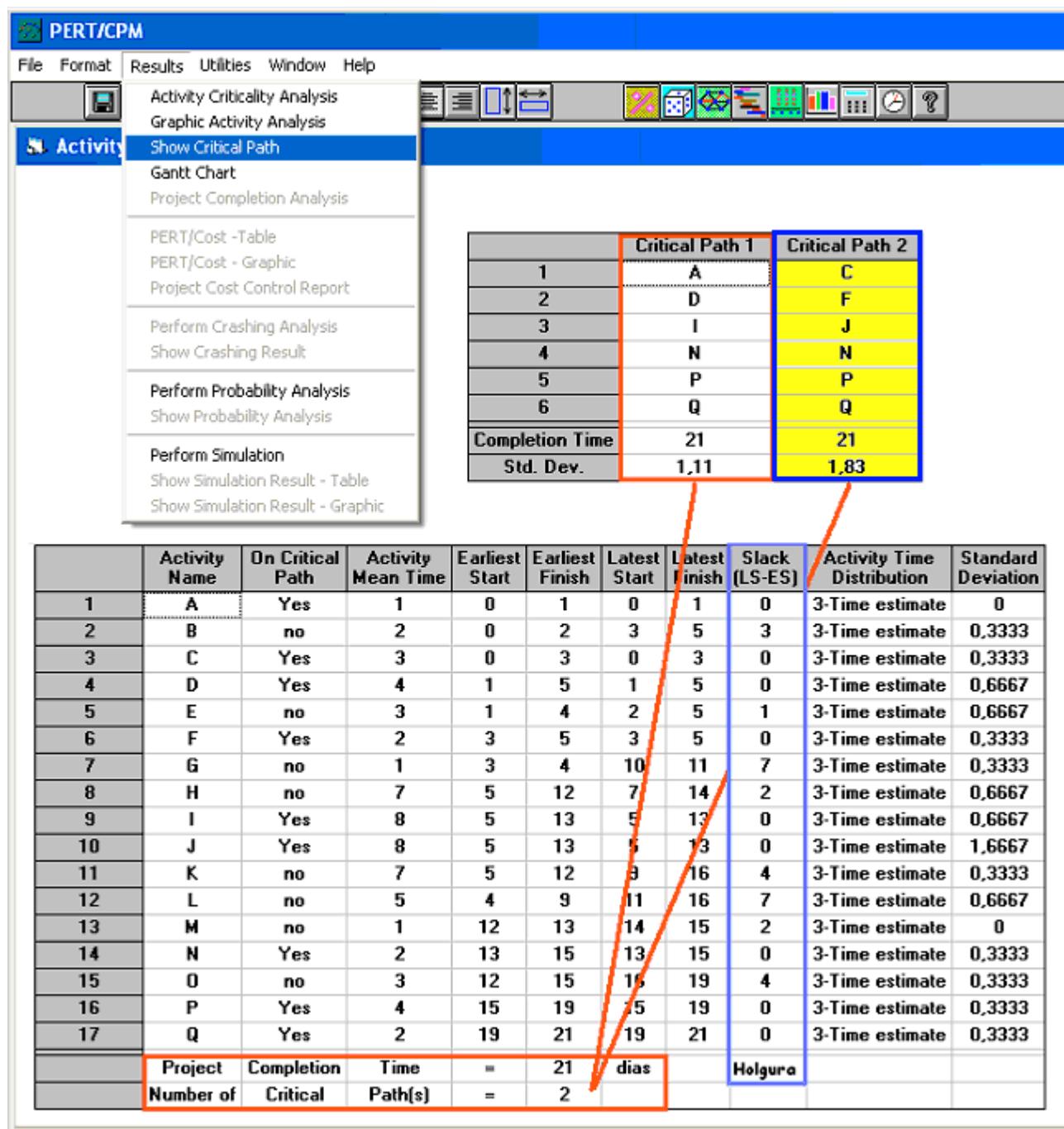
**Activity Mean Time:** Tiempo Pert

**3-time estimate:** Tiempo Pert utilizando los tiempos optimista, más probable y pesimista.

**Project Completion Time:** Tiempo de terminación del proyecto en 38 semanas

**Number of Critical Path(s):** 2 rutas críticas

## Rutas críticas: Results / Show Critical Path



La duración del proyecto es de 21 días.

Hay dos rutas críticas:  $C_1 \equiv A-D-I-N-P-Q$  y  $C_2 \equiv C-F-J-N-P-Q$

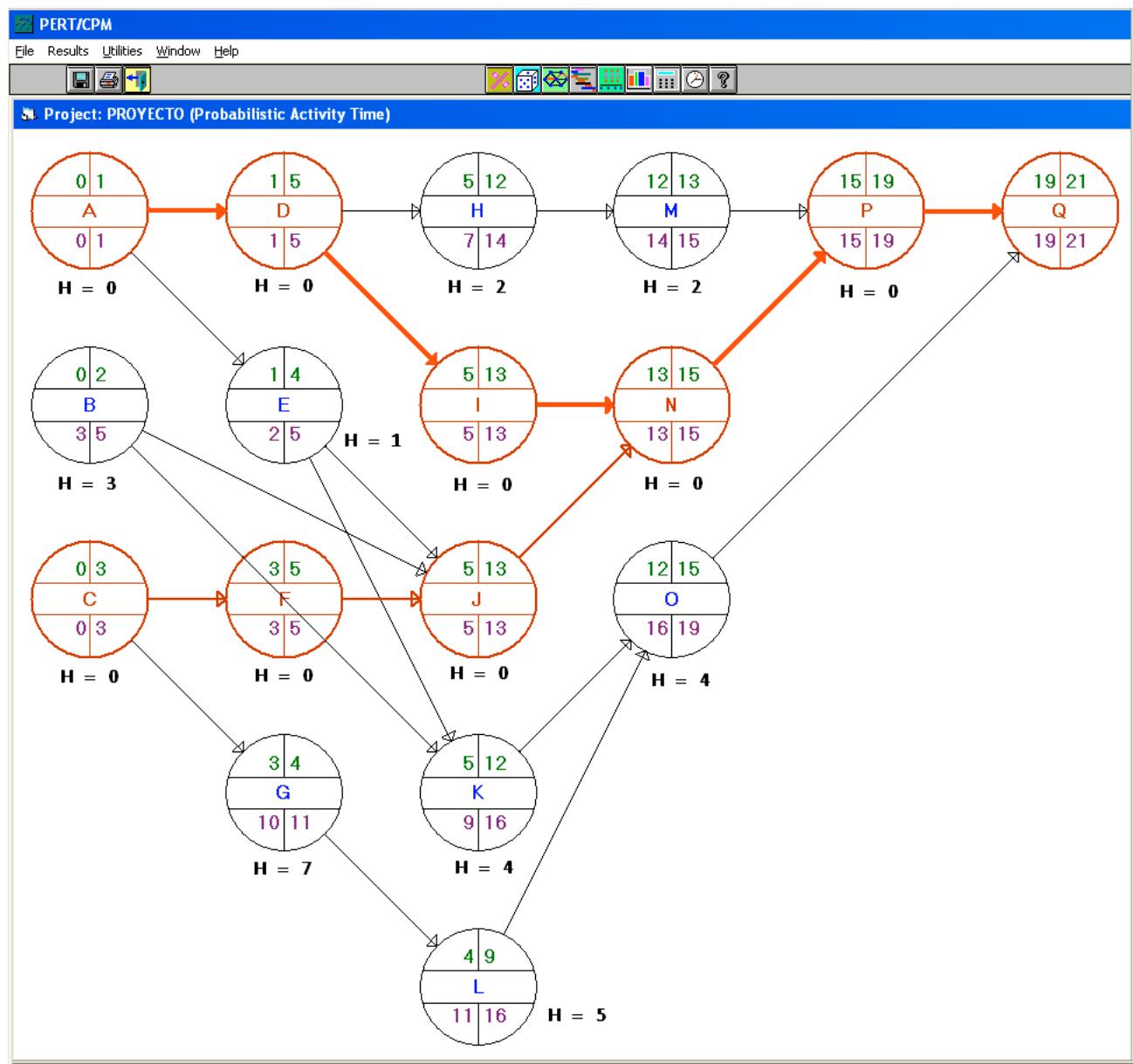
Se elige la ruta crítica con mayor desviación típica:  $\sigma_2 = 1,83$

La ruta crítica está formada por actividades con holgura cero.

La holgura (H) es la diferencia entre el tiempo más tarde y el tiempo más temprano.

Después de personalizar el gráfico: Format / Switch Graphic Model

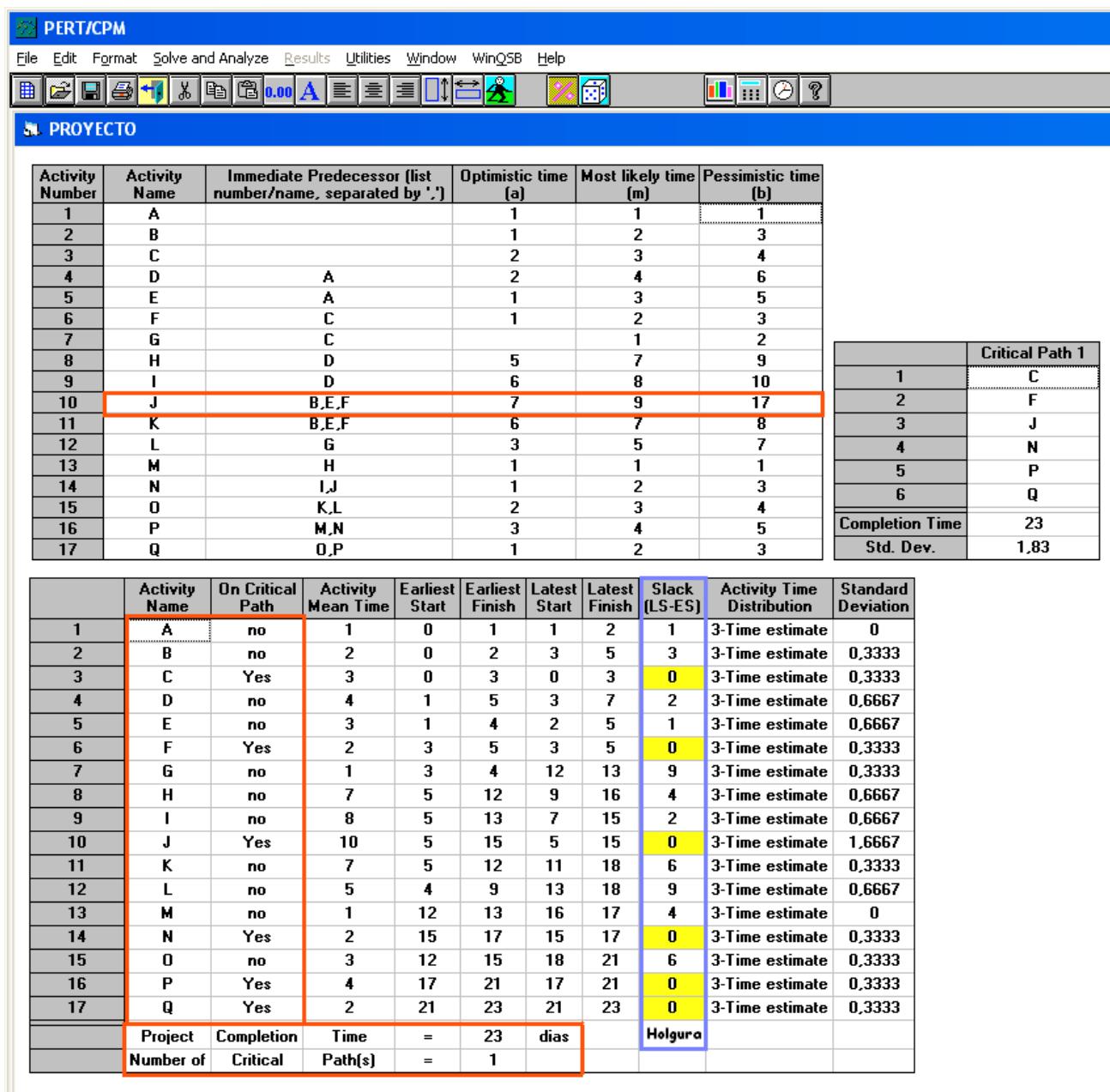
### Results / Graphic Activity Analysis



- b) Las actividades que se pueden retrasar 2 días sin afectar a la duración total del proyecto son aquellas que tienen una holgura  $H \geq 2$

Actividades: B , G , H , K , L , M , O

c) Como la actividad J (no tiene holgura:  $H = 0$ ) el proyecto se retrasaría 2 días, los caminos críticos  $C_1$  y  $C_2$  dejarían de serlo. El proyecto sería de 23 días.



Aparece una nueva ruta crítica  $C_3 \equiv C - F - J - N - P - Q$

Adviértase que la actividad H tiene una holgura de 4 días, por lo que la actividad H puede retrasarse 4 días sin alterar la finalización del proyecto en 23 días.

d) Si la actividad M se retrasa 4 días (tiene una holgura de 2 días) retrasaría el proyecto en 2 días, con lo que los caminos críticos  $C_1$  y  $C_2$  dejarían de serlo. El proyecto sería de 23 días.

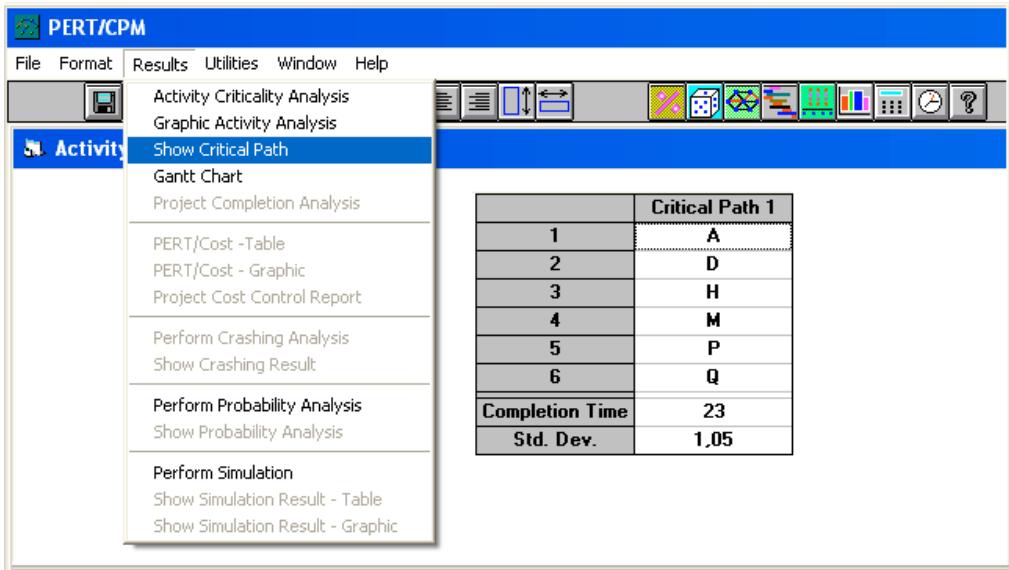
The screenshot shows the WinQSB PERT/CPM software interface. The top menu bar includes File, Edit, Format, Solve and Analyze, Results, Utilities, Window, WinQSB, and Help. Below the menu is a toolbar with various icons. The main window title is "PROYECTO".

**Activity Data Table:**

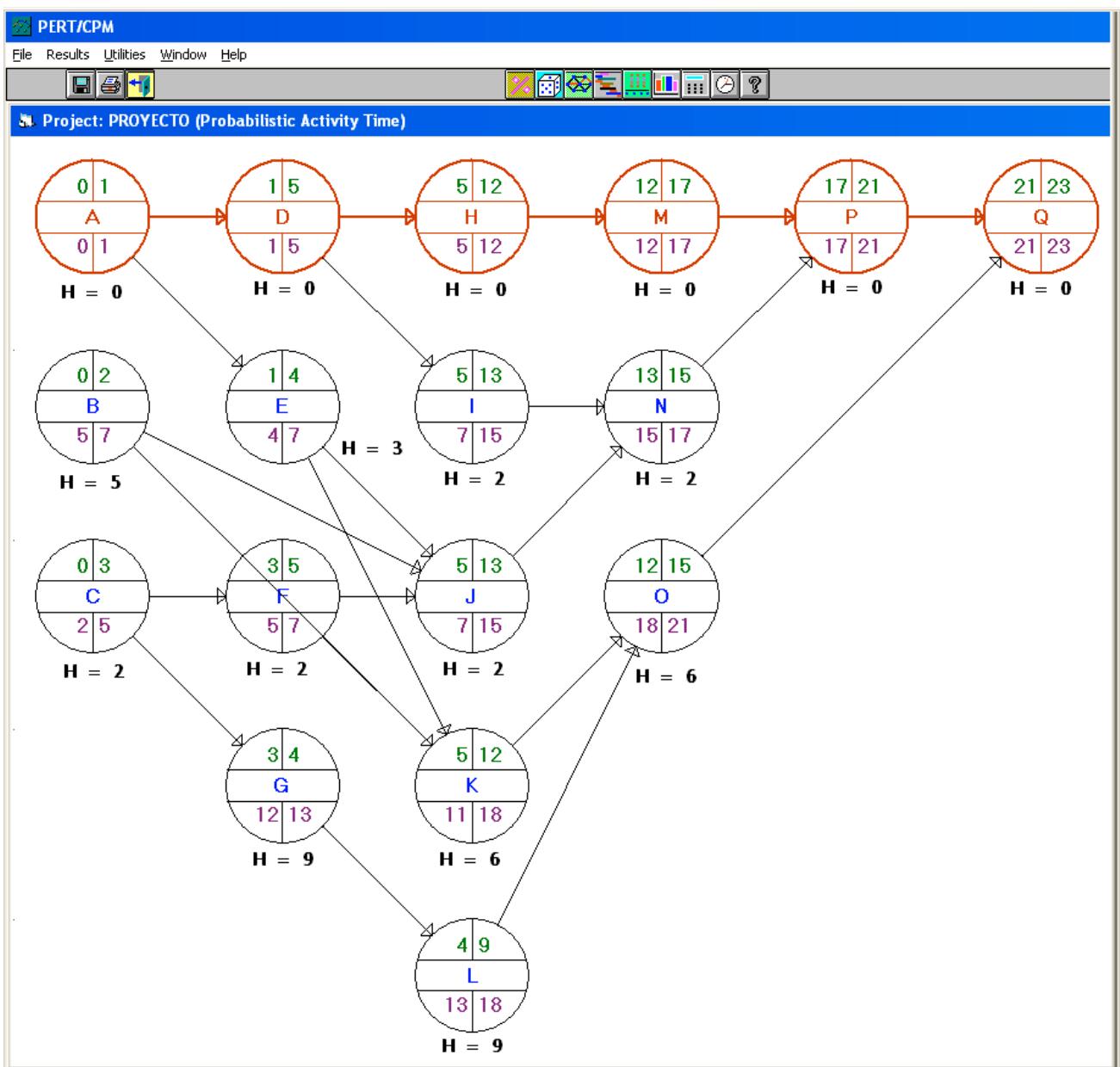
Activity Number	Activity Name	Immediate Predecessor (list number/name, separated by ',')	Optimistic time (a)	Most likely time (m)	Pessimistic time (b)
1	A		1	1	1
2	B		1	2	3
3	C		2	3	4
4	D	A	2	4	6
5	E	A	1	3	5
6	F	C	1	2	3
7	G	C		1	2
8	H	D	5	7	9
9	I	D	6	8	10
10	J	B,E,F	5	7	15
11	K	B,E,F	6	7	8
12	L	G	3	5	7
13	M	H	5	5	5
14	N	I,J	1	2	3
15	O	K,L	2	3	4
16	P	M,N	3	4	5
17	Q	O,P	1	2	3

**Activity Analysis Table:**

	Activity Name	On Critical Path	Activity Mean Time	Earliest Start	Earliest Finish	Latest Start	Latest Finish	Slack (LS-ES)	Activity Time Distribution	Standard Deviation
1	A	Yes	1	0	1	0	1	0	3-Time estimate	0
2	B	no	2	0	2	5	7	5	3-Time estimate	0,3333
3	C	no	3	0	3	2	5	2	3-Time estimate	0,3333
4	D	Yes	4	1	5	1	5	0	3-Time estimate	0,6667
5	E	no	3	1	4	4	7	3	3-Time estimate	0,6667
6	F	no	2	3	5	5	7	2	3-Time estimate	0,3333
7	G	no	1	3	4	12	13	9	3-Time estimate	0,3333
8	H	Yes	7	5	12	5	12	0	3-Time estimate	0,6667
9	I	no	8	5	13	7	15	2	3-Time estimate	0,6667
10	J	no	8	5	13	7	15	2	3-Time estimate	1,6667
11	K	no	7	5	12	11	18	6	3-Time estimate	0,3333
12	L	no	5	4	9	13	18	9	3-Time estimate	0,6667
13	M	Yes	5	12	17	12	17	0	3-Time estimate	0
14	N	no	2	13	15	15	17	2	3-Time estimate	0,3333
15	O	no	3	12	15	18	21	6	3-Time estimate	0,3333
16	P	Yes	4	17	21	17	21	0	3-Time estimate	0,3333
17	Q	Yes	2	21	23	21	23	0	3-Time estimate	0,3333
	Project Number of	Completion Critical	Time Path(s)	=	23	días		Holgura		
				=	1					



Aparece un nuevo camino crítico:  $C_4 \equiv A - D - H - M - P - Q$



Si la actividad J se retrasa 1 día (tiene una holgura de 2 días) no retrasaría el proyecto, quedaría en 23 días, con la ruta crítica :  $C_4 \equiv A - D - H - M - P - Q$

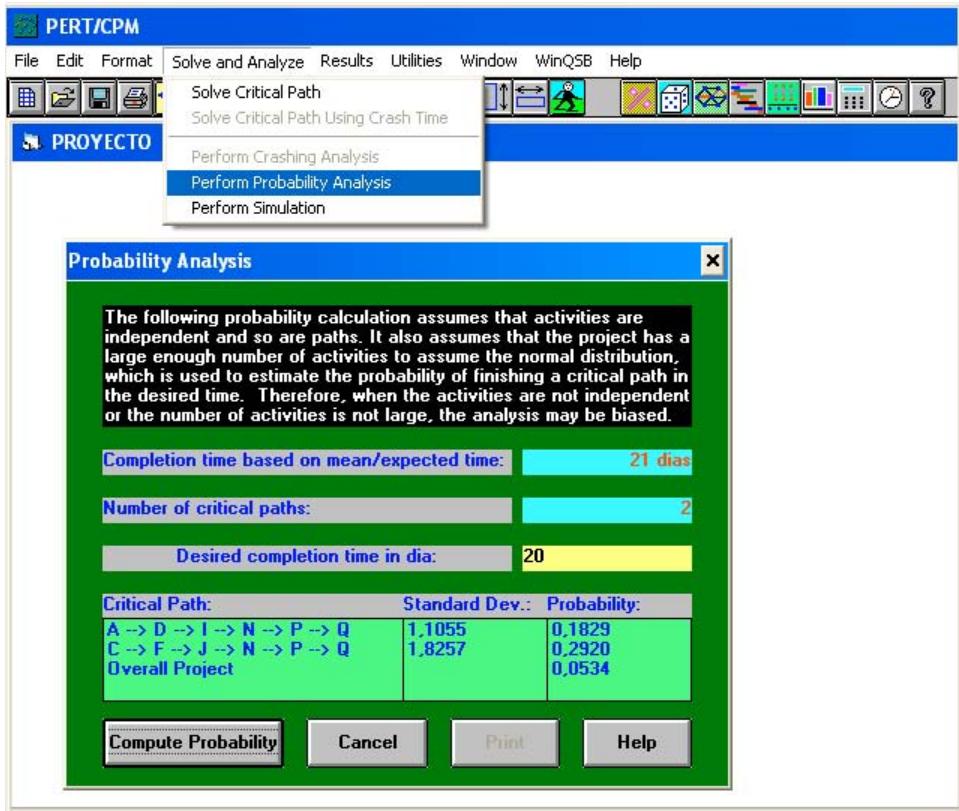
The screenshot shows the WinQSB software interface with the following details:

- PERT/CPM** window title.
- Menu bar: File, Edit, Format, Solve and Analyze, Results, Utilities, Window, WinQSB, Help.
- Toolbar icons: Project, View, Tools, Options, Save, Print, Undo, Redo, Cut, Copy, Paste, Find, Replace, Delete, Insert, New, Open, Save As, Properties, Help.
- PROYECTO** tab selected.
- Activity Data Table:**

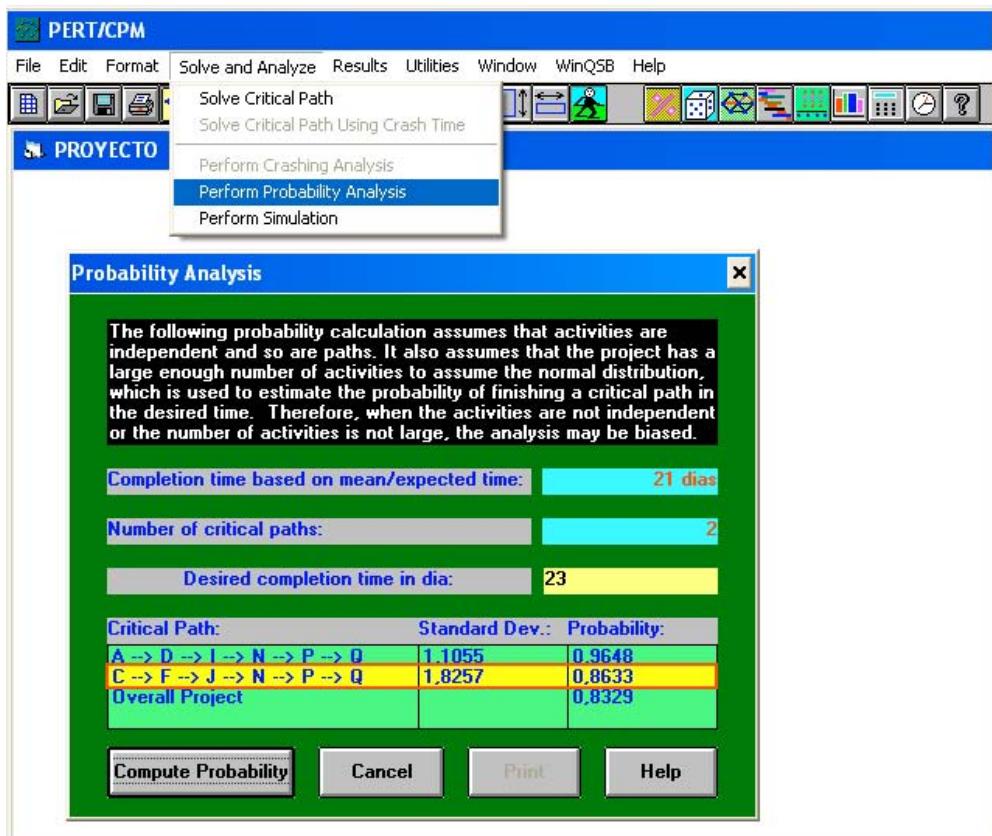
Activity Number	Activity Name	Immediate Predecessor (list number/name, separated by ',')	Optimistic time (a)	Most likely time (m)	Pessimistic time (b)
1	A		1	1	1
2	B		1	2	3
3	C		2	3	4
4	D	A	2	4	6
5	E	A	1	3	5
6	F	C	1	2	3
7	G	C		1	2
8	H	D	5	7	9
9	I	D	6	8	10
10	J	B,E,F	6	8	16
11	K	B,E,F	6	7	8
12	L	G	3	5	7
13	M	H	5	5	5
14	N	I,J	1	2	3
15	O	K,L	2	3	4
16	P	M,N	3	4	5
17	Q	O,P	1	2	3
- Critical Path 1:** A → D → H → M → P → Q (Activities 1, 4, 8, 13, 16, 17).
- Completion Time:** 23
- Std. Dev.:** 1,05
- Activity Data Table (Detailed):**

Activity	Name	On Critical Path	Activity Mean Time	Earliest Start	Earliest Finish	Latest Start	Latest Finish	Slack (LS-ES)	Activity Time Distribution	Standard Deviation
1	A	Yes	1	0	1	0	1	0	3-Time estimate	0
2	B	No	2	0	2	4	6	4	3-Time estimate	0,3333
3	C	No	3	0	3	1	4	1	3-Time estimate	0,3333
4	D	Yes	4	1	5	1	5	0	3-Time estimate	0,6667
5	E	No	3	1	4	3	6	2	3-Time estimate	0,6667
6	F	No	2	3	5	4	6	1	3-Time estimate	0,3333
7	G	No	1	3	4	12	13	9	3-Time estimate	0,3333
8	H	Yes	7	5	12	5	12	0	3-Time estimate	0,6667
9	I	No	8	5	13	7	15	2	3-Time estimate	0,6667
10	J	No	9	5	14	6	15	1	3-Time estimate	1,6667
11	K	No	7	5	12	11	18	6	3-Time estimate	0,3333
12	L	No	5	4	9	13	18	9	3-Time estimate	0,6667
13	M	Yes	5	12	17	12	17	0	3-Time estimate	0
14	N	No	2	14	16	15	17	1	3-Time estimate	0,3333
15	O	No	3	12	15	18	21	6	3-Time estimate	0,3333
16	P	Yes	4	17	21	17	21	0	3-Time estimate	0,3333
17	Q	Yes	2	21	23	21	23	0	3-Time estimate	0,3333
- Project Completion Time:** = 23 dias
- Number of Critical Path(s):** = 1
- Holgura:** (highlighted in blue)

e) La probabilidad de finalizar el proyecto en 20 días



f) Con la opción **Perform Probability Analysis** se detecta que con una probabilidad del 90% los plazos de ejecución del proyecto se encuentran entre 23 y 24 días.



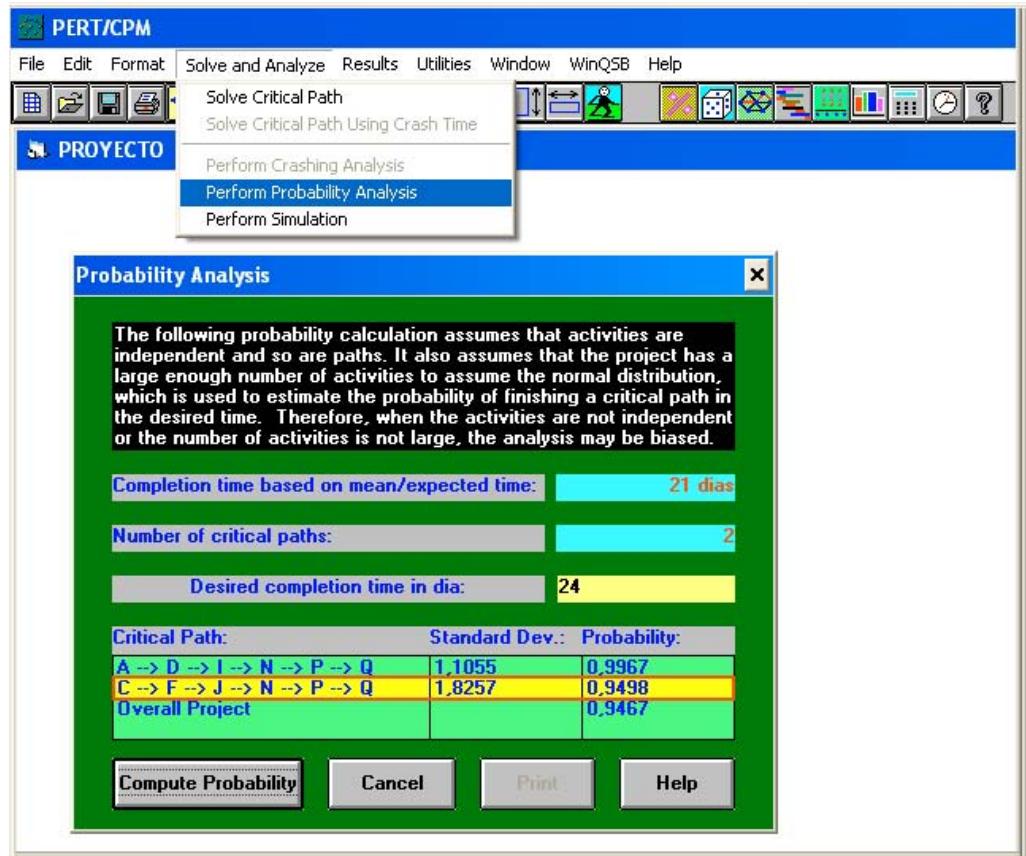
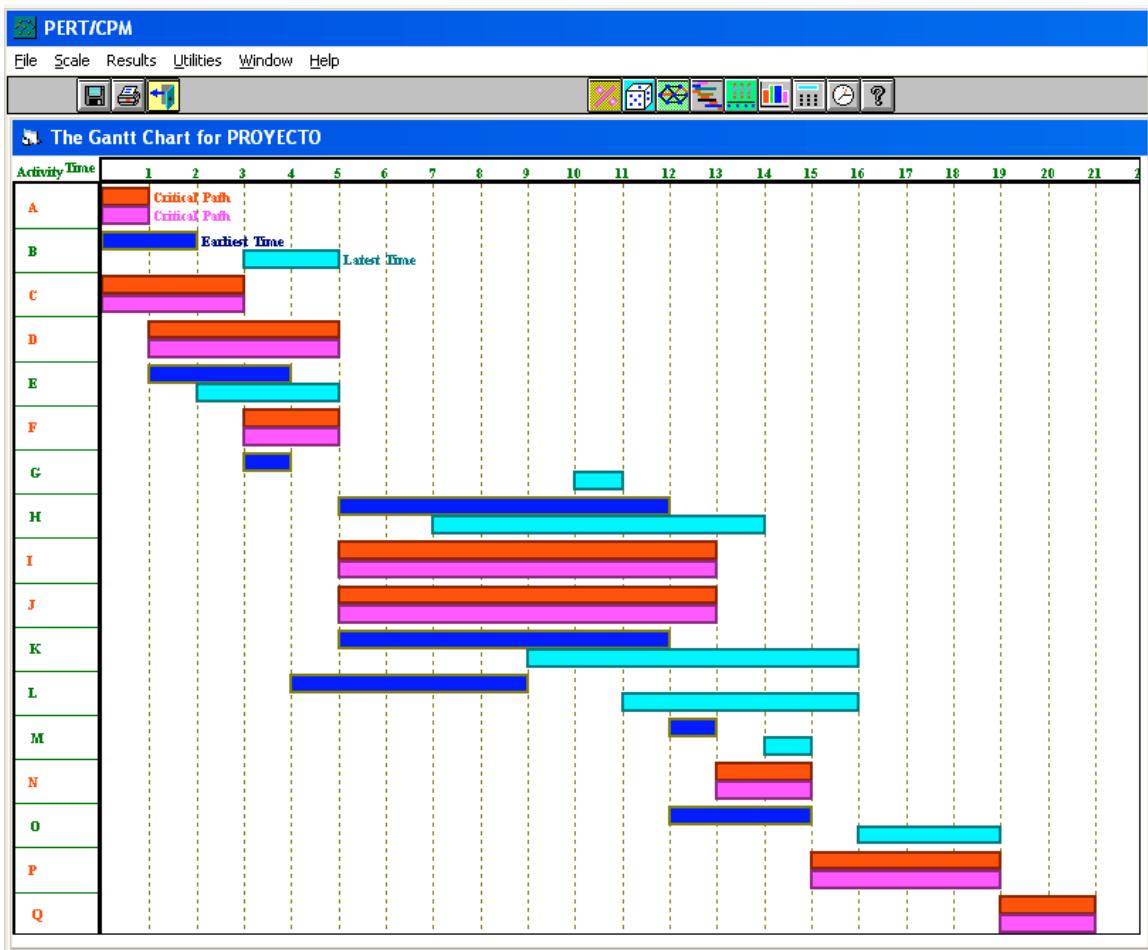


Diagrama de Gantt: Results / Gantt Chart





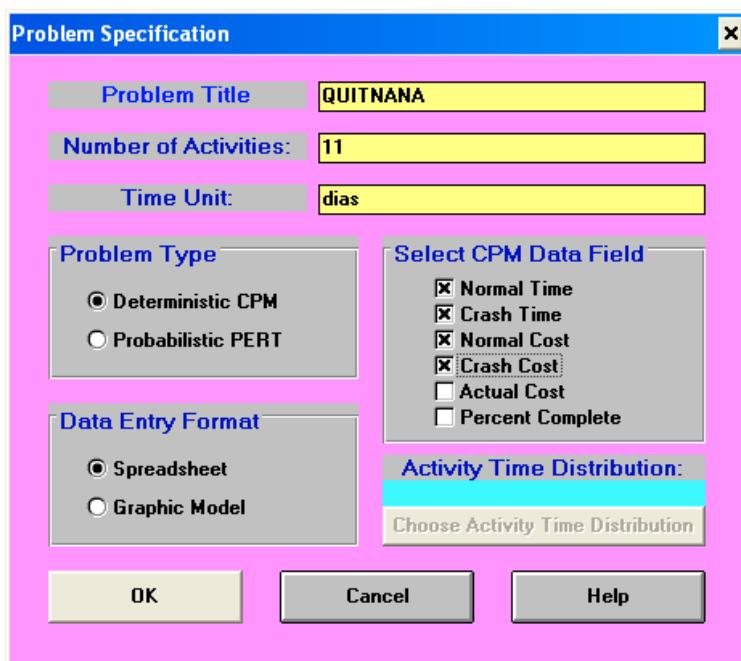


## GESTIÓN DE PROYECTOS: CPM

La empresa Quintana S.A. programó 11 actividades para el asfaltado de una calle de Fuenterrrebollo. En la tabla adjunta se refleja la duración en días y las precedencias establecidas.

Actividad	Asignación	Predecesores	Tiempos		Costes	
			Normal	Quiebre	Normal	Quiebre
Excavación	A	----	15	10	1000	1200
Sub-Base	B	A	7	6	3000	3500
Compactación	C	B	2	2	700	700
Base	D	C	4	2	1200	2400
Compactación	E	D	1	1	700	700
Canaletas	F	C	6	3	1500	2700
Pegante	G	A,E	1	1	1100	1100
Capa asfalto	H	F, G	3	2	4700	5200
Compactación	I	H	1	1	800	800
Pruebas Base	J	E	2	1	400	1100
Pruebas Asfalto	K	I	2	1	900	1300

- Construir una red de proyectos incluyendo un análisis de tiempo/coste
- Analizar el proyecto hasta el 22 día de ejecución.
- El contrato con la empresa establece que si finaliza el proyecto antes de 30 días recibe 2500 dólares por día anticipado, mientras que si lo termina después de este tiempo tiene una sanción de 5.000 dólares por día incumplido. ¿Cuándo deberían finalizar las actividades a mínimo costo?



**Normal Time:** Permite especificar el tiempo normal de cada actividad.

**Crash Time:** Tiempo mínimo en que se podría reducir una actividad.

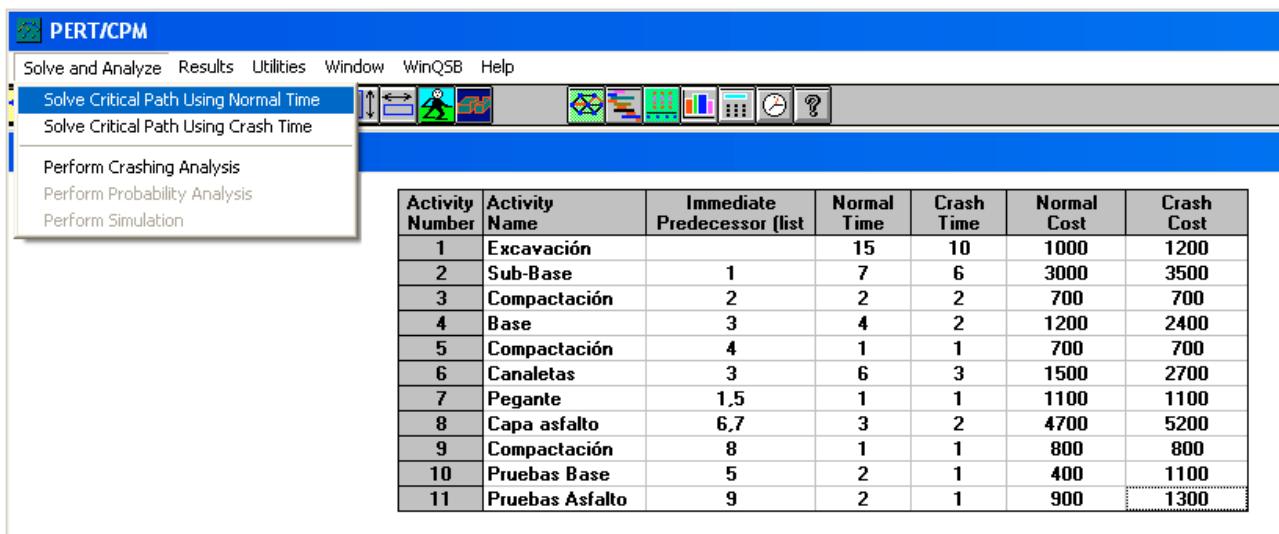
**Normal Cost:** Costo para realizar una actividad ejecutada en un tiempo normal, este costo es presupuestado.

**Actual Cost:** Costo de una actividad real.

**Percent Complete:** Realiza un análisis de costos y tiempos de forma parcial o total a un proyecto que ha sido ejecutado.

Introducidos los datos para conocer la ruta crítica utilizando tiempos normales:

Solve and Analyze / Solve Critical Path Using Normal Time



	Activity Name	On Critical Path	Activity Time	Earliest Start	Earliest Finish	Latest Start	Latest Finish	Slack (LS-ES)
1	Excavación	Yes	15	0	15	0	15	0
2	Sub-Base	Yes	7	15	22	15	22	0
3	Compactación	Yes	2	22	24	22	24	0
4	Base	Yes	4	24	28	24	28	0
5	Compactación	Yes	1	28	29	28	29	0
6	Canaletas	Yes	6	24	30	24	30	0
7	Pegante	Yes	1	29	30	29	30	0
8	Capa asfalto	Yes	3	30	33	30	33	0
9	Compactación	Yes	1	33	34	33	34	0
10	Pruebas Base	No	2	29	31	34	36	5
11	Pruebas Asfalto	Yes	2	34	36	34	36	0
	Project Completion Time		=	36	días			
	Total Cost of Project		=	\$16.000	(Cost on CP = \$15.600)			
	Number of Critical Path(s)		=	3				

On Critical Path: Actividades críticas de la red

Earliest Start - Earliest Finish: Tiempos más próximos de inicio y finalización

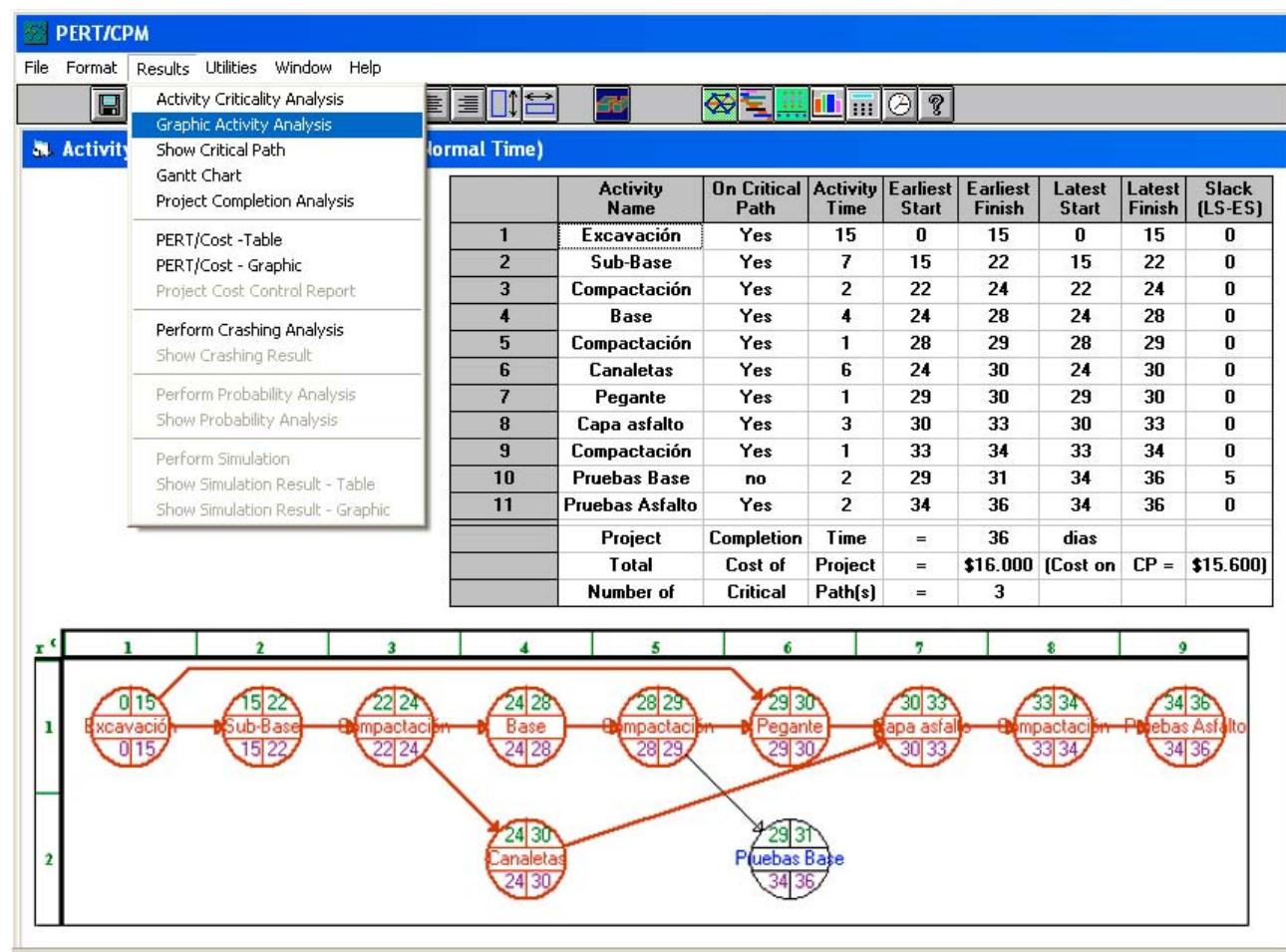
Latest Start y Latest Finish: Tiempos tardíos

Slack: Tiempos de holgura

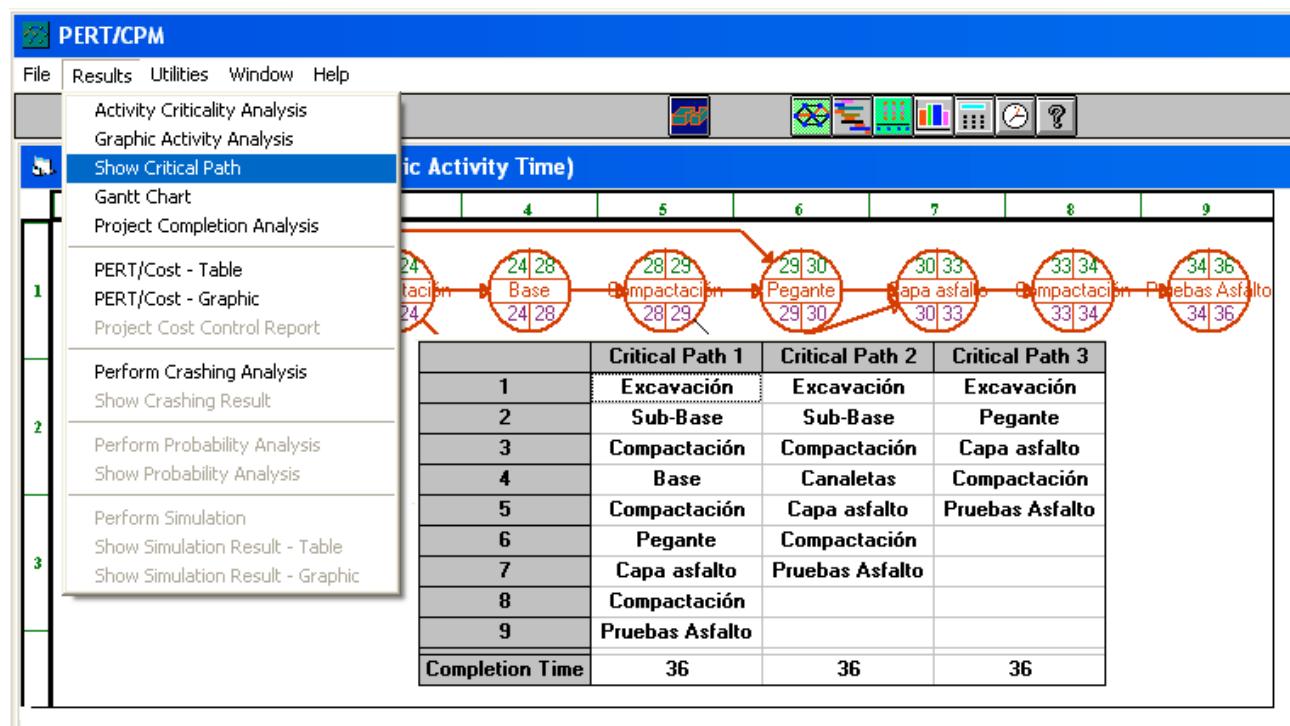
Project Completion Time: Tiempo de duración total del proyecto

Number of Critical Path: 3 rutas críticas

## La ruta crítica en modo gráfico: Results / Graphic Activity Analysis



Para ver las actividades pertenecientes a la ruta crítica: Results / Show Critical Path



b) Con el análisis del estado del proyecto se pueden analizar las actividades que han sido ejecutadas o que se encuentran en ejecución una vez pasado cierto tiempo de tiempo.

Results / Project Completion Analysis

**PERT/CPM**

File Format Results Utilities Window Help

Activity Criticality Analysis Graphic Activity Analysis Show Critical Path Gantt Chart Project Completion Analysis

PERT/Cost -Table PERT/Cost - Graphic Project Cost Control Report

Perform Crashing Analysis Show Crashing Result

Perform Probability Analysis Show Probability Analysis

Perform Simulation Show Simulation Result - Table Show Simulation Result - Graphic

**Project Completion Analysis**

Enter the project time passed so far. The program will analyze the completion status.

Current project time in dia: 26

OK Cancel Help

	Activity Name	On Critical Path	Activity Time	Latest Start	Latest Finish	Planned % Completion
1	Excavación	Yes	15	0	15	100
2	Sub-Base	Yes	7	15	22	100
3	Compactación	Yes	2	22	24	100
4	Base	Yes	4	24	28	50
5	Compactación	Yes	1	28	29	0
6	Canaletas	Yes	6	24	30	33,3333
7	Pegante	Yes	1	29	30	0
8	Capa asfalto	Yes	3	30	33	0
9	Compactación	Yes	1	33	34	0
10	Pruebas Base	no	2	34	36	0
11	Pruebas Asfalto	Yes	2	34	36	0
	Overall	Project:		0	36	72,2222

Hasta el día 26 de ejecución del proyecto las actividades 1, 2 y 3 se encuentran terminadas, la actividad 4 se encuentra terminada al 50%, y la actividad 6 está completa en un 33,33%. La ejecución total del proyecto se encuentra finalizado en un 72,22%.

c) Para analizar las costos sobre el proyecto: [Results / Perform Crashing Analysis](#)

**PERT/CPM**

File Results Utilities Window Help

Activity Criticality Analysis Graphic Activity Analysis Show Critical Path Gantt Chart Project Completion Analysis

PERT/Cost -Table PERT/Cost - Graphic Project Cost Control Report

Perform Crashing Analysis Show Crashing Result

Perform Probability Analysis Show Probability Analysis

Perform Simulation Show Simulation Result - Table Show Simulation Result - Graphic

**Graphic Activity Time**

**Crashing Analysis**

**Crashing Option**

- Meeting the desired completion time
- Meeting the desired budget cost
- Finding the minimum cost schedule

Project completion time and cost based on normal time:	36 días
Project completion time and cost based on crash time:	\$16.000

Desired completion time:	30
Late penalty per dia:	2500
Early reward per dia:	5000

OK Cancel Help

## Opciones para el análisis

- Meeting the Desired Completion Time: Fijado el tiempo deseado para finalizar el proyecto determinar la secuencia de ejecución así como el coste estimado.  
Desired Completion Time: Fijado el coste del proyecto determinar la secuencia y duración.  
Late Penalty per Día: Multa por retraso  
Early Reward per Día: Recompensa si finaliza antes
- Meeting the Desired Budget Cost: Conociendo el presupuesto deseado  
Desired Budget Cost: Costo deseado presupuestado  
Modifica tiempo de las actividades (normal, quiebre)
- Finding the Minimum Cost Schedule: Determinar la secuencia de mínimo coste.

Se genera una tabla donde aparece el tiempo ideal en que se deben ejecutar las actividades.

**PERT/CPM**

File Format Results Utilities Window Help

0.00 A

Crashing Analysis for QUINTANA

	Activity Name	Critical Path	Normal Time	Crash Time	Suggested Time	Additional Cost	Normal Cost	Suggested Cost
1	Excavación	Yes	15	10	10	\$200	\$1.000	\$1.200
2	Sub-Base	Yes	7	6	6	\$500	\$3.000	\$3.500
3	Compactación	Yes	2	2	2	0	\$700	\$700
4	Base	Yes	4	2	2	\$1.200	\$1.200	\$2.400
5	Compactación	Yes	1	1	1	0	\$700	\$700
6	Canaletas	Yes	6	3	4	\$800	\$1.500	\$2.300
7	Pegante	Yes	1	1	1	0	\$1.100	\$1.100
8	Capa asfalto	Yes	3	2	2	\$500	\$4.700	\$5.200
9	Compactación	Yes	1	1	1	0	\$800	\$800
10	Pruebas Base	no	2	1	2	0	\$400	\$400
11	Pruebas Asfalto	Yes	2	1	1	\$400	\$900	\$1.300
	Early Reward:							(\$20.000)
	Overall Project:				26	\$3.600	\$16.000	(\$400)

Si el proyecto termina en 26 días hay un ahorro de 20.000 euros.



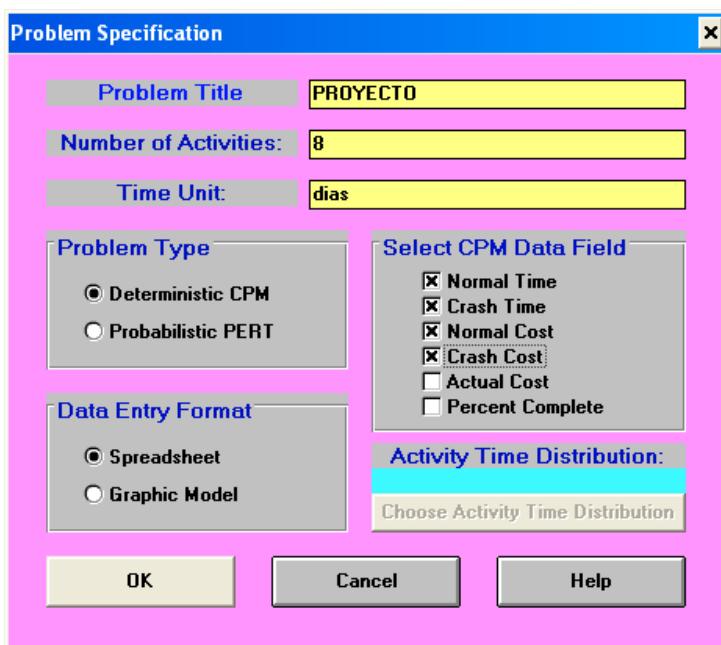


## GESTIÓN DE PROYECTOS: CPM

Sea un proyecto formado por 8 actividades. En la tabla aparece el orden en que deben realizarse las actividades, así como los tiempos necesarios para su ejecución.

Asignación	Predecesores	Tiempos		Costes	
		Normal	Quiebre	Normal	Quiebre
A	---	5	5	3	3
B	---	6	5	7	8
C	A,B	2	1	9	12
D	A,B	9	6	5	8
E	C	4	4	6	6
F	C,D	6	4	3	6
G	C,D	8	8	7	7
H	F,G	1	1	8	8

- Calcular las rutas críticas y el diagrama de Gantt
- Analizar el proyecto a los 19 días del comienzo de la actividad
- Obtener un gráfico y una tabla con la evolución de los costes a lo largo del proyecto



Para ver el Grafo: [Format / Switch to Graphic Model](#)

Activity Number	Activity Name	Immediate Predecessor (list number/name, separated by ',')	Normal Time	Crash Time	Normal Cost	Crash Cost
1	A		5	5	3	3
2	B		6	5	7	8
3	C	A,B	2	1	9	12
4	D	A,B	9	6	5	8
5	E	C	4	4	6	6
6	F	C,D	6	4	3	6
7	G	C,D	8	8	7	7
8	H	F,G	1	1	8	8

La ruta crítica se obtiene con la opción: **Solve and Analyze / Solve Critical Path**

La ruta crítica está formada por las actividades cuya demora produciría un aumento en la duración del proyecto.

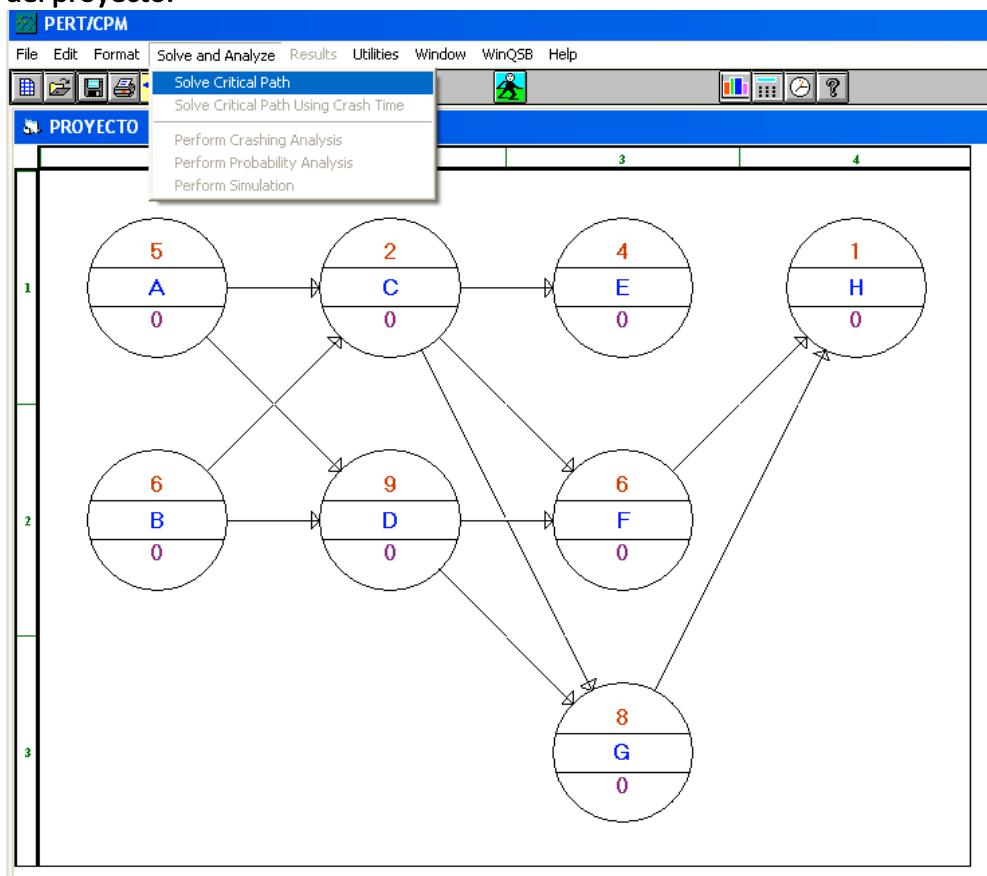


Tabla con actividades críticas

	Activity Name	On Critical Path	Activity Time	Earliest Start	Earliest Finish	Latest Start	Latest Finish	Slack (LS-ES)
1	A	no	5	0	5	1	6	1
2	B	Yes	6	0	6	0	6	0
3	C	no	2	6	8	13	15	7
4	D	Yes	9	6	15	6	15	0
5	E	no	4	8	12	20	24	12
6	F	no	6	15	21	17	23	2
7	G	Yes	8	15	23	15	23	0
8	H	Yes	1	23	24	23	24	0
	Project	Completion Time	=	24	días			
	Number of Critical Path(s)	=	1					

**Earliest Start** → Tiempo más temprano en el que puede comenzar una actividad

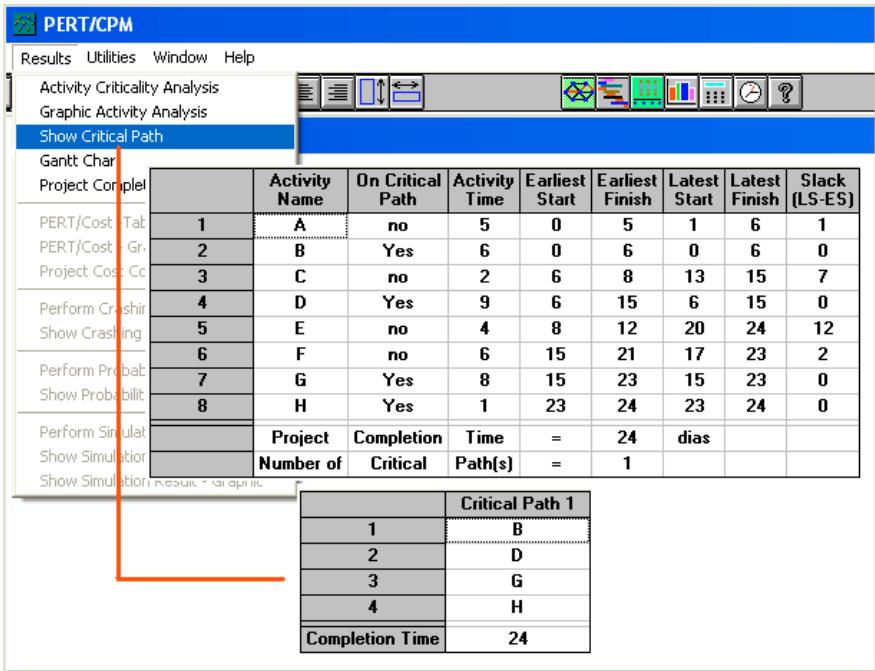
**Earliest Finish** = Earliest Start +  $t_{ij}$  → Tiempo más temprano en que puede terminar la actividad

**Latest Start** = TT -  $t_{ij}$  → Tiempo más tarde en el que puede comenzar la actividad

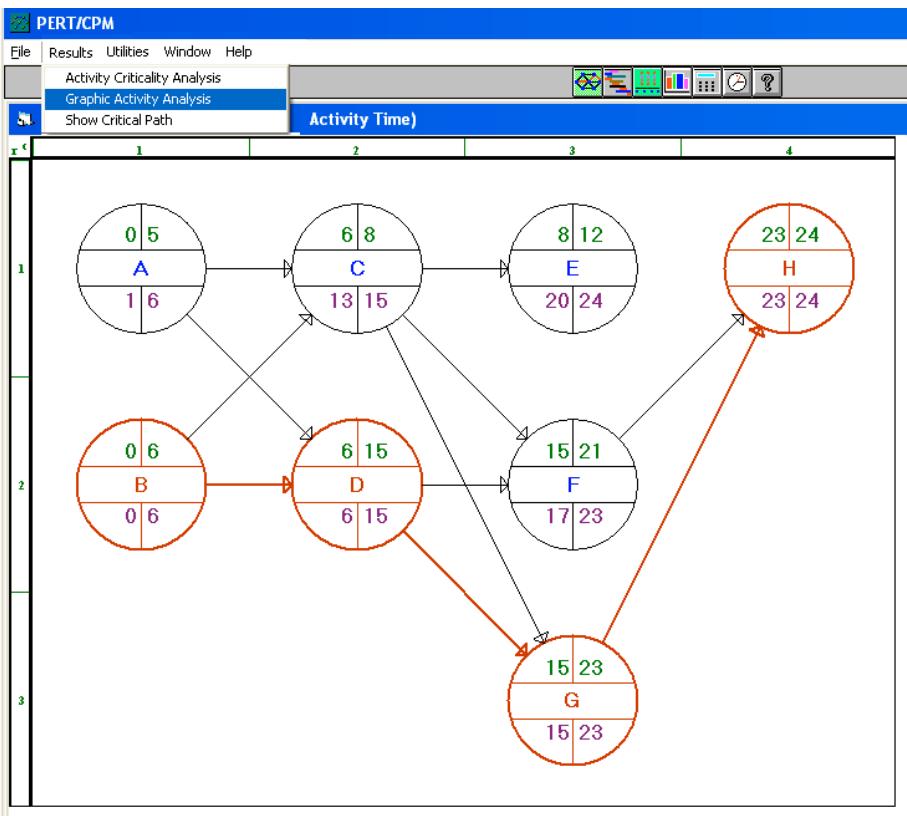
**Latest Finish** → Tiempo más tarde en el que puede terminar la actividad

**Slack** → Hora

La duración del proyecto es de 24 días y solo existe una ruta crítica.



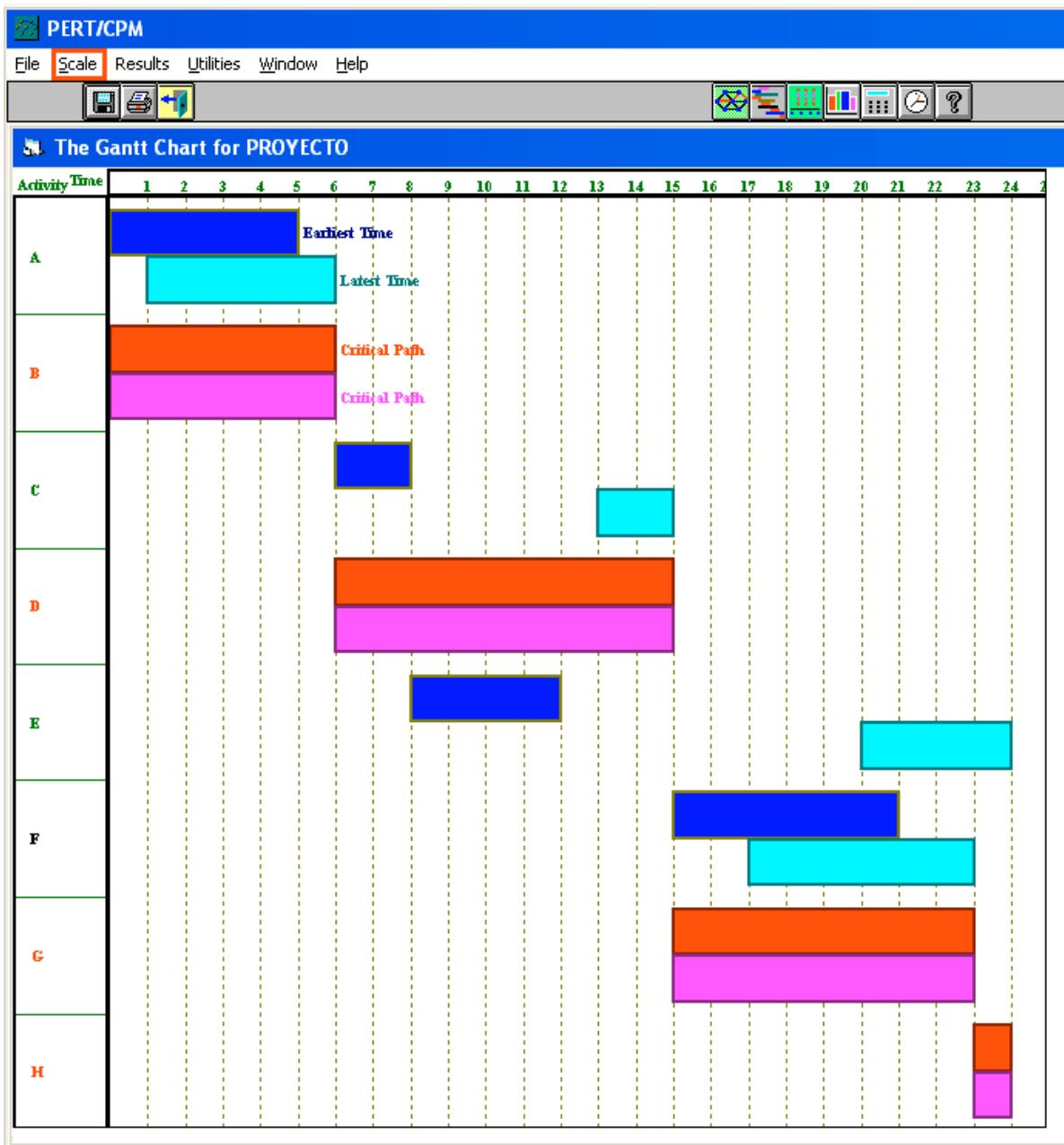
La ruta crítica se obtiene con la opción: **Results / Graphics Activity Analysis**



El gráfico de Gantt se utiliza para calcular la duración y el control del proyecto, en el eje de ordenadas se representan las actividades del proyecto y en el de abscisas el tiempo.

### Results/ Gantt Chart

La primera pantalla resulta ilegible, se personaliza [Scale / Gantt Chart Scale](#)



b) Estado del proyecto en un tiempo determinado: [Results / Project Completion Analysis](#)

The screenshot shows the PERT/CPM software interface. The menu bar has 'File' selected, and the 'Results' option is highlighted. A sub-menu window titled 'Project Completion Analysis' is open, containing the message: 'Enter the project time passed so far. The program will analyze the completion status.' Below this is a text input field labeled 'Current project time in dia:' with the value '19'. At the bottom are 'OK', 'Cancel', and 'Help' buttons.

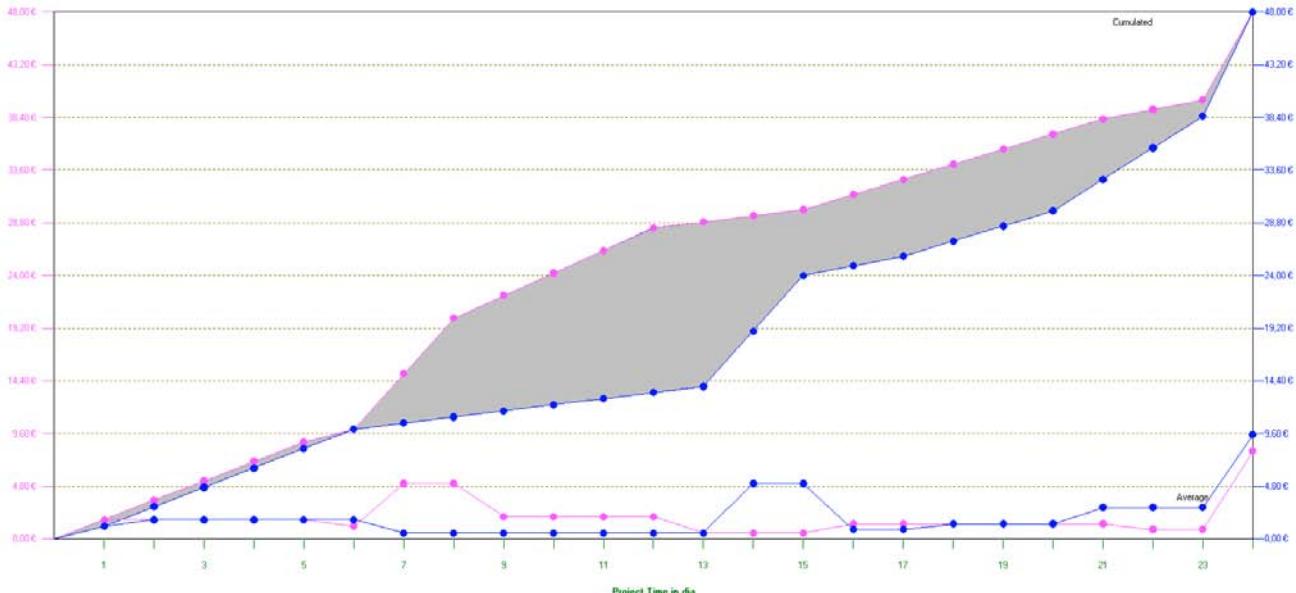
	Activity Name	On Critical Path	Activity Time	Latest Start	Latest Finish	Planned % Completion
1	A	No	5	1	6	100
2	B	Yes	6	0	6	100
3	C	No	2	13	15	100
4	D	Yes	9	6	15	100
5	E	No	4	20	24	0
6	F	No	6	17	23	33.3333
7	G	Yes	8	15	23	50
8	H	Yes	1	23	24	0
Overall	Project:		0	24		79,1667

El día 19 de ejecución del proyecto las actividades 1, 2 , 3 y 4 se encuentran terminadas, la actividad 6 se encuentra realizada en un 33,33%, y la actividad 7 se encuentra realizada en un 50%.  
La ejecución total del proyecto se encuentra finalizado en un 79,17%.

c) Para obtener la evolución de los costes a lo largo del proyecto, bien en formato tabla o gráfico, se recurre a la opción: [PERT / Cost – Table - PERT / Cost – Graphic](#)

The screenshot shows the PERT/CPM software interface. The menu bar has 'File' selected, and the 'Results' option is highlighted. A sub-menu window is open, showing several options: 'PERT/Cost - Table' (which is highlighted with a red box), 'PERT/Cost - Graphic' (also highlighted with a red box), 'Project Cost Control Report', 'Perform Crashing Analysis', and 'Show Crashing Result'.

Activity Number	Activity Name	Immediate Predecessor (list number/name, separated by ',')	Normal Time	Crash Time	Normal Cost	Crash Cost
1	A		5	5	3	3
2	B		6	5	7	8
3	C	A,B	2	1	9	12
4	D	A,B	9	6	5	8
5	E	C	4	4	6	6
6	F	C,D	6	4	3	6
7	G	C,D	8	8	7	7
8	H	F,G	1	1	8	8



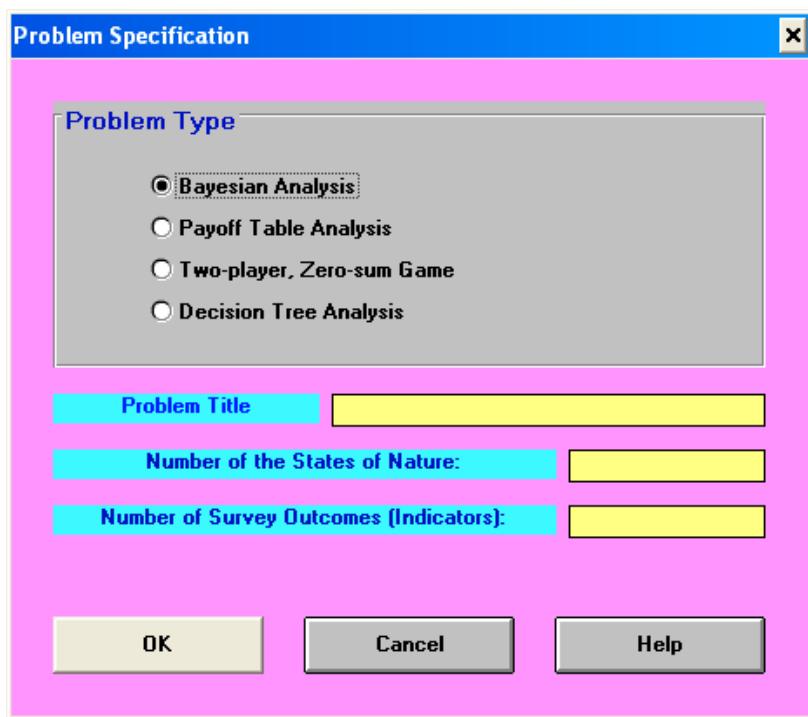
	Project Time in dia	Cost Schedule Based on ES	Cost Schedule Based on LS	Total Cost Based on ES	Total Cost Based on LS
1	1	1,77 €	1,17 €	1,77 €	1,17 €
2	2	1,77 €	1,77 €	3,53 €	2,93 €
3	3	1,77 €	1,77 €	5,30 €	4,70 €
4	4	1,77 €	1,77 €	7,07 €	6,47 €
5	5	1,77 €	1,77 €	8,83 €	8,23 €
6	6	1,17 €	1,77 €	\$10	10,00 €
7	7	5,06 €	0,56 €	15,06 €	10,56 €
8	8	5,06 €	0,56 €	20,11 €	11,11 €
9	9	2,06 €	0,56 €	22,17 €	11,67 €
10	10	2,06 €	0,56 €	24,22 €	12,22 €
11	11	2,06 €	0,56 €	26,28 €	12,78 €
12	12	2,06 €	0,56 €	28,33 €	13,33 €
13	13	0,56 €	0,56 €	28,89 €	13,89 €
14	14	0,56 €	5,06 €	29,44 €	18,94 €
15	15	0,56 €	5,06 €	30,00 €	24,00 €
16	16	1,38 €	0,88 €	31,37 €	24,87 €
17	17	1,38 €	0,88 €	32,75 €	25,75 €
18	18	1,38 €	1,38 €	34,13 €	27,12 €
19	19	1,38 €	1,38 €	35,50 €	28,50 €
20	20	1,38 €	1,38 €	36,88 €	29,87 €
21	21	1,38 €	2,88 €	38,25 €	32,75 €
22	22	0,88 €	2,88 €	39,13 €	35,63 €
23	23	0,88 €	2,88 €	40	38,50 €
24	24	8 €	9,50 €	48 €	48 €



# **DECISIÓN**







**Bayesian Analysis:** Análisis Bayesiano

**Payoff Table Analysis:** Análisis de tablas de pago

**Two-Player, Zeros-Sum Game:** Juegos de suma cero para dos jugadores

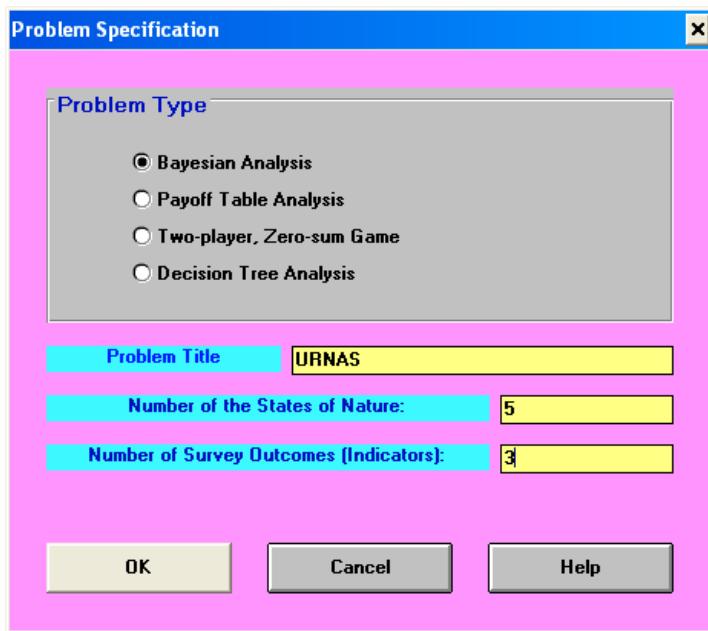
**Decision Tree Analysis:** Análisis de árboles de decisión



## ANÁLISIS BAYESIANO: Bayesian Analysis

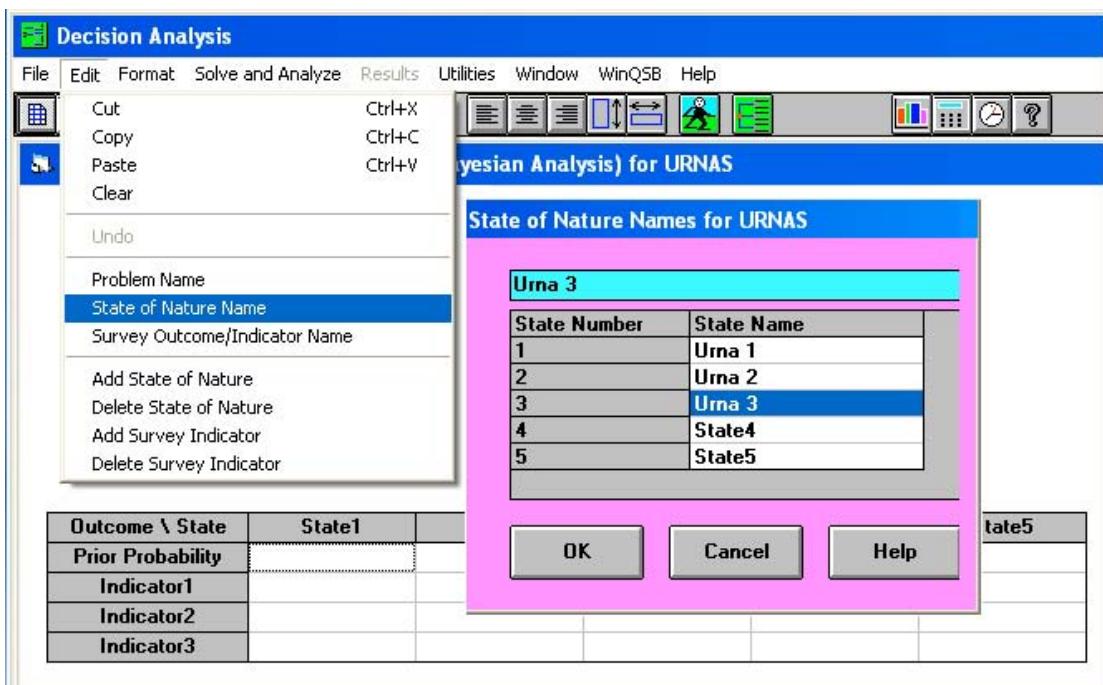
En un experimento aleatorio hay cinco urnas: La urna 1 tiene 1 bola azul, 6 bolas negras y 3 bolas rojas. La urna 2: 6 bolas azules, 2 bolas negras y 2 bolas rojas. La urna 3: 8 bolas azules, 1 bola negra y 1 bola roja. La urna 4: 1 bola azul, 2 bolas negras y 7 bolas rojas. La urna 5: 6 bolas negras y 4 bolas rojas. ¿Cuál es la probabilidad de al seleccionar la urna 3 salga bola roja?

En **Number of the States of Nature** (Número de estados naturales) 5 urnas, en **Number of Survey Outcomes** (Número de resultados) 3 tipos de bolas.



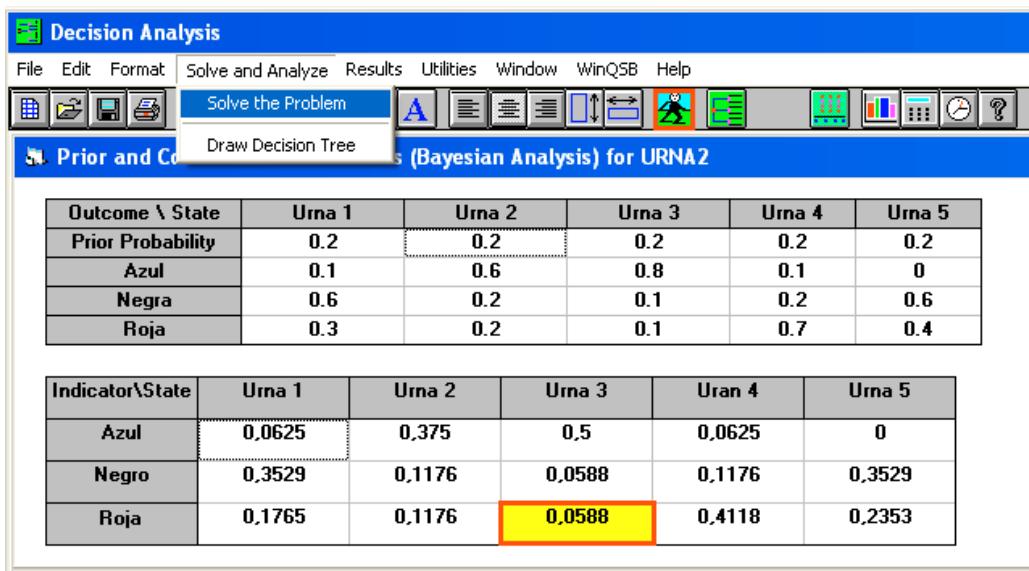
Para personalizar la tabla se cambian los campos, con el menú **Edit / State of Nature Name** se modifican los States por los nombre de las urnas.

Análogamente, con **Edit / Survey Outcome/ Indicator Name** se introduce el color de las bolas.



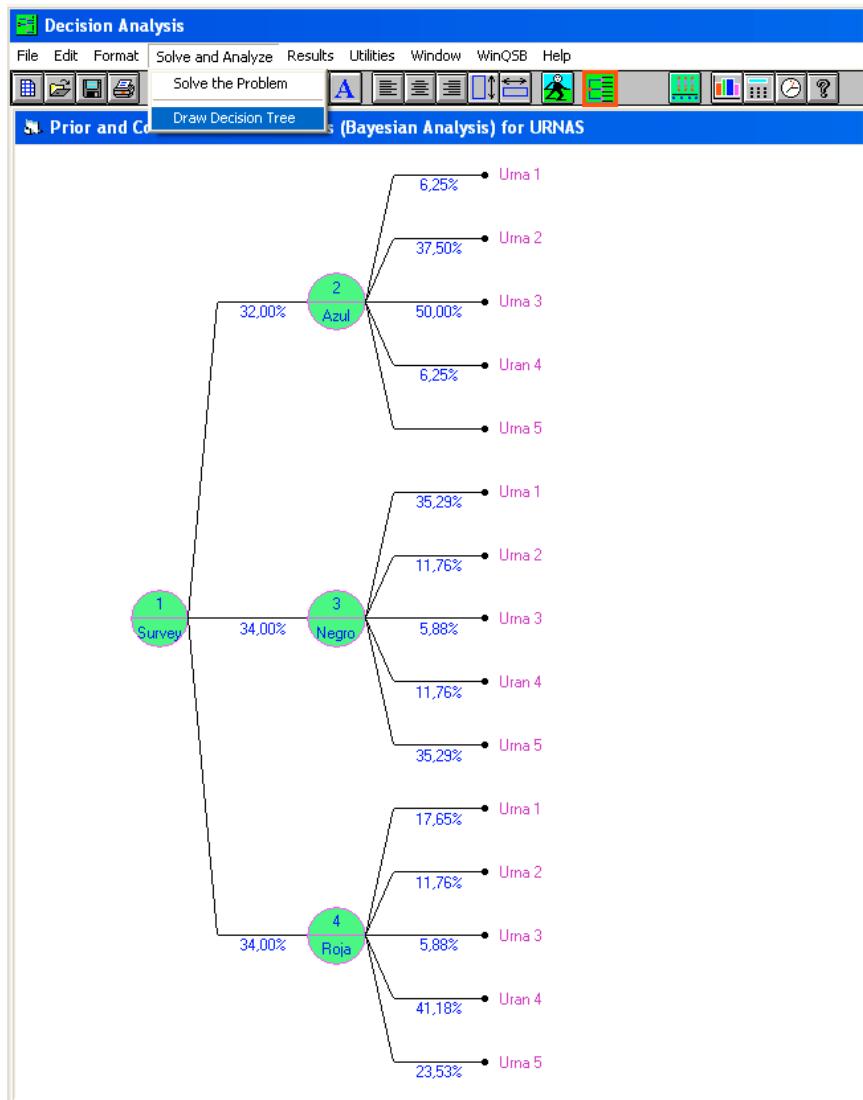
## Se introducen los datos pasados a probabilidades

El problema se resuelve pulsando el ícono **Solve the Problem** o en el menú **Solve and Analyze / Solve the Problem**



La probabilidad de que al seleccionar la urna 3 salga una bola roja es 0,0588 (5,88%)

Para activar el modo gráfico: **Solve and Analyze / Draw Decision Tree** o el ícono **Decision Tree Setup**





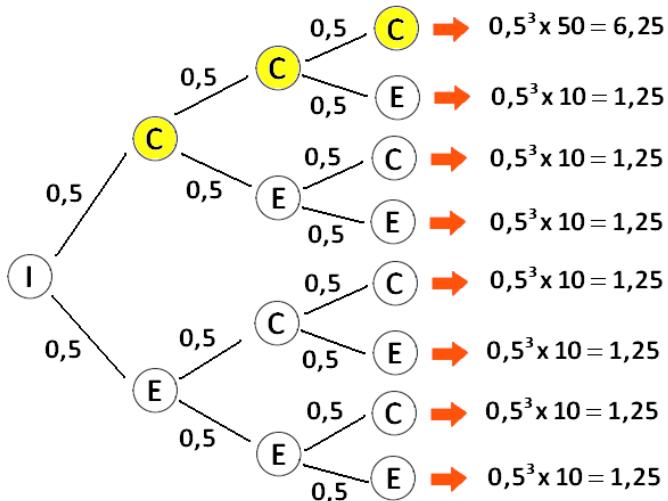




## TEORÍA DE LA DECICIÓN: Decision Tree Analysis

Se lanzan tres monedas al tiempo. El jugador gana si las tres monedas salen cara, pierde en caso de que se de un suceso contrario. El jugador invierte por jugada 10 euros y si gana recibe 500 euros. ¿Conviene participar en el juego?

Hay que considerar el diagrama de árbol que representa los sucesos:



Resultado esperado (Value Expected):

$$E(X) = 0,5^3 \times 50 - 7 \times 0,5^3 \times 10 = -2,5$$

Como la esperanza es negativa, no conviene participar en el juego

### Decision Analysis

Problem Specification

Problem Type

Bayesian Analysis  
 Payoff Table Analysis  
 Two-player, Zero-sum Game  
 Decision Tree Analysis

Problem Title

Number of Nodes/Events (Including Terminals):

OK Cancel Help

Los datos introducidos quedan como sigue:

**Decision Analysis**

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

Solve the Problem A Draw Decision Tree

Node/Event Number	Node Name or Description	Node Type (enter D or C)	Immediate Following Node (numbers separated by ',')	Node Payoff (+ profit, - cost)	Probability (if available)
1	Inicio	C	2,3		
2	C	C	4,5		0.5
3	E	C	6,7		0.5
4	CC	C	8,9		0.5
5	CE	C	10,11		0.5
6	EC	C	12,13		0.5
7	EE	C	14,15		0.5
8	CCC	C		50	0.5
9	CCE	C		-10	0.5
10	CEC	C		-10	0.5
11	CEE	C		-10	0.5
12	ECC	C		-10	0.5
13	ECE	C		-10	0.5
14	EEC	C		-10	0.5
15	EEE	C		-10	0.5

**Decision Analysis**

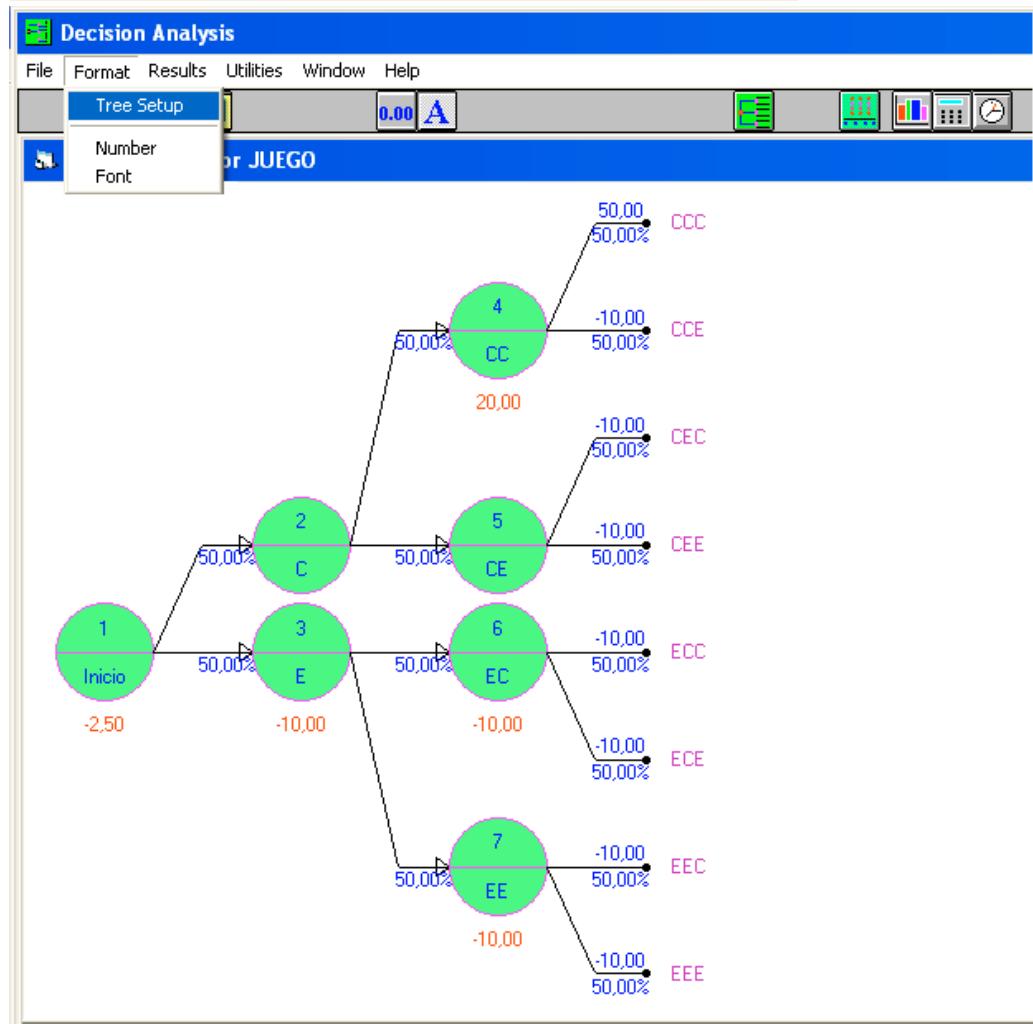
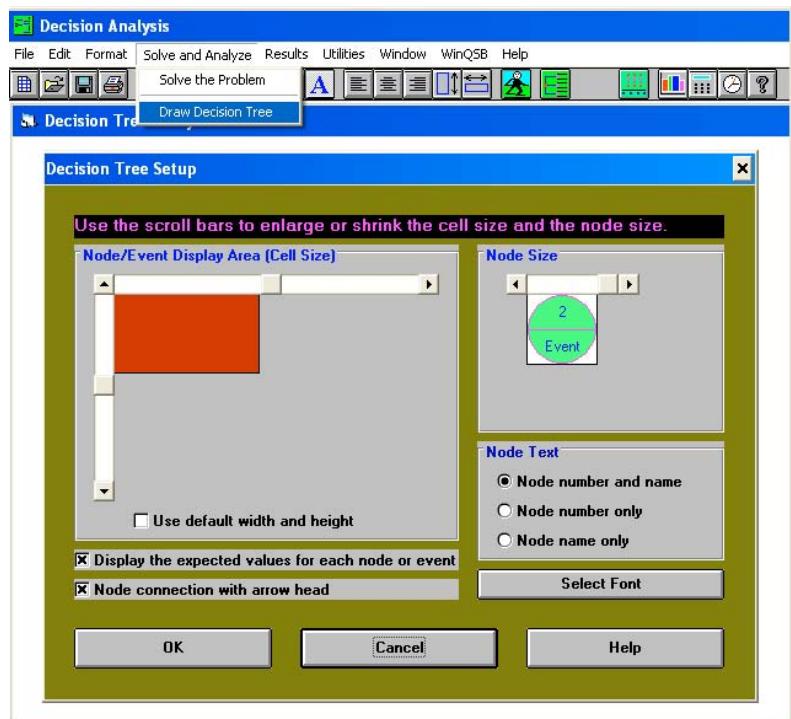
File Format Results Utilities Window Help

Show Decision Tree Analysis Show Decision Tree Graph

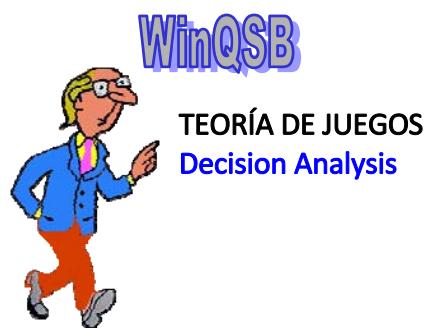
	Node/Event	Type	Expected value	Decision
1	Inicio	Chance node	-2,50 €	
2	C	Chance node	\$5	
3	E	Chance node	(\$10)	
4	CC	Chance node	\$20	
5	CE	Chance node	(\$10)	
6	EC	Chance node	(\$10)	
7	EE	Chance node	(\$10)	
8	CCC	Chance node	0	
9	CCE	Chance node	0	
10	CEC	Chance node	0	
11	CEE	Chance node	0	
12	ECC	Chance node	0	
13	ECE	Chance node	0	
14	EEC	Chance node	0	
15	EEE	Chance node	0	
Overall	Expected	Value =	-2,50 €	

Para visualizar el gráfico del árbol: [Solve and Analyze/ Draw Decision Tree](#)

Emerge la ventana [Decision Tree Setup](#) para personalizar el gráfico









**OBJETIVO TEORÍA DE JUEGOS:** Determinar la mejor estrategia para un jugador, considerando que su adversario es racional y realizará movimientos inteligentes en contra.

Si un jugador selecciona siempre la misma estrategia pura o selecciona estrategias puras en un orden fijo, su adversario reconocerá a tiempo el patrón y, si es posible, tratará de vencerlo.

La mejor estrategia es una estrategia mixta, definida por una distribución probabilística sobre una conjunto de estrategias puras.

**ESTRATEGIA DOMINANTE:** Cuando es la mejor opción de un jugador para todas las posibles acciones del contrincante (contrincantes).

Algunas veces una fila o columna de la matriz de pagos carece de efectividad para influir sobre las estrategias óptimas y el valor del juego.

Una estrategia pura A es dominada por otra estrategia pura B cuando, para cada estrategia pura del oponente, el pago asociado con A no es mejor que el pago asociado con B.

Como una estrategia pura dominada no puede ser nunca parte de una estrategia óptima, la fila o columna correspondiente en la matriz del juego debe ser eliminada.

**ESTRATEGIA DÉBILMENTE DOMINANTE:** Cuando no es peor que ninguna otra estrategia. Es igual decir que es la mejor o al menos igual a otra.

Una estrategia dominante es también débilmente dominante. El recíproco no es cierto.

**VALOR DEL JUEGO:** Pago que se obtiene para el jugador 1 cuando ambos juegan de manera óptima.

**JUEGO JUSTO:** Cuando el valor del juego es 0.

**PUNTO DE SILLA:** Minimax = Maximin

En un Punto de Silla ningún jugador puede aprovechar la estrategia conocida de su adversario. Es una solución estable.

**JUEGOS INESTABLES (ESTRATEGIAS MIXTAS):** Se basan en el criterio Mínimax, la única diferencia es que el jugador A elige  $x_i$ , maximizando el pago esperado más pequeño en una columna, mientras que el jugador B selecciona  $y_j$ , minimizando el pago esperado en una fila.

En estrategias puras y estrategias mixtas: Pago esperado mínimo < Pago esperado máximim

Cuando  $(x_i^*, y_j^*)$  corresponden a la solución óptima se cumple la igualdad y los valores que resultan llegan a ser iguales al valor esperado (óptimo) del juego.

Si  $(x_i^*, y_j^*)$  son las soluciones óptimas para ambos jugadores, cada elemento del pago  $A_{ij}$  estará asociado a la probabilidad  $(x_i^*, y_j^*)$

**CRITERIO MINIMAX:** Se puede extender a juegos que no tienen punto silla y, que por tanto, necesitan estrategias mixtas. El criterio establece que un jugador debe elegir la estrategia mixta que minimice la máxima pérdida esperada para si mismo.

Cuando solo se usan estrategias puras, los juegos que no tienen punto silla son inestables.

El criterio Minimax proporciona una solución estable (el valor del juego), de manera que ninguno de los dos jugadores puede mejorar cambiando unilateralmente su estrategia.

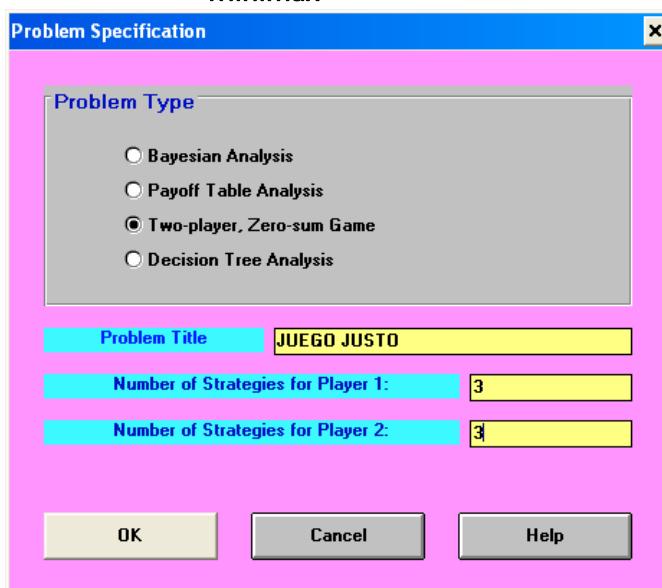


## JUEGOS DE SUMA CERO: JUEGO JUSTO (Minimax = Maximin). Punto de Silla

Cuando los intereses de los dos jugadores se centran en un mismo valor de la matriz de pagos, el juego tiene un **punto de silla** o equilibrio y esa cantidad constituye el valor del juego.

Encontrar el valor del juego y estrategias que seguirán los jugadores, siendo la matriz de pagos:

		Jugador 2			Mínimo
		B1	B2	B3	
Jugador 1	A1	-3	-2	6	-3
	A2	2	0	2	0
	A3	5	-2	-4	-4
Máximo		5	0	6	
			↑ Minimax	Punto Silla	



Player1 \ Player2	B1	B2	B3
A1	-3	-2	6
A2	2	0	2
A3	5	-2	-4

	Player	Strategy	Dominance	Elimination Sequence
1	1	A1	Not Dominated	
2	1	A2	Not Dominated	
3	1	A3	Not Dominated	
4	2	B1	Not Dominated	
5	2	B2	Not Dominated	
6	2	B3	Not Dominated	
***	Saddle Point	(Equilibrium)		is Achieved!!
	The Best Pure Strategy for Player 1:	A2		
	The Best Pure Strategy for Player 2:	B2		
	Stable Payoff for Player 1 =	0		
	It is a Fair Game!!!			

La estrategia del Jugador 1 es A2 y la estrategia del Jugador 2 es B2. El valor del juego es 0.



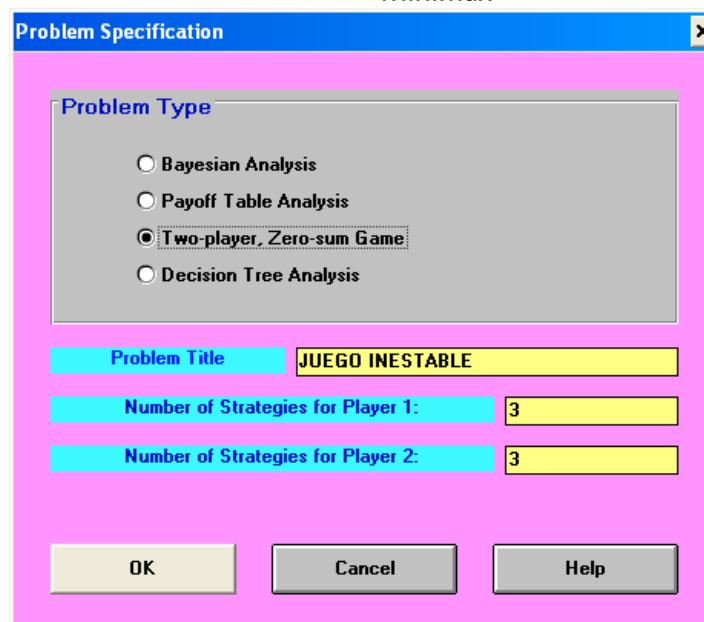
## JUEGOS DE SUMA CERO: JUEGO INESTABLE (Minimax ≠ Maximin). Sin Punto de Silla

Si los jugadores distribuyen su tiempo de juego entre varias estrategias, se da una estrategia mixta.

Encontrar las estrategias que seguirán los jugadores, siendo la matriz de pagos:

		Jugador 2			Mínimo
		B1	B2	B3	
Jugador 1	A1	0	-2	2	-2
	A2	5	4	-3	-3
	A3	2	3	-4	-4
Máximo		5	4	2	

↑ Minimax



**Decision Analysis**

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

Payoff Table of Zero-Sum Game for JUEGO INESTABLE

Player1 \ Player2	B1	B2	B3
A1	0	-2	2
A2	5	4	-3
A3	2	3	4

	Player	Strategy	Dominance	Elimination Sequence
1	1	A1	Dominated by A3	
2	1	A2	Not Dominated	
3	1	A3	Not Dominated	
4	2	B1	Not Dominated	
5	2	B2	Not Dominated	
6	2	B3	Not Dominated	

	Player	Strategy	Optimal Probability
1	1	A1	0
2	1	A2	0,20
3	1	A3	0,80
1	2	B1	0,70
2	2	B2	0
3	2	B3	0,30
Expected Payoff for Player 1 =			2,60

La estrategia A1 del jugador 1 es dominada por la estrategia A3. El jugador 1 jugará la estrategia A2 el 20% de su tiempo y la estrategia A3 el 80% del tiempo.

El jugador 2 jugará la estrategia B1 el 70% del tiempo y la estrategia B3 el 30% del tiempo.

El valor del juego es 2,60, a favor del jugador 1.



**JUEGOS DE SUMA CERO: ESTRATEGIAS PURAS (Minimax = Maximin). Punto de Silla**

Un Juego en forma normal consiste en 2 jugadores, estrategias de acciones factibles y matriz de pagos (Payoffs).

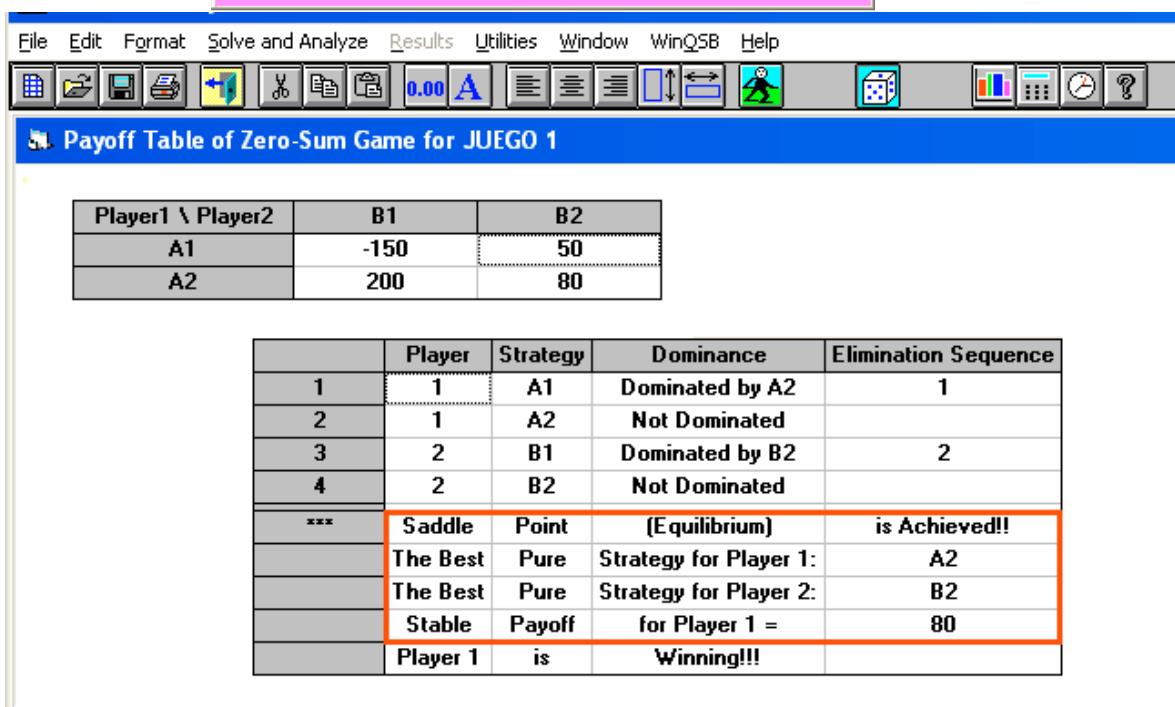
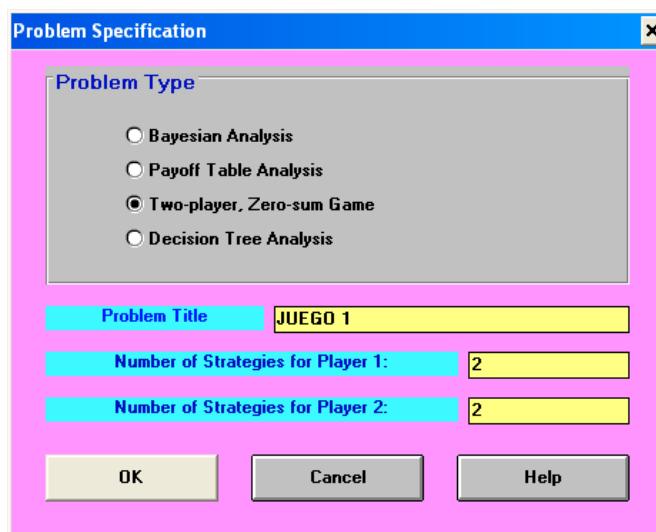
Un Juego es de suma cero cuando lo que gana un jugador lo pierde el otro.

Cuando los intereses de los dos jugadores se centran en un mismo valor de la matriz de pagos, el juego tiene un [punto de silla](#) o equilibrio y esa cantidad constituye el valor del juego.

Se dice entonces que los jugadores usan estrategias puras, lo que significa que cada jugador tendrá una estrategia que usará el 100% del tiempo. En otro caso, cuando los jugadores distribuyen su tiempo de juego entre varias estrategias, se da una estrategia mixta.

**Encontrar el valor del juego y estrategias que seguirán los jugadores, siendo la matriz de pagos:**

	B1	B2
A1	- 150	50
A2	200	80



La estrategia A1 del jugador 1 es dominada por la estrategia A2 y la estrategia B1 del jugador 2 es dominada por la estrategia B2, con lo que solo queda un valor de la matriz (80).

Por tanto, se alcanza un punto de silla (equilibrio), la estrategia pura para el jugador 1 es A2 y para el jugador 2 es B2. El valor del juego es 80, a favor del jugador 1.

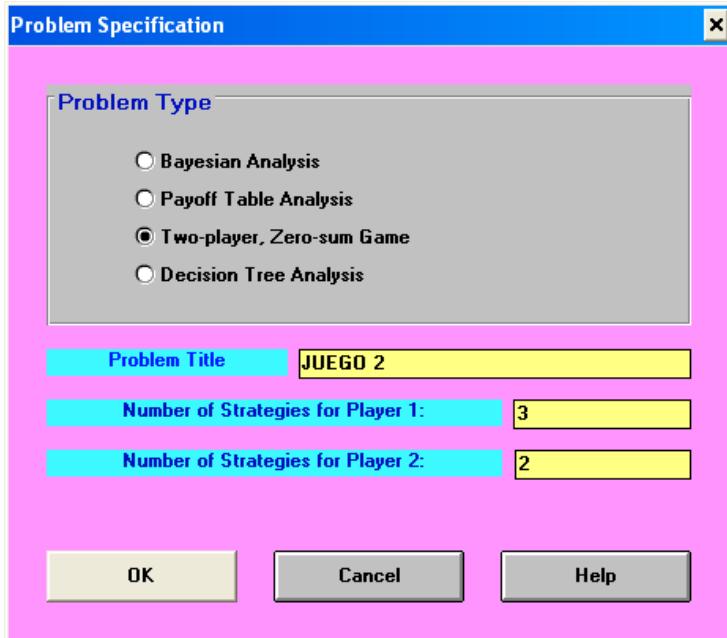




## JUEGOS DE SUMA CERO: ESTRATEGIAS MIXTAS (Minimax ≠ Maximin). Sin Punto de Silla

Encontrar las estrategias que seguirán los jugadores, siendo la matriz de pagos:

	B1	B2
A1	100	-50
A2	50	150
A3	-200	120



Payoff Table of Zero-Sum Game for JUEGO 2

Player1 \ Player2	B1	B2
A1	100	-50
A2	50	150
A3	-200	120

	Player	Strategy	Dominance	Elimination Sequence
1	1	A1	Not Dominated	
2	1	A2	Not Dominated	
3	1	A3	Dominated by A2	
4	2	B1	Not Dominated	
5	2	B2	Not Dominated	

	Player	Strategy	Optimal Probability
1	1	A1	0,40
2	1	A2	0,60
3	1	A3	0
1	2	B1	0,80
2	2	B2	0,20
	Expected	Payoff	for Player 1 =
			70

El valor del juego es 70, a favor del jugador 1.

No existe punto de silla (equilibrio), con lo que los jugadores se reparten su tiempo:

El jugador 1 jugará la estrategia A1 el 40%, la estrategia A2 el 60% y no juega la estrategia A3.

El jugador 2 jugará la estrategia B1 el 80% y la estrategia B2 el 20% .





## JUEGOS DE SUMA CERO: ESTRATEGIAS MIXTAS (Minimax ≠ Maximin). Sin Punto de Silla

Encontrar las estrategias que seguirán los jugadores, siendo la matriz de pagos:

		Jugador 2		Mínimo
		B1	B2	
Jugador 1	A1	2	4	2
	A2	2	3	2
	A3	3	2	-2
	A4	-2	6	
	Máximo	3	6	

↑ Minimax

El juego no tiene punto de silla (inestable). Sean  $p^*$  y  $q^* = 1 - p^*$  dos estrategias mixtas del jugador 2

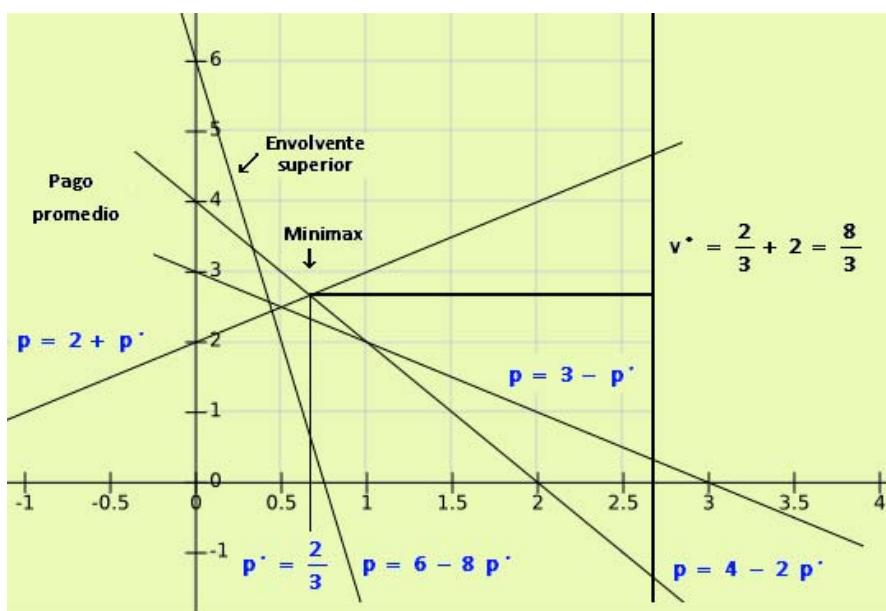
		Jugador 2		Jugador 2
		B1	B2	Pagos esperados
Jugador 1		$p^*$	$1 - p^*$	
	A1	2	4	$q = 2p^* + 4(1-p^*) = 4 - 2p^*$
	A2	2	3	$q = 2p^* + 3(1-p^*) = 3 - p^*$
	A3	3	2	$q = 3p^* + 2(1-p^*) = 2 + p^*$
	A4	-2	6	$q = -2p^* + 6(1-p^*) = 6 - 8p^*$

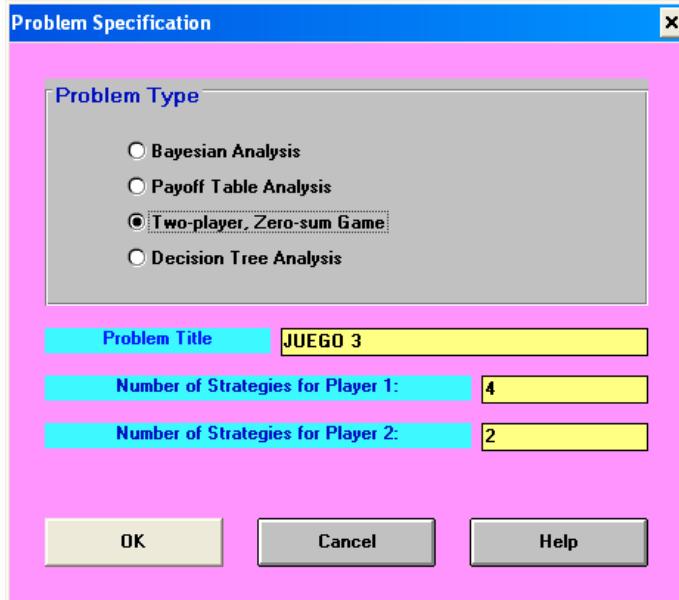
Representando  $p^*$  se determina el Minimax como el punto más bajo de la envolvente superior.

$$\text{Solución del Minimax: } 4 - 2p^* = 2 + p^* \rightarrow p^* = \frac{2}{3}$$

$$\text{Estrategia óptima para el jugador 1: } p = \frac{2}{3}$$

$$\text{Valor del juego: } v^* = 2 + p^* \rightarrow 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$





**Decision Analysis**

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

Payoff Table of Zero-Sum Game for JUEGO 3

Player1 \ Player2	B1	B2
A1	2	4
A2	2	3
A3	3	2
A4	-2	6

	Player	Strategy	Dominance	Elimination Sequence
1	1	A1	Not Dominated	
2	1	A2	Dominated by A1	
3	1	A3	Not Dominated	
4	1	A4	Not Dominated	
5	2	B1	Not Dominated	
6	2	B2	Not Dominated	

	Player	Strategy	Optimal Probability
1	1	A1	0,33
2	1	A2	0
3	1	A3	0,67
4	1	A4	0
1	2	B1	0,67
2	2	B2	0,33
Expected	Payoff	for Player 1 =	2,67

La estrategia óptima para el jugador 1 es A3 que jugara el 67% , mientras que la estrategia óptima para el jugador 2 es B1 que jugará el 67% .

El valor del juego a favor del jugador 1 es 2,67.



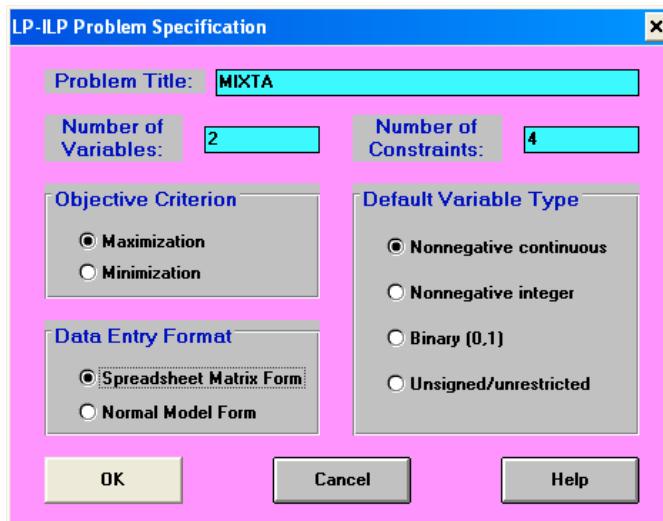
## SOLUCIÓN CON PROGRAMACIÓN LINEAL

		Jugador 2	
		B1 $y_1$	B2 $y_2$
Jugador 1	A1 ( $x_1$ )	2	4
	A2 ( $x_2$ )	2	3
	A3 ( $x_3$ )	3	2
	A4 ( $x_4$ )	-2	6

Maximizar  $z = y_1 + y_2$

restricciones:

$$\begin{cases} 2y_1 + 4y_2 \leq 1 \\ 2y_1 + 3y_2 \leq 1 \\ 3y_1 + 2y_2 \leq 1 \\ -2y_1 + 6y_2 \leq 1 \end{cases}$$



Linear and Integer Programming

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

ESTRATEGIAS MIXTAS

Variable -->	Y1	Y2	Direction	R. H. S.
Maximize	1	1		
C1	2	4	$\leq$	1
C2	2	3	$\leq$	1
C3	3	2	$\leq$	1
C4	-2	6	$\leq$	1
LowerBound	0	0		
UpperBound	M	M		
VariableType	Continuous	Continuous		

Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit $c_{ij}$	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. $c_{ij}$	Allowable Max. $c_{ij}$
1 Y1	0,2500	1,0000	0,2500	0	basic	0,5000	1,5000
2 Y2	0,1250	1,0000	0,1250	0	basic	0,6667	2,0000
Objective Function	(Max.) =	0,3750					

Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
1 C1	1,0000	$\leq$	1,0000	0	0,1250	0,6667	1,2000
2 C2	0,8750	$\leq$	1,0000	0,1250	0	0,8750	M
3 C3	1,0000	$\leq$	1,0000	0	0,2500	0,7000	1,5000
4 C4	0,2500	$\leq$	1,0000	0,7500	0	0,2500	M

## ESTRATEGIAS ÓPTIMAS JUGADOR 2

**Linear and Integer Programming**

File Format Results Utilities Window Help

0.00 A

**Solution Summary for ESTRATEGIAS MIXTAS**

	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit C(i)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status
1	Y1	0,2500	1,0000	0,2500	0	basic
2	Y2	0,1250	1,0000	0,1250	0	basic
	Objective Function	(Max.) =	0,3750			

$$y_1^* = \frac{0,2500}{0,3750} = 0,67 \quad y_2^* = \frac{0,1250}{0,3750} = 0,33 \quad v^* = \frac{1}{0,3750} = 2,67$$

La estrategia óptima para el jugador 2 es B1 que jugará el 67% del tiempo.

## ESTRATEGIAS ÓPTIMAS JUGADOR 1: SIMPLEX DUAL

**Linear and Integer Programming**

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

Number Font Alignment

MIXT

Row Height Column Width

Switch to Normal Model Form **Switch to Dual Form**

Variable --> Y1 Y2 Direction R. H. S.

Maximize	1	1		
C1	2	4	<=	1
C2	2	3	<=	1
C3	3	2	<=	1
C4	-2	6	<=	1
LowerBound	0	0		
UpperBound	M	M		
VariableType	Continuous	Continuous		

Variable --> X1 X2 X3 X4 Direction R. H. S.

Minimize	1	1	1	1		
Y1	2	2	3	-2	>=	1
Y2	4	3	2	6	>=	1
LowerBound	0	0	0	0		
UpperBound	M	M	M	M		
VariableType	Continuous	Continuous	Continuous	Continuous		

**Linear and Integer Programming**

File Format Results Utilities Window Help

0.00 A

**Solution Summary for ESTRATEGIAS MIXTAS**

	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit C(i)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status
1	X1	0,1250	1,0000	0,1250	0	basic
2	X2	0	1,0000	0	0,1250	at bound
3	X3	0,2500	1,0000	0,2500	0	basic
4	X4	0	1,0000	0	0,7500	at bound
	Objective Function	(Min.) =	0,3750			

$$x_1^* = \frac{0,1250}{0,3750} = 0,33 \quad x_3^* = \frac{0,2500}{0,3750} = 0,67$$

La estrategia óptima para el jugador 1 es A3 que jugará el 67% del tiempo.





## ESTRATEGIAS MIXTAS (Minimax $\neq$ Maximin) - Maximin < 0

Analizar las estrategias que seguirán los jugadores, siendo la matriz de pagos:

		Jugador 2			Mínimo
		B1	B2	B3	
Jugador 1	A1	3	-1	-3	-3
	A2	-3	3	-1	-3
	A3	-4	-3	3	-4
Máximo		3	3	3	
Minimax					

Cuando el Maximin < 0 el valor del juego puede ser negativo o cero.

Player1 \ Player2	B1	B2	B3
A1	3	-1	-3
A2	-3	3	-1
A3	-4	-3	3

	Player	Strategy	Dominance	Elimination Sequence
1	1	A1	Not Dominated	
2	1	A2	Not Dominated	
3	1	A3	Not Dominated	
4	2	B1	Not Dominated	
5	2	B2	Not Dominated	
6	2	B3	Not Dominated	

	Player	Strategy	Optimal Probability
1	1	A1	0.44
2	1	A2	0.24
3	1	A3	0.31
1	2	B1	0.31
2	2	B2	0.24
3	2	B3	0.44

Expected Payoff for Player 1 =	0
--------------------------------	---

Para evitar esta situación se agrega a todos los elementos de la matriz de pago una constante k que sea al menos el valor más grande de la matriz. Sea k = 3, al valor del juego hay que restar k = 3

Player1 \ Player2	B1	B2	B3
A1	3	-1	-3
A2	-3	3	-1
A3	-4	-3	3

↓

$k = 3$

Player1 \ Player2	B1	B2	B3
A1	6	2	0
A2	0	6	2
A3	-1	0	6

	Player	Strategy	Dominance	Elimination Sequence
1	1	A1	Not Dominated	
2	1	A2	Not Dominated	
3	1	A3	Not Dominated	
4	2	B1	Not Dominated	
5	2	B2	Not Dominated	
6	2	B3	Not Dominated	

	Player	Strategy	Optimal Probability
1	1	A1	0,44
2	1	A2	0,24
3	1	A3	0,31
1	2	B1	0,31
2	2	B2	0,24
3	2	B3	0,44

Expected Payoff for Player 1 = 2,36 - K

### ESTRATEGIAS ÓPTIMAS JUGADOR 1

La estrategia óptima para el jugador 1 es el 44% la opción A1, el 24% la opción A2 y el 31% la opción A3. El valor del juego es  $2,36 - 3 = -0,64$

### ESTRATEGIAS ÓPTIMAS JUGADOR 2

La estrategia óptima para el jugador 2 es el 31% la opción B1, el 24% la opción B2 y el 44% la opción B3.



### SOLUCIÓN CON PROGRAMACIÓN LINEAL

Modificada

Jugador 2

		B1	B2	B3
		$y_1$	$y_2$	$y_3$
Jugador 1	A1 ( $x_1$ )	6	2	0
	A2 ( $x_2$ )	0	6	2
	A3 ( $x_3$ )	-1	0	6

### ESTRATEGIAS ÓPTIMAS DEL JUGADOR 1: SIMPLEX

Maximizar  $z = x_1 + x_2 + x_3$

restricciones:

$$\begin{cases} 6x_1 - x_3 \leq 1 \\ 2x_1 + 6x_2 \leq 1 \\ 2x_2 + 6x_3 \leq 1 \end{cases}$$

Linear and Integer Programming

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

Variable -->	A1	A2	A3	Direction	R. H. S.
Maximize	1	1	1		
C1	6		-1	<=	1
C2	2	6		<=	1
C3		2	6	<=	1
LowerBound	0	0	0		
UpperBound	M	M	M		
VariableType	Continuous	Continuous	Continuous		

	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit C[i]	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status
1	A1	0,1887	1,0000	0,1887	0	basic
2	A2	0,1038	1,0000	0,1038	0	basic
3	A3	0,1321	1,0000	0,1321	0	basic
	Objective Function	(Max.) =		0,4245		

$$x_1^* = \frac{0,1887}{0,4245} = 0,44 \quad x_2^* = \frac{0,1038}{0,4245} = 0,24 \quad x_3^* = \frac{0,1321}{0,4245} = 0,31 \quad v^* = \frac{1}{0,4245} - 3 = -0,64$$

La estrategia óptima para el jugador 1 es jugar la opción A1 el 44%, la opción A2 el 24% y la opción A3 el 31%. El valor del juego es -0,64.

### ESTRATEGIAS ÓPTIMAS DEL JUGADOR 2: SIMPLEX DUAL (Format / Switch to Dual Form)

Linear and Integer Programming

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

Variable -->	B1	B2	B3	Direction	R. H. S.
Minimize	1	1	1		
C1	6	2		>=	1
C2		6	2	>=	1
C3	-1		6	>=	1
LowerBound	0	0	0		
UpperBound	M	M	M		
VariableType	Continuous	Continuous	Continuous		

	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit C[i]	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status
1	B1	0,1321	1,0000	0,1321	0	basic
2	B2	0,1038	1,0000	0,1038	0	basic
3	B3	0,1887	1,0000	0,1887	0	basic
	Objective Function	(Min.) =		0,4245		

$$y_1^* = \frac{0,1321}{0,4245} = 0,31 \quad y_2^* = \frac{0,1038}{0,4245} = 0,24 \quad y_3^* = \frac{0,1887}{0,4245} = 0,44 \quad v^* = \frac{1}{0,4245} - 3 = -0,64$$

La estrategia óptima para el jugador 2 es jugar la opción B1 el 31%, la opción B2 el 24% y la opción B3 el 44%. El valor del juego es -0,64.







Queuing Analysis	
Data Description	ENTRY
Number of servers	
Service rate (per server per hora)	
Customer arrival rate (per hora)	
Queue capacity (maximum waiting space)	M
Customer population	M
Busy server cost per hora	
Idle server cost per hora	
Customer waiting cost per hora	
Customer being served cost per hora	
Cost of customer being balked	
Unit queue capacity cost	

Numero de servidores (Number of Servers) : S =

Tasa de servicio (Service Rate) :  $\mu$  =

Tasa de llegada de clientes (Customer Arrival Rate):  $\lambda$  =

Capacidad de la cola (Queue Capacity): Por defecto aparece M indicando que es infinita. Cuando la cola es finita se pone el tamaño máximo de la cola menos el número de servidores ( $k - s$ )

Tamaño de la población de clientes (Customer Population): Aparece por defecto M, indicando que es infinita. En caso de fuente limitada se pone el tamaño de la población.

Costo del servidor ocupado (Busy Server Cost per Hour)

Costo del servidor desocupado (Idle Server Cost per Hour)

Costo de espera de los clientes (Customer Waiting Cost per Hour)

Costo de los clientes siendo servidos (Customer Being Served Cost per Hour)

Costo por la pérdida de clientes, en el caso que la cola sea finita (Cost of Customer Being Balked)

Costo unitario de capacidad de cada unidad de cola (Unit Queue Capacity Cost)

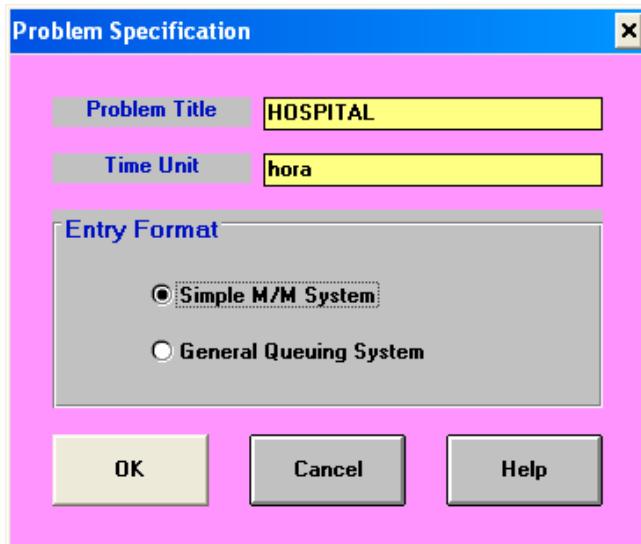


## TEORÍA DE COLAS: HOSPITAL - Queuing Analysis

La sala de urgencias de un hospital tiene una tasa media de 3 pacientes a la hora, siguiendo una distribución de Poisson. La sala cuenta con dos enfermeras que invierten un promedio de 15 minutos por paciente, según una distribución exponencial. Para evitar la cola de espera surgen dos opiniones: El jefe de sala solicita una enfermera más, la dirección del hospital plantea que en ocasiones las dos enfermeras están ociosas y considera que se debe reducir a una la cantidad de enfermeras.

Se sabe que una enfermera cobre 10 euros/hora y se ha valorado que por cada hora que un paciente permanece en la sala el coste es de 5 euros/hora.

¿Cuántas enfermeras debe tener la sala para minimizar el coste total del sistema?



Introducidos los datos:

Data Description	ENTRY
Number of servers	2
Service rate (per server per hora)	4
Customer arrival rate (per hora)	3
Queue capacity (maximum waiting space)	M
Customer population	M
Busy server cost per hora	10
Idle server cost per hora	
Customer waiting cost per hora	5
Customer being served cost per hora	
Cost of customer being balked	
Unit queue capacity cost	

The screenshot shows the 'Queuing Analysis' software interface. The menu bar includes File, Format, Results, Utilities, Window, and Help. The toolbar features various icons for file operations and analysis. A status bar at the bottom displays '0.00 A' and several small icons. The main window title is 'System Performance Summary for HOSPITAL'. Below the title is a table with 22 rows, each representing a performance measure and its result. The columns are 'Performance Measure' and 'Result'. The table data is as follows:

	Performance Measure	Result
1	<b>System: M/M/2</b>	From Formula
2	Customer arrival rate ( $\lambda$ ) per hora =	3,0000
3	Service rate per server ( $\mu$ ) per hora =	4,0000
4	Overall system effective arrival rate per hora =	3,0000
5	Overall system effective service rate per hora =	3,0000
6	Overall system utilization =	37,5000 %
7	Average number of customers in the system ( $L_s$ ) =	0,8727
8	Average number of customers in the queue ( $L_q$ ) =	0,1227
9	Average number of customers in the queue for a busy system ( $L_b$ ) =	0,6000
10	Average time customer spends in the system ( $W_s$ ) =	0,2909 horas
11	Average time customer spends in the queue ( $W_q$ ) =	0,0409 horas
12	Average time customer spends in the queue for a busy system ( $W_b$ ) =	0,2000 horas
13	The probability that all servers are idle ( $P_0$ ) =	45,4545 %
14	The probability an arriving customer waits ( $P_w$ ) or system is busy ( $P_b$ ) =	20,4545 %
15	Average number of customers being balked per hora =	0
16	Total cost of busy server per hora =	\$7,5000
17	Total cost of idle server per hora =	\$0
18	Total cost of customer waiting per hora =	\$0,6136
19	Total cost of customer being served per hora =	\$0
20	Total cost of customer being balked per hora =	\$0
21	Total queue space cost per hora =	\$0
22	Total system cost per hora =	\$8,1136

2. Razón de llegada de clientes por hora:  $\lambda = 3$  pacientes/hora
3. Razón de servicio por servidor por hora:  $\mu = 4$  pacientes/hora
4. Razón de llegada efectiva del sistema completo por hora: 3 pacientes/hora
5. Razón de servicio efectivo del sistema completo por hora: 3 pacientes/hora
6. Utilización del sistema completo:  $\rho = 37,5\%$
7. Número medio de clientes en el sistema:  $L_s = 0,8727$  clientes
8. Número medio de clientes en la cola:  $L_q = 0,1227$  clientes
9. Número medio de clientes en la cola cuando el sistema esté lleno:  $L_b = 0,6$  clientes
10. Tiempo medio de estancia de un cliente en el sistema :  $W_s = 0,2909$  horas
11. Tiempo medio de estancia de un cliente en la cola:  $W_q = 0,0409$  horas

12. Tiempo medio de estancia de clientes en la cola cuando el sistema está lleno:  $W_b = 0,2000$  hora

13. Probabilidad de que no haya clientes en el sistema o probabilidad de que todos los servidores estén ociosos:  $p_0 = 45,4545\%$

14. Probabilidad de que un cliente llegue al sistema y tenga que esperar, equivalente a la probabilidad de que esté ocupado el sistema:  $P(T > 0) = 20,4545\%$

15. Número medio de clientes que abandonan la cola por hora (para el caso de cola finita), en este caso como la cola es infinita es cero.

16. Costo total de que el servidor esté ocupado por hora: 7,5 €/h

17. Costo total de que el servidor esté desocupado por hora: 0 €/h

18. Costo total de la espera de los clientes por hora: 0,6136 €/h

19. Costo total de ser atendido el cliente por hora: 0 €/h

20. Costo total por los clientes perdidos por hora: 0 €/h

21. Costo total del espacio en cola por hora: 0 €/h

22. Costo total del sistema por hora: 8,1136 €/h

Presionando [F1—Glossary – Queuing Related Cost](#) aparecen las fórmulas utilizadas por el software para calcular los costos.





## TEORÍA DE COLAS: OFICINA POSTAL - Queuing Analysis

Una oficina postal posee 3 empleados y atiende público los sábados entre las 9 h a las 13 h, durante este período son atendidos en promedio 100 clientes/hora. Cada uno de los dependientes atiende a 1,5 clientes/minuto. La distribución de Poisson y exponencial describen la llegada de clientes y el proceso de atención de estos respectivamente.

La gerencia de la oficina desea conocer las medidas relevantes al servicio en orden a:

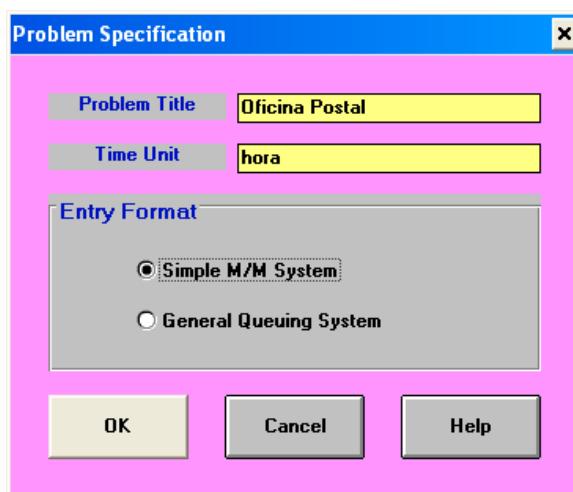
Evaluación del nivel del servicio prestado.

Efecto de reducir un empleado

$$\lambda = 100 \text{ clientes/hora} \quad \mu = \frac{60}{1,5} \text{ clientes/hora}$$

$$\text{Utilización del servicio: } \rho = \frac{\lambda}{k \cdot \mu} = \frac{100}{3 \cdot 40} = 0,83 < 1 \text{ estado estacionario}$$

$$\text{Con } k = 2 \text{ empleados: } \rho = \frac{100}{2 \cdot 40} = 1,25 > 1 \rightarrow \text{No es posible quitar un empleado}$$



Data Description	ENTRY
Number of servers	3
Service rate (per server per hour)	40
Customer arrival rate (per hour)	100
Queue capacity (maximum waiting space)	M
Customer population	M
Busy server cost per hour	
Idle server cost per hour	
Customer waiting cost per hour	
Customer being served cost per hour	
Cost of customer being balked	
Unit queue capacity cost	

## MEDIDAS DE RENDIMIENTO

**Queuing Analysis**

File Format Results Utilities Window Help

Performance Summary Probability Summary Show Sensitivity Analysis - Table Show Sensitivity Analysis - Graph Show Capacity Analysis

**System**

**Oficina Postal**

	Performance Measure	Result
1	<b>System: M/M/3</b>	From Formula
2	<b>Customer arrival rate (<math>\lambda</math>) per hora =</b>	100,0000
3	<b>Service rate per server (<math>\mu</math>) per hora =</b>	40,0000
4	<b>Overall system effective arrival rate per hora =</b>	100,0000
5	<b>Overall system effective service rate per hora =</b>	100,0000
6	<b>Overall system utilization =</b>	83,3333 %
7	<b>Average number of customers in the system (<math>L</math>) =</b>	6,0112
8	<b>Average number of customers in the queue (<math>L_q</math>) =</b>	3,5112
9	<b>Average number of customers in the queue for a busy system (<math>L_b</math>) =</b>	5,0000
10	<b>Average time customer spends in the system (<math>W</math>) =</b>	0,0601 horas
11	<b>Average time customer spends in the queue (<math>W_q</math>) =</b>	0,0351 horas
12	<b>Average time customer spends in the queue for a busy system (<math>W_b</math>) =</b>	0,0500 horas
13	<b>The probability that all servers are idle (<math>P_o</math>) =</b>	4,4944 %
14	<b>The probability an arriving customer waits (<math>P_w</math>) or system is busy (<math>P_b</math>) =</b>	70,2247 %
15	<b>Average number of customers being balked per hora =</b>	0
16	<b>Total cost of busy server per hora =</b>	\$0
17	<b>Total cost of idle server per hora =</b>	\$0
18	<b>Total cost of customer waiting per hora =</b>	\$0
19	<b>Total cost of customer being served per hora =</b>	\$0
20	<b>Total cost of customer being balked per hora =</b>	\$0
21	<b>Total queue space cost per hora =</b>	\$0
22	<b>Total system cost per hora =</b>	\$0

**Queuing Analysis**

File Format Results Utilities Window Help

0.00 A

**System Probability Summary for Oficina Postal**

n	Estimated Probability of n Customers in the System	Cumulative Probability
0	0,0449	0,0449
1	0,1124	0,1573
2	0,1404	0,2978
3	0,1170	0,4148
4	0,0975	0,5123
5	0,0813	0,5936
6	0,0677	0,6613
7	0,0564	0,7178
8	0,0470	0,7648
9	0,0392	0,8040
10	0,0327	0,8367

Si se reduce un empleado s = 2 servidores

Queueing Analysis

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

0.00 A

Oficina Postal

Data Description	ENTRY
Number of servers	2
Service rate (per server per hour)	40
Customer arrival rate (per hour)	100
Queue capacity (maximum waiting space)	M
Customer population	M
Busy server cost per hour	
Idle server cost per hour	
Customer waiting cost per hour	
Customer being served cost per hour	
Cost of customer being balked	
Unit queue capacity cost	

Instability Warning

Note: The queuing system is classified as: M/M/2. However, utilization factor is 1.25. The system is expected to be unstable and has no steady-state solution. You may choose simulation (by discrete-event Monte Carlo simulation) to obtain a sample performance result.

Simulation

Cancel

Help

No puede ocurrir.





## TEORÍA DE COLAS: TALLER - Queuing Analysis

En un taller, las máquinas suelen fallar según una ley de Poisson de tasa igual a 3 maq/hora, con un coste de parada de una máquina de 100 euros/hora. Pueden elegirse dos alternativas:

- Un mecánico repara las máquinas según una ley de servicio exponencial de tasa 4 maq/hora cobrando 30 euros/hora.
- Un experto repara las máquinas según una distribución exponencial de tasa 5 maq/hora exigiendo 40 euros/hora.

¿Cuál de las dos alternativas resulta más beneficiosa?

- a) Se trata de un modelo de cola M/M/1

Tasa de llegada:  $\lambda = 3$  máquinas/hora

Tasa de servicio:  $\mu = 4$  máquinas/hora

$$\text{Número de máquinas en sistema: } L_s = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{3}{4 - 3} = 3 \text{ máquinas}$$

Coste esperado del servicio:  $E(\text{CS}) = 30$  euros/hora

Coste esperado de la espera:  $E(\text{CW}) = 100 \cdot L_s = 100 \cdot 3 = 300$  euros/hora

Coste total del proceso:  $E(\text{CT}) = E(\text{CS}) + E(\text{CW}) = 30 + 300 = 330$  euros/hora

- b) Tasa de llegada:  $\lambda = 3$  máquinas/hora

Tasa de servicio:  $\mu = 5$  máquinas/hora

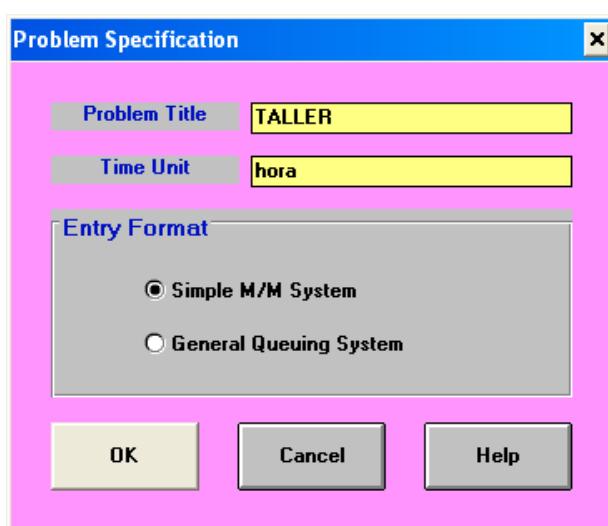
$$\text{Número de máquinas en sistema: } L_s = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{3}{5 - 3} = 1,5 \text{ máquinas}$$

Coste esperado del servicio:  $E(\text{CS}) = 40$  euros/hora

Coste esperado de la espera:  $E(\text{CW}) = 100 \cdot L_s = 100 \cdot 1,5 = 150$  euros/hora

Coste total del proceso:  $E(\text{CT}) = E(\text{CS}) + E(\text{CW}) = 40 + 150 = 190$  euros/hora

Resulta más beneficiosa la alternativa (b)



**Queuing Analysis**

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

0.00 A

Data Description	ENTRY
Number of servers	1
Service rate (per server per hour)	4
Customer arrival rate (per hour)	3
Queue capacity (maximum waiting space)	M
Customer population	M
Busy server cost per hour	130
Idle server cost per hour	30
Customer waiting cost per hour	100
Customer being served cost per hour	
Cost of customer being balked	
Unit queue capacity cost	

**Queuing Analysis**

File Format Results Utilities Window Help

0.00 A

**System Performance Summary for TALLER**

	Performance Measure	Result
1	System: M/M/1	From Formula
2	Customer arrival rate ( $\lambda$ ) per hour =	3,0000
3	Service rate per server ( $\mu$ ) per hour =	4,0000
4	Overall system effective arrival rate per hour =	3,0000
5	Overall system effective service rate per hour =	3,0000
6	Overall system utilization =	75,0000 %
7	Average number of customers in the system ( $L$ ) =	3,0000
8	Average number of customers in the queue ( $L_q$ ) =	2,2500
9	Average number of customers in the queue for a busy system ( $L_b$ ) =	3,0000
10	Average time customer spends in the system ( $W$ ) =	1,0000 hours
11	Average time customer spends in the queue ( $W_q$ ) =	0,7500 hours
12	Average time customer spends in the queue for a busy system ( $W_b$ ) =	1,0000 hours
13	The probability that all servers are idle ( $P_0$ ) =	25,0000 %
14	The probability an arriving customer waits ( $P_w$ ) or system is busy ( $P_b$ ) =	75,0000 %
15	Average number of customers being balked per hour =	0
16	Total cost of busy server per hour =	\$97,5000
17	Total cost of idle server per hour =	\$7,5000
18	Total cost of customer waiting per hour =	\$225,0000
19	Total cost of customer being served per hour =	\$0
20	Total cost of customer being balked per hour =	\$0
21	Total queue space cost per hour =	\$0
22	Total system cost per hour =	\$330,0000

b)

**Queuing Analysis**

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

0.00 A

**TALLER**

Data Description	ENTRY
Number of servers	1
Service rate (per server per hour)	5
Customer arrival rate (per hour)	3
Queue capacity (maximum waiting space)	M
Customer population	M
Busy server cost per hour	140
Idle server cost per hour	40
Customer waiting cost per hour	100
Customer being served cost per hour	
Cost of customer being balked	
Unit queue capacity cost	

**Queuing Analysis**

File Format Results Utilities Window Help

0.00 A

**System Performance Summary for TALLER**

	Performance Measure	Result
1	System: M/M/1	From Formula
2	Customer arrival rate ( $\lambda$ ) per hour =	3,0000
3	Service rate per server ( $\mu$ ) per hour =	5,0000
4	Overall system effective arrival rate per hour =	3,0000
5	Overall system effective service rate per hour =	3,0000
6	Overall system utilization =	60,0000 %
7	Average number of customers in the system ( $L$ ) =	1,5000
8	Average number of customers in the queue ( $L_q$ ) =	0,9000
9	Average number of customers in the queue for a busy system ( $L_b$ ) =	1,5000
10	Average time customer spends in the system ( $W$ ) =	0,5000 hours
11	Average time customer spends in the queue ( $W_q$ ) =	0,3000 hours
12	Average time customer spends in the queue for a busy system ( $W_b$ ) =	0,5000 hours
13	The probability that all servers are idle ( $P_0$ ) =	40,0000 %
14	The probability an arriving customer waits ( $P_w$ ) or system is busy ( $P_b$ ) =	60,0000 %
15	Average number of customers being balked per hour =	0
16	Total cost of busy server per hour =	\$84,0000
17	Total cost of idle server per hour =	\$16,0000
18	Total cost of customer waiting per hour =	\$90,0000
19	Total cost of customer being served per hour =	\$0
20	Total cost of customer being balked per hour =	\$0
21	Total queue space cost per hour =	\$0
22	Total system cost per hour =	\$190,0000





## TEORÍA DE COLAS: CAMIONES - Queuing Analysis

Un proceso de descarga de camiones se realiza por medio de unas palas. El tiempo medio entre llegadas es de 30 minutos, la tasa de descarga es de 3 camiones/hora. El coste de utilización de cada pala y del trabajo del operario es de 70 euros/hora. El coste del tiempo ocioso de un camión y su conductor se estima en 100 euros/hora. Los tiempos de llegada y servicio siguen, respectivamente, una distribución de Poisson y una distribución exponencial.

¿Cuántas palas deben utilizarse?

En un modelo de cola M/M/1

Tasa de llegada:  $\lambda = 2$  camiones/hora

Tasa de servicio:  $\mu = 3$  camiones/hora

$$\text{Número de máquinas en sistema: } L_s = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{2}{3 - 2} = 2 \text{ máquinas}$$

Coste esperado del servicio:  $E(\text{CS}) = 70$  euros/hora

Coste esperado de la espera:  $E(\text{CW}) = 100 \cdot L_s = 100 \cdot 2 = 200$  euros/hora

Coste total del proceso:  $E(\text{CT}) = E(\text{CS}) + E(\text{CW}) = 70 + 200 = 270$  euros/hora

La incógnita es el número de servidores (palas), y para determinar su número, es necesario minimizar el coste total del proceso de descarga.

The screenshot shows the WinQSB software interface. The main window displays the 'Queuing Analysis' menu bar with options like File, Edit, Format, Solve and Analyze, Results, Utilities, Window, WinQSB, and Help. Below the menu is a toolbar with various icons. A sub-menu 'CAMIONES' is open under 'Solve the Performance'. The 'Perform Capacity Analysis' option is highlighted. The main workspace contains a table for 'Data Description' with the following entries:

Data Description	ENTRY
Number of servers	1
Service rate (per server per hora)	3
Customer arrival rate (per hora)	2
Queue capacity (maximum waiting space)	M
Customer population	M
Busy server cost per hora	100
Idle server cost per hora	70
Customer waiting cost per hora	100
Customer being served cost per hora	70
Cost of customer being balked	
Unit queue capacity cost	

Below this is a 'Capacity Analysis' dialog box with the following settings:

- Number of Servers:** Start from: 1, End at: 5, Step: 1.
- Queue Capacity:** Start from: M, End at: M, Step: 1.
- Solution Method:** Approximation by G/G/s (radio button selected).
- Buttons:** OK, Cancel, Help.

Capacity Analysis for CAMIONES							
	Number of Server	Queue Capacity	Total Cost	Busy Server Cost	Idle Server Cost	Waiting Customer Cost	Served Customer Cost
1	1	M	\$270,0000	66,6667	23,3333	133,3333	46,6667
2	2	M	\$215,0000	66,6667	93,3333	8,3333	46,6667
3	3	M	\$277,5958	66,6667	163,3333	0,9292	46,6667
4	4	M	\$346,7680	66,6667	233,3333	0,1014	46,6667
5	5	M	\$416,6767	66,6667	303,3333	0,0100	46,6667

El número de palas a utilizar serán dos, dado que minimiza el coste total de la descarga.

System Performance Summary for CAMIONES		
	Performance Measure	Result
1	System: M/M/1	From Formula
2	Customer arrival rate (lambda) per hora =	2,0000
3	Service rate per server (mu) per hora =	3,0000
4	Overall system effective arrival rate per hora =	2,0000
5	Overall system effective service rate per hora =	2,0000
6	Overall system utilization =	66,6667 %
7	Average number of customers in the system (L) =	2,0000
8	Average number of customers in the queue (Lq) =	1,3333
9	Average number of customers in the queue for a busy system (Lb) =	2,0000
10	Average time customer spends in the system (W) =	1,0000 horas
11	Average time customer spends in the queue (Wq) =	0,6667 horas
12	Average time customer spends in the queue for a busy system (Wb) =	1,0000 horas
13	The probability that all servers are idle (Po) =	33,3333 %
14	The probability an arriving customer waits (Pw) or system is busy (Pb) =	66,6667 %
15	Average number of customers being balked per hora =	0
16	Total cost of busy server per hora =	\$66,6667
17	Total cost of idle server per hora =	\$23,3333
18	Total cost of customer waiting per hora =	\$133,3333
19	Total cost of customer being served per hora =	\$46,6667
20	Total cost of customer being balked per hora =	\$0
21	Total queue space cost per hora =	\$0
22	Total system cost per hora =	\$270,0000





## TEORÍA DE COLAS: VAGONES TREN - Queuing Analysis

Una compañía ferroviaria pinta sus vagones según se vayan necesitando, se pintan manualmente con una velocidad que se distribuye según una exponencial de media uno cada 4 horas y un coste anual de 4 millones de euros ( $24 \times 365 = 8760$  horas)

La llegada de vagones sigue un proceso de Poisson de media uno cada 5 horas. Además el coste por cada vagón que no está activo es de 500 euros la hora.

La compañía se plantea dos posibilidades:

- Encargar el trabajo a una empresa de pintura que lo haría con aerosol con el consiguiente ahorro de tiempo. Sin embargo el presupuesto para esta segunda alternativa es de 10 millones de euros anuales. En este caso, el proceso se aproxima a uno de Poisson con una tasa de uno cada 3 horas.
- Poner otro taller exactamente igual al actual, con igual tasa de servicio y coste anual que permite pintar dos vagones a la vez.

¿Cuál de los tres procedimientos es preferible?

Estado actual : Modelo M/M/1 con  $\lambda = 1 / 5 = 0,2$  vagones/hora y  $\mu = 1 / 4 = 0,25$  vagones/hora

Coste pintura =  $4.000.000 / 8760 = 456,6210046$  euros/hora

Estado (a): Modelo M/M/1 con  $\lambda = 1 / 5 = 0,2$  vagones/hora y  $\mu = 1 / 3 = 0,33$  vagones/hora

Coste pintura =  $10.000.000 / 8760 = 1141,552511$  euros/hora

Estado (b): Modelo M/M/2 con  $\lambda = 1 / 5 = 0,2$  vagones/hora y  $\mu = 1 / 4 = 0,25$  vagones/hora

Coste pintura =  $8.000.000 / 8760 = 913,2420091$  euros/hora

Es preferible la opción que obtenga el mínimo coste total.

## Estado Actual – ( b)

**Queuing Analysis**

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

**VAGONES**

Data Description	ENTRY
Number of servers	1
Service rate (per server per hora)	0.25
Customer arrival rate (per hora)	0.2
Queue capacity (maximum waiting space)	M
Customer population	M
Busy server cost per hora	956.6210046
Idle server cost per hora	456.6210046
Customer waiting cost per hora	500
Customer being served cost per hora	
Cost of customer being balked	
Unit queue capacity cost	

**Capacity Analysis**

Specify either approximation or simulation for solution if no close form formula is available.

**Solution Method**

Approximation by G/G/s  
 Monte Carlo Simulation

**Number of Servers**

Start from: 1  
End at: 2  
Step: 1

**Queue Capacity**

Start from: M  
End at: M  
Step: 1

OK Cancel Help

	Number of Server	Queue Capacity	Total Cost	Busy Server Cost	Idle Server Cost	Waiting Customer Cost
1	1	M	\$2456,6210	765,2968	91,3242	1600,0000
2	2	M	\$1389,4330	765,2969	547,9452	76,1905

Coste anual estado original = 2456,62 euros/vagón

Coste anual con dos servidores = 1389,4330 euros/vagón

En consecuencia, es preferible tener dos talleres.

**Queuing Analysis**

File Format Results Utilities Window Help

0.00 A

**System Performance Summary for VAGONES**

	Performance Measure	Result
1	System: M/M/1	From Formula
2	Customer arrival rate ( $\lambda$ ) per hora =	0,2000
3	Service rate per server ( $\mu$ ) per hora =	0,2500
4	Overall system effective arrival rate per hora =	0,2000
5	Overall system effective service rate per hora =	0,2000
6	Overall system utilization =	80,0000 %
7	Average number of customers in the system ( $L$ ) =	4,0000
8	Average number of customers in the queue ( $L_q$ ) =	3,2000
9	Average number of customers in the queue for a busy system ( $L_b$ ) =	4,0000
10	Average time customer spends in the system ( $W$ ) =	20,0000 horas
11	Average time customer spends in the queue ( $W_q$ ) =	16,0000 horas
12	Average time customer spends in the queue for a busy system ( $W_b$ ) =	20,0000 horas
13	The probability that all servers are idle ( $P_0$ ) =	20,0000 %
14	The probability an arriving customer waits ( $P_w$ ) or system is busy ( $P_b$ ) =	80,0000 %
15	Average number of customers being balked per hora =	0
16	Total cost of busy server per hora =	\$765,2968
17	Total cost of idle server per hora =	\$91,3242
18	Total cost of customer waiting per hora =	\$1600,0000
19	Total cost of customer being served per hora =	\$0
20	Total cost of customer being balked per hora =	\$0
21	Total queue space cost per hora =	\$0
22	Total system cost per hora =	\$2456,6210

Coste esperado del servicio:  $E(CS) = 456,6210046$  euros/hora

Coste esperado de la espera:  $E(CW) = 500 \cdot L_s = 500 \cdot 4 = 2000$  euros/hora

Coste total del proceso:  $E(CT) = E(CS) + E(CW) = 456,621 + 2000 = 2456,621$  euros/hora

b) Modelo M/M/2 con  $\lambda = 1 / 5 = 0,2$  vagones/hora y  $\mu = 1 / 4 = 0,25$  vagones/hora

Coste pintura =  $8.000.000 / 8760 = 913,2420091$  euros/hora

**Queuing Analysis**

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

**VAGONES**

Data Description	ENTRY
Number of servers	2
Service rate (per server per hora)	0.25
Customer arrival rate (per hora)	0.2
Queue capacity (maximum waiting space)	M
Customer population	M
Busy server cost per hora	956.6210046
Idle server cost per hora	456.6210046
Customer waiting cost per hora	500
Customer being served cost per hora	
Cost of customer being balked	
Unit queue capacity cost	

	Performance Measure	Result
1	System: M/M/2	From Formula
2	Customer arrival rate (lambda) per hora =	0,2000
3	Service rate per server (mu) per hora =	0,2500
4	Overall system effective arrival rate per hora =	0,2000
5	Overall system effective service rate per hora =	0,2000
6	Overall system utilization =	40,0000 %
7	Average number of customers in the system (L) =	0,9524
8	Average number of customers in the queue (Lq) =	0,1524
9	Average number of customers in the queue for a busy system (Lb) =	0,6667
10	Average time customer spends in the system (W) =	4,7619 horas
11	Average time customer spends in the queue (Wq) =	0,7619 horas
12	Average time customer spends in the queue for a busy system (Wb) =	3,3333 horas
13	The probability that all servers are idle (Po) =	42,8571 %
14	The probability an arriving customer waits (Pw) or system is busy (Pb) =	22,8571 %
15	Average number of customers being balked per hora =	0
16	Total cost of busy server per hora =	\$765,2969
17	Total cost of idle server per hora =	\$547,9452
18	Total cost of customer waiting per hora =	\$76,1905
19	Total cost of customer being served per hora =	\$0
20	Total cost of customer being balked per hora =	\$0
21	Total queue space cost per hora =	\$0
22	Total system cost per hora =	\$1389,4330

Coste esperado del servicio:  $E(CS) = 2 \cdot 456,6210046 = 913,242$  euros/hora

Coste esperado de la espera:  $E(CW) = 500 \cdot L_s = 500 \cdot 0,9524 = 476,2$  euros/hora

Coste total del proceso:  $E(CT) = E(CS) + E(CW) = 913,242 + 476,2 = 1389,433$  euros/hora

a) Modelo M/M/1 con  $\lambda = 1 / 5 = 0,2$  vagones/hora y  $\mu = 1 / 3 = 0,33$  vagones/hora

Coste pintura =  $10.000.000 / 8760 = 1141,552511$  euros/hora

The screenshot shows the WinQSB software interface with the title bar "Queuing Analysis". The menu bar includes File, Edit, Format, Solve and Analyze, Results, Utilities, Window, WinQSB, and Help. The toolbar contains various icons for file operations and analysis. The main window has a blue header "VAGONES". Below it is a table titled "Data Description" with the following entries:

Data Description	ENTRY
Number of servers	1
Service rate (per server per hora)	0.3333
Customer arrival rate (per hora)	0.2
Queue capacity (maximum waiting space)	M
Customer population	M
Busy server cost per hora	1641.552511
Idle server cost per hora	1141.552511
Customer waiting cost per hora	500
Customer being served cost per hora	
Cost of customer being balked	
Unit queue capacity cost	

Below this is a table titled "Performance Measure" with 22 rows. Rows 1 through 6 are labeled with numbers 1 through 6. Rows 7 through 21 are labeled with numbers 7 through 21. Row 22 is a summary row. The columns are "Performance Measure" and "Result". The results are as follows:

Performance Measure	Result
1 System: M/M/1	From Formula
2 Customer arrival rate (lambda) per hora =	0,2000
3 Service rate per server (mu) per hora =	0,3333
4 Overall system effective arrival rate per hora =	0,2000
5 Overall system effective service rate per hora =	0,2000
6 Overall system utilization =	60,0060 %
7 Average number of customers in the system (L) =	1,5004
8 Average number of customers in the queue (Lq) =	0,9003
9 Average number of customers in the queue for a busy system (Lb) =	1,5004
10 Average time customer spends in the system (W) =	7,5019 horas
11 Average time customer spends in the queue (Wq) =	4,5016 horas
12 Average time customer spends in the queue for a busy system (Wb) =	7,5019 horas
13 The probability that all servers are idle (Po) =	39,9940 %
14 The probability an arriving customer waits (Pw) or system is busy (Pb) =	60,0060 %
15 Average number of customers being balked per hora =	0
16 Total cost of busy server per hora =	\$985,0301
17 Total cost of idle server per hora =	\$456,5525
18 Total cost of customer waiting per hora =	\$450,1577
19 Total cost of customer being served per hora =	\$0
20 Total cost of customer being balked per hora =	\$0
21 Total queue space cost per hora =	\$0
22 Total system cost per hora =	\$1891,7400

Coste esperado del servicio:  $E(CS) = 1141,552511$  euros/hora

Coste esperado de la espera:  $E(CW) = 500 \cdot L_s = 500 \cdot 1,5004 = 750,2$  euros/hora

Coste total del proceso:  $E(CT) = E(CS) + E(CW) = 1141,5525 + 750,2 = 1891,74$  euros/hora

En consecuencia, es preferible poner dos talleres al tener un coste menor.





## TEORÍA DE COLAS: BANCO - Queuing Analysis

Una pequeña entidad bancaria tiene dos cajeros automáticos, que siguen una distribución exponencial, atienden a razón de 1,5 clientes/minuto, la tasa de llegadas de clientes, según una distribución de Poisson, es de 30 clientes/hora. Se pide:

- a) Número medio de clientes en el sistema
- b) Tiempo medio de un cliente en el sistema
- c) Porcentaje de tiempo de cajero libre
- a) Es un modelo de cola M/M/2 con s = 2 servidores

Tasa de llegadas  $\lambda = 30$  clientes/hora

$$\text{Tasa de servicio por operario: } \mu = \frac{60}{1,5} = 40 \text{ clientes/hora}$$

$$\text{Utilización promedio del sistema: } u_s = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{30}{40} = 0,75$$

$$\text{Factor de utilización o congestión del sistema: } \rho = \frac{\lambda}{s \cdot \mu} = \frac{30}{2 \times 40} = 0,375$$

Probabilidad de que ningún cliente se encuentre en el sistema de colas:

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\lambda / \mu)^n}{n!} + \frac{1}{s!} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^s \frac{1}{1-\rho}} = \frac{1}{\sum_{n=0}^1 \frac{0,75^n}{n!} + \frac{1}{2} \times 0,75^2 \times \left( \frac{1}{1-0,375} \right)} = \\ = \frac{1}{1 + 0,75 + 0,45} = 0,454545$$

Promedio de clientes en la cola:

$$L_q = \frac{(\lambda / \mu)^s \lambda \mu}{(s-1)! (s \mu - \lambda)^2} p_0 = \frac{0,75^2 \times 30 \times 40}{(2 \times 40 - 30)^2} 0,454545 = 0,1227 \text{ clientes}$$

$$\text{Promedio de clientes en el sistema: } L_s = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = 0,1227 + 0,75 = 0,8727 \text{ clientes}$$

$$b) \text{ Tiempo medio de espera en cola: } W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{0,1227}{30} = 0,0041 \text{ horas}$$

Tiempo medio de estancia en el sistema:

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu} = 0,0041 + \frac{1}{40} = 0,0291 \text{ horas}$$

El tiempo en el sistema es igual al tiempo en la cola ( $W_q$ ) más el tiempo en el servicio ( $1 / \mu$ )

$$c) \text{ Porcentaje de tiempo que determinado cajero esté libre: } p_n = \frac{(\lambda / \mu)^n}{n!} p_0$$

$$n = 0 : p_0 = 0,4545$$

$$n = 1 : p_1 = \frac{(30 / 40)}{1} p_0 = 0,75 \times 0,4545 = 0,3409$$

**Problem Specification**

Problem Title	BANCO	
Time Unit	hora	
Entry Format		
<input checked="" type="radio"/> Simple M/M System <input type="radio"/> General Queuing System		
OK	Cancel	Help

Introducidos los datos:

**Queuing Analysis**

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

**BANCO**

Data Description	ENTRY
Number of servers	2
Service rate (per server per hora)	40
Customer arrival rate (per hora)	30
Queue capacity (maximum waiting space)	M
Customer population	M
Busy server cost per hora	
Idle server cost per hora	
Customer waiting cost per hora	
Customer being served cost per hora	
Cost of customer being balked	
Unit queue capacity cost	

## MEDIDAS DE RENDIMIENTO

**Queuing Analysis**

File Format Results Utilities Window Help

System

Performance Summary  
Probability Summary  
Show Sensitivity Analysis - Table  
Show Sensitivity Analysis - Graph  
Show Capacity Analysis

	Performance Measure	Result
1	<b>System: M/M/2</b>	From Formula
2	<b>Customer arrival rate (<math>\lambda</math>) per hora =</b>	30,0000
3	<b>Service rate per server (<math>\mu</math>) per hora =</b>	40,0000
4	<b>Overall system effective arrival rate per hora =</b>	30,0000
5	<b>Overall system effective service rate per hora =</b>	30,0000
6	<b>Overall system utilization =</b>	37,5000 %
7	<b>Average number of customers in the system (<math>L</math>) =</b>	0,8727
8	<b>Average number of customers in the queue (<math>L_q</math>) =</b>	0,1227
9	<b>Average number of customers in the queue for a busy system (<math>L_b</math>) =</b>	0,6000
10	<b>Average time customer spends in the system (<math>W</math>) =</b>	0,0291 horas
11	<b>Average time customer spends in the queue (<math>W_q</math>) =</b>	0,0041 horas
12	<b>Average time customer spends in the queue for a busy system (<math>W_b</math>) =</b>	0,0200 horas
13	<b>The probability that all servers are idle (<math>P_0</math>) =</b>	45,4545 %
14	<b>The probability an arriving customer waits (<math>P_w</math>) or system is busy (<math>P_b</math>) =</b>	20,4545 %
15	<b>Average number of customers being balked per hora =</b>	0
16	<b>Total cost of busy server per hora =</b>	\$0
17	<b>Total cost of idle server per hora =</b>	\$0
18	<b>Total cost of customer waiting per hora =</b>	\$0
19	<b>Total cost of customer being served per hora =</b>	\$0
20	<b>Total cost of customer being balked per hora =</b>	\$0
21	<b>Total queue space cost per hora =</b>	\$0
22	<b>Total system cost per hora =</b>	\$0

**Queuing Analysis**

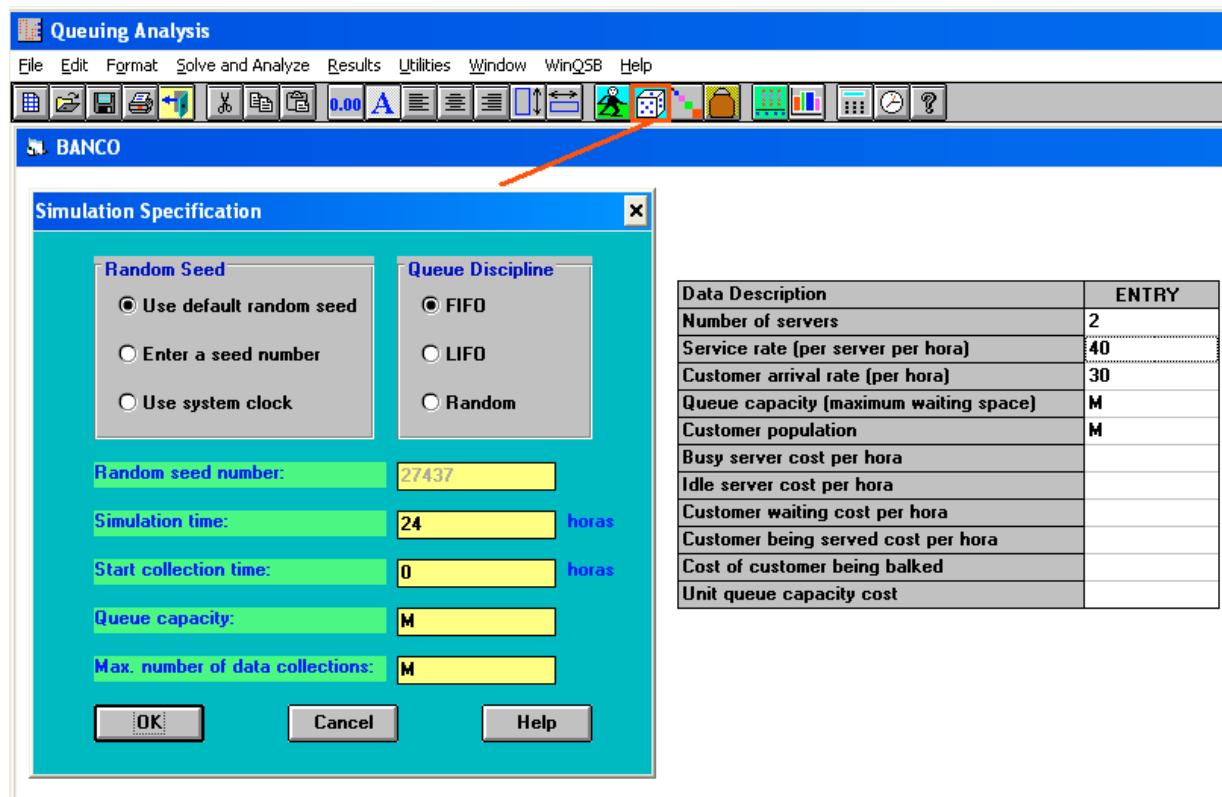
File Format Results Utilities Window Help

System

**System Probability Summary for BANCO**

	Estimated Probability of n Customers in the System	Cumulative Probability
0	0,4545	0,4545
1	0,3409	0,7955
2	0,1278	0,9233
3	0,0479	0,9712
4	0,0180	0,9892
5	0,0067	0,9960
6	0,0025	0,9985
7	0,0009	0,9994
8	0,0004	0,9998
9	0,0001	0,9999
10	0,0000	1,0000
11	0,0000	1,0000
12	0,0000	1,0000
13	0,0000	1,0000
14	0,0000	1,0000

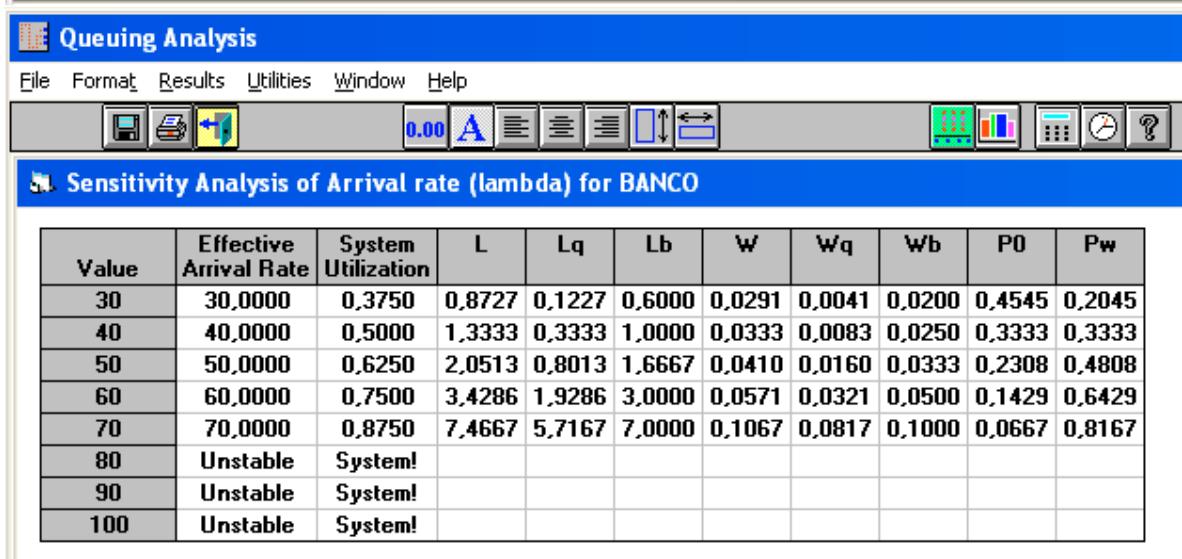
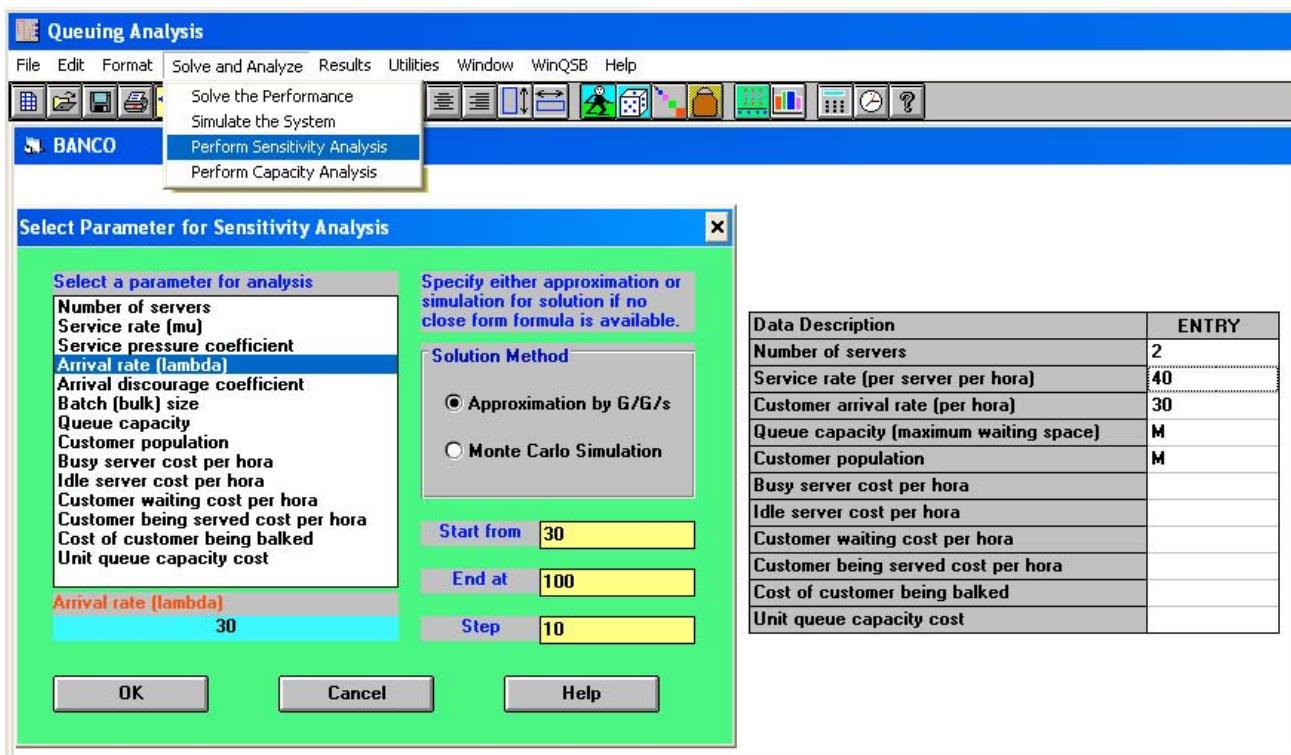
## SENSIBILIDAD DEL SISTEMA: 24 HORAS



System Performance Summary for BANCO		
	Performance Measure	Result
1	System: M/M/2	From Simulation
2	Customer arrival rate ( $\lambda$ ) per hora =	30,0000
3	Service rate per server ( $\mu$ ) per hora =	40,0000
4	Overall system effective arrival rate per hora =	27,3295
5	Overall system effective service rate per hora =	27,3295
6	Overall system utilization =	34,2151 %
7	Average number of customers in the system ( $L$ ) =	0,7565
8	Average number of customers in the queue ( $L_q$ ) =	0,0722
9	Average number of customers in the queue for a busy system ( $L_b$ ) =	0,4174
10	Average time customer spends in the system ( $W$ ) =	0,0277 horas
11	Average time customer spends in the queue ( $W_q$ ) =	0,0026 horas
12	Average time customer spends in the queue for a busy system ( $W_b$ ) =	0,0153 horas
13	The probability that all servers are idle ( $P_0$ ) =	48,8648 %
14	The probability an arriving customer waits ( $P_w$ ) or system is busy ( $P_b$ ) =	17,2951 %
15	Average number of customers being balked per hora =	0
16	Total cost of busy server per hora =	\$0
17	Total cost of idle server per hora =	\$0
18	Total cost of customer waiting per hora =	\$0
19	Total cost of customer being served per hora =	\$0
20	Total cost of customer being balked per hora =	\$0
21	Total queue space cost per hora =	\$0
22	Total system cost per hora =	\$0
23	Simulation time in hora =	24,0000
24	Starting data collection time in hora =	0
25	Number of observations collected =	656
26	Maximum number of customers in the queue =	4
27	Total simulation CPU time in second =	0,0300

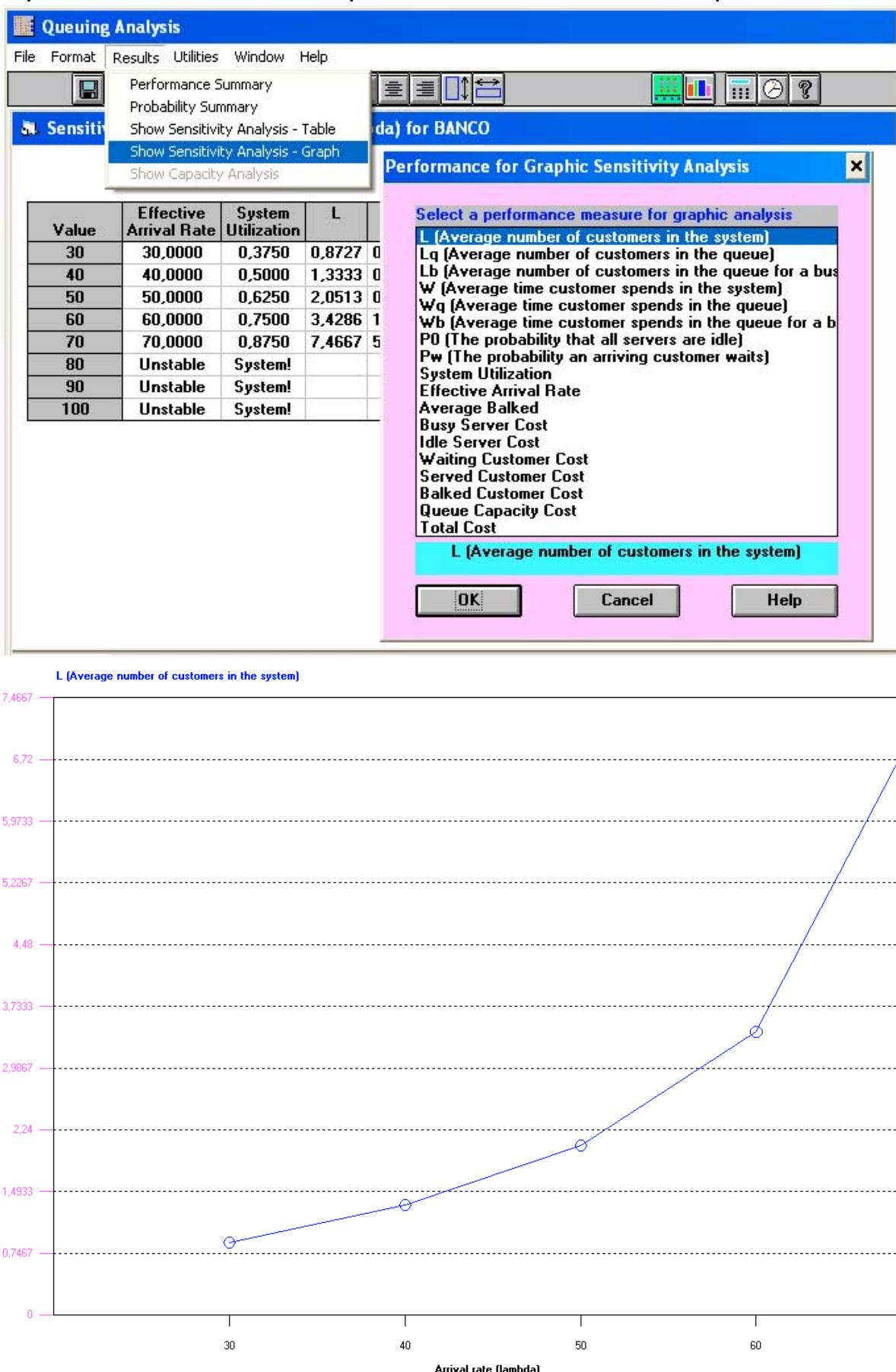
**SENSIBILIDAD:** Análisis de sensibilidad para el parámetro de tasas de llegadas  $\lambda = 30$ , con una variación de 30 a 100 clientes/hora, y un incremento de 10 clientes/hora.

Con el Modelo de aproximación G/G/s se observa cómo reacciona el sistema.



La utilización del sistema se va incrementando, de forma que cuando la llegada de clientes es de 70 a la hora la utilización del sistema es del 87,5% (máxima posible), a partir de entonces el sistema se vuelve inestable, es decir, el número de servidores es insuficiente.

**GRÁFICO ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD:** Se representa el gráfico  $L_s \equiv$  número promedio de clientes en el sistema, en función del parámetro lambda  $\lambda$ . Dependiendo de las necesidades se pueden ir analizando cada uno de los parámetros.



**ANALISIS DE CAPACIDAD:** Se realiza con los costes, que se definen:

Coste servidor ocupado/hora = 5

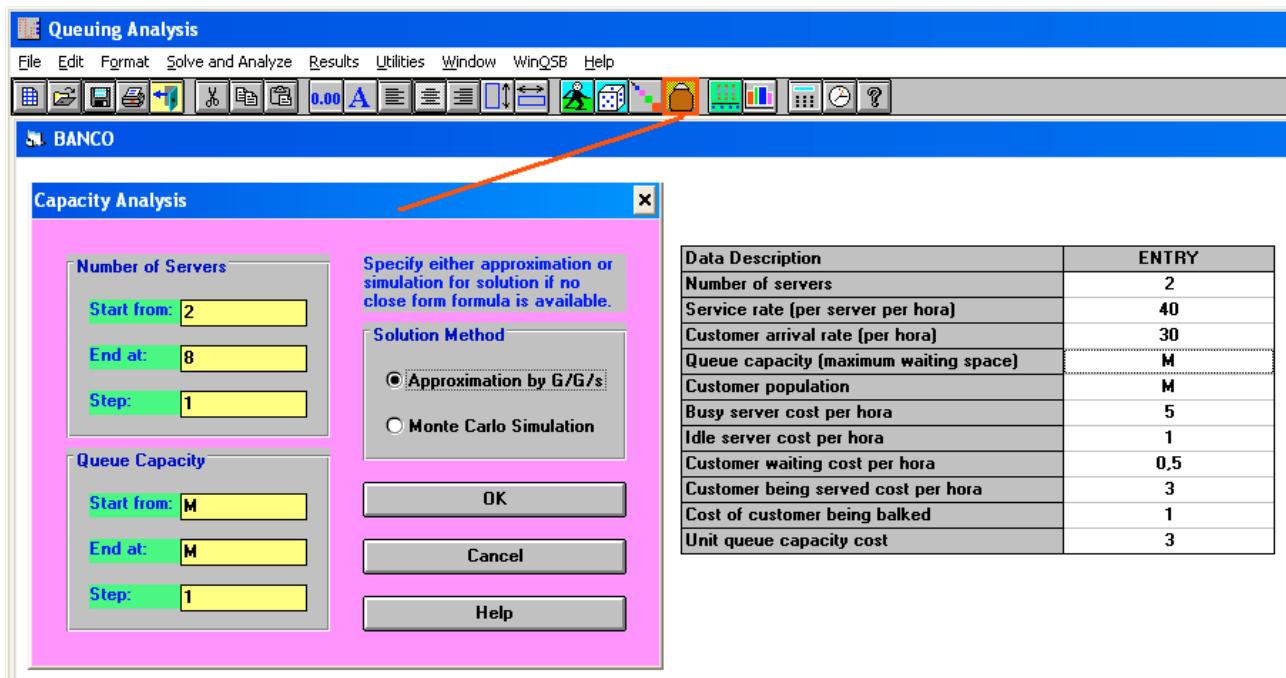
Coste servidor ocioso/hora = 1

Coste cliente en espera = 0,5

Coste cliente servido/hora = 3

Coste cliente no atendido = 1

Coste unitario capacidad de cola = 3



Se marca una variación de servidores de 2 a 8, con un paso de 1, en que la capacidad de la cola es infinita.

	Number of Server	Queue Capacity	Total Cost	Busy Server Cost	Idle Server Cost	Waiting Customer Cost	Served Customer Cost
1	2	M	\$7,3114	3,7500	1,2500	0,0614	2,2500
2	3	M	\$8,2574	3,7500	2,2500	0,0074	2,2500
3	4	M	\$9,2509	3,7500	3,2500	0,0009	2,2500
4	5	M	\$10,2501	3,7500	4,2500	0,0001	2,2500
5	6	M	\$11,2500	3,7500	5,2500	0,0000	2,2500
6	7	M	\$12,2500	3,7500	6,2500	0,0000	2,2500
7	8	M	\$13,2500	3,7500	7,2500	0,0000	2,2500

El coste total promedio óptimo se obtiene con 2 servidores.

Queuing Analysis	
File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help	
<b>BANCO</b>	
<b>Data Description</b>	<b>ENTRY</b>
Number of servers	2
Service rate (per server per hora)	40
Customer arrival rate (per hora)	30
Queue capacity (maximum waiting space)	M
Customer population	M
Busy server cost per hora	5
Idle server cost per hora	1
Customer waiting cost per hora	0.5
Customer being served cost per hora	3
Cost of customer being balked	1
Unit queue capacity cost	3

Queuing Analysis	
File Format Results Utilities Window Help	
<b>System Performance Summary for BANCO</b>	
<b>Performance Measure</b>	<b>Result</b>
1 System: M/M/2	From Formula
2 Customer arrival rate (lambda) per hora =	30,0000
3 Service rate per server (mu) per hora =	40,0000
4 Overall system effective arrival rate per hora =	30,0000
5 Overall system effective service rate per hora =	30,0000
6 Overall system utilization =	37,5000 %
7 Average number of customers in the system (L) =	0,8727
8 Average number of customers in the queue (Lq) =	0,1227
9 Average number of customers in the queue for a busy system (Lb) =	0,6000
10 Average time customer spends in the system (W) =	0,0291 horas
11 Average time customer spends in the queue (Wq) =	0,0041 horas
12 Average time customer spends in the queue for a busy system (Wb) =	0,0200 horas
13 The probability that all servers are idle (Po) =	45,4545 %
14 The probability an arriving customer waits (Pw) or system is busy (Pb) =	20,4545 %
15 Average number of customers being balked per hora =	0
16 Total cost of busy server per hora =	\$3,7500
17 Total cost of idle server per hora =	\$1,2500
18 Total cost of customer waiting per hora =	\$0,0614
19 Total cost of customer being served per hora =	\$2,2500
20 Total cost of customer being balked per hora =	\$0
21 Total queue space cost per hora =	\$0
22 Total system cost per hora =	\$7,3114





## COLA FINITA: TALLER - Queuing Analysis

En un taller mecánico llegan vehículos para una puesta a punto antes de pasar la ITV, las llegadas siguen un proceso de Poisson de promedio 18 vehículos/hora.

Las dimensiones del taller sólo permiten que haya 4 vehículos, y las ordenanzas municipales no permiten esperar en la vía pública. El taller despacha un promedio de 6 vehículos/hora de acuerdo con una distribución exponencial. Se pide:

- ¿Cuál es la probabilidad de que no haya ningún vehículo en el taller?
- ¿Cuál es el promedio de vehículos en el taller?
- ¿Cuánto tiempo pasa por término medio un vehículo en el taller?
- ¿Cuánto tiempo esperan por término medio los vehículos en la cola?
- ¿Cuál es la longitud media de la cola?

a) Es un modelo de cola M/M/1/k con k = 4 vehículos

Hay una sola cola, con disciplina FIFO, la capacidad del sistema es limitada, de modo que sólo puede haber 4 vehículos como máximo en el taller, con lo cual el número máximo de vehículos en la cola es ( $4 - 1 = 3$ ). Las llegadas siguen un proceso de Poisson de parámetro  $\lambda = 18$  vehículos/hora, los tiempos entre llegadas se distribuyen exponencialmente  $\text{Exp}(\lambda = 18)$ , los tiempos entre servicios se distribuyen exponencialmente  $\text{Exp}(\mu = 6)$  siendo  $\mu = 6$  vehículos/hora el número medio que el taller (servidor) es capaz de atender.

El factor de saturación  $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{18}{6} = 3$  determina como varían las probabilidades  $p_n$  de que haya n vehículos en el sistema.

Probabilidad de que no haya ningún vehículo en el taller:  $p_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{k+1}} = \frac{1-3}{1-3^5} = 0,00826$

b) Promedio de vehículos en el taller (sistema):

$$L_s = \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(k+1)\rho^{k+1}}{1-\rho^{k+1}} = \frac{3}{1-3} - \frac{5 \times 3^5}{1-3^5} = -\frac{3}{2} + \frac{1215}{242} = 3,52 \text{ vehículos}$$

c) Tiempo promedio de un vehículo en el taller:  $W_s = \frac{L_s}{\lambda_{\text{ef}}}$

Tasa de llegada efectiva:

$$\lambda_{\text{ef}} = \lambda \left[ 1 - \frac{(1-\rho) \rho^k}{1-\rho^{k+1}} \right] = 18 \left[ 1 - \frac{(1-3) 3^4}{1-3^5} \right] = 5,95 \text{ vehículos/hora}$$

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda_{\text{ef}}} = \frac{3,52}{5,95} = 0,5916 \text{ horas}$$

d) Tiempo medio de espera en la cola de vehículos:  $W_q = W_s - \frac{1}{\mu} = 0,5916 - \frac{1}{6} = 0,4249 \text{ horas}$

e) Longitud de la cola:  $L_q = \lambda_{\text{ef}} W_q = 5,95 \times 0,4249 = 2,528 \text{ vehículos}$

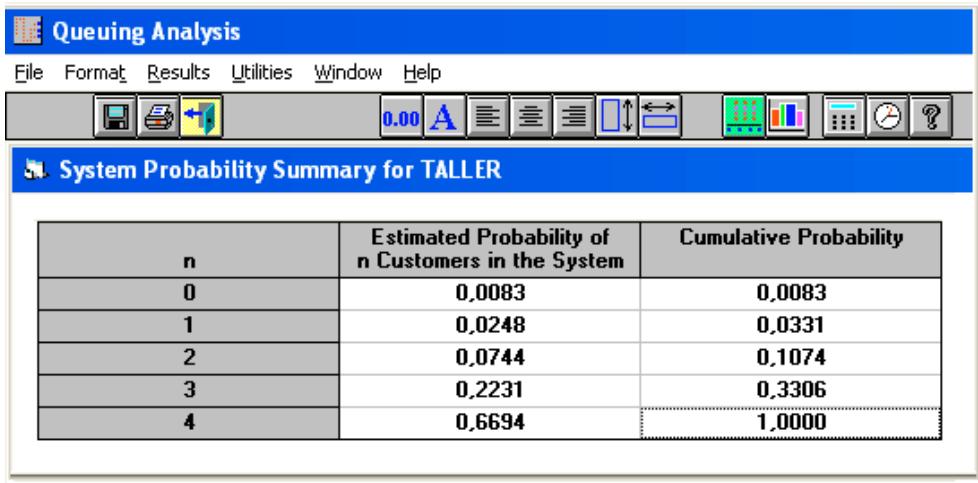
o bien,  $L_q = L_s - \frac{(1-\rho^k)\rho}{1-\rho^{k+1}} = 3,52 - \frac{(1-3^4)3}{1-3^5} = 2,528 \text{ vehículos}$

Introducidos los datos:

Data Description	ENTRY
Number of servers	1
Service rate (per server per hora)	6
Customer arrival rate (per hora)	18
Queue capacity (maximum waiting space)	3
Customer population	M
Busy server cost per hora	
Idle server cost per hora	
Customer waiting cost per hora	
Customer being served cost per hora	
Cost of customer being balked	
Unit queue capacity cost	

## MEDIDAS DE RENDIMIENTO

Performance Measure	Result
System: M/M/1/4	From Formula
Customer arrival rate (lambda) per hour =	18,0000
Service rate per server (mu) per hour =	6,0000
Overall system effective arrival rate per hour =	5,9504
Overall system effective service rate per hour =	5,9504
<b>Overall system utilization =</b>	<b>99,1736 %</b>
Average number of customers in the system (L) =	3,5207
Average number of customers in the queue (Lq) =	2,5289
Average number of customers in the queue for a busy system (Lb) =	2,5500
Average time customer spends in the system (W) =	0,5917 hours
Average time customer spends in the queue (Wq) =	0,4250 hours
Average time customer spends in the queue for a busy system (Wb) =	0,4285 hours
The probability that all servers are idle (Po) =	0,8264 %
<b>The probability an arriving customer waits (Pw) or system is busy (Pb) =</b>	<b>99,1736 %</b>
Average number of customers being balked per hour =	12,0496
Total cost of busy server per hour =	\$0
Total cost of idle server per hour =	\$0
Total cost of customer waiting per hour =	\$0
Total cost of customer being served per hour =	\$0
Total cost of customer being balked per hour =	\$0
Total queue space cost per hour =	\$0
Total system cost per hour =	\$0





## COLA FINITA: INVESTIGACIÓN - Queuing Analysis

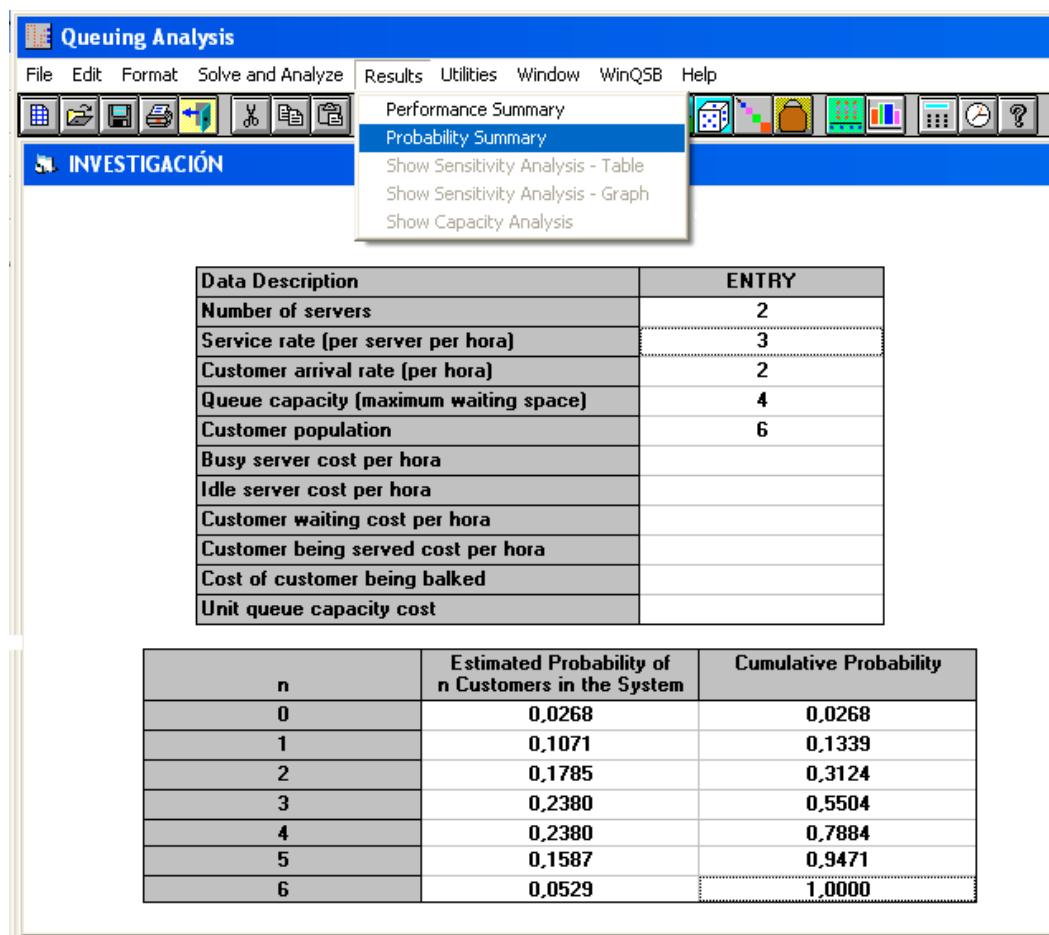
Un grupo de investigadores, formado por seis personas, dispone de dos terminales para realizar cálculos. El trabajo promedio de cálculo requiere de 20 minutos de tiempo de terminal, y el tiempo promedio entre solicitudes de servicio es de 30 minutos. Se supone que estas solicitudes están distribuidas exponencialmente. Se desea saber:

- Número estimado de investigadores que esperan utilizar una terminal.
- Tiempo total perdido diariamente si se considera una jornada de 8 horas.

Se trata de una modelo de cola M/M/2/k con k = 6 investigadores

$$\text{Tasa de llegada: } \lambda = \frac{60}{30} = 2 \text{ clientes/hora} \quad \text{Tasa de servicio: } \mu = \frac{60}{20} = 3 \text{ clientes/hora}$$

a)



Número medio de investigadores que esperan utilizar una terminal:

$$L_q = \sum_{n=s+1}^k (n-s) \cdot p_n = \sum_{n=3}^6 (k-2) \cdot p_n = 1 \cdot p_3 + 2 \cdot p_4 + 3 \cdot p_5 + 4 \cdot p_6 = \\ = 1 \cdot 0,2380 + 2 \cdot 0,2380 + 3 \cdot 0,1587 + 4 \cdot 0,0529 = 1,4017 \text{ investigadores}$$

- Tiempo perdido diariamente:  $\equiv 8 \cdot L_p = 8 \cdot 1,4017 = 11,2136$  horas

## Queuing Analysis

File Format Results Utilities Window Help



0.00 A



### System Performance Summary for INVESTIGACIÓN

	Performance Measure	Result
1	<b>System: M/M/2/6/6</b>	<b>From Formula</b>
2	Customer arrival rate ( $\lambda$ ) per hora =	2,0000
3	Service rate per server ( $\mu$ ) per hora =	3,0000
4	Overall system effective arrival rate per hora =	5,5180
5	Overall system effective service rate per hora =	5,5180
6	Overall system utilization =	91,9669 %
7	Average number of customers in the system ( $L$ ) =	3,2410
8	<b>Average number of customers in the queue (<math>L_q</math>) =</b>	<b>1,4017</b>
9	Average number of customers in the queue for a busy system ( $L_b$ ) =	1,6183
10	Average time customer spends in the system ( $W$ ) =	0,5873 horas
11	Average time customer spends in the queue ( $W_q$ ) =	0,2540 horas
12	Average time customer spends in the queue for a busy system ( $W_b$ ) =	0,2933 horas
13	The probability that all servers are idle ( $P_0$ ) =	2,6777 %
14	The probability an arriving customer waits ( $P_w$ ) or system is busy ( $P_b$ ) =	86,6116 %
15	Average number of customers being balked per hora =	0
16	Total cost of busy server per hora =	\$0
17	Total cost of idle server per hora =	\$0
18	Total cost of customer waiting per hora =	\$0
19	Total cost of customer being served per hora =	\$0
20	Total cost of customer being balked per hora =	\$0
21	Total queue space cost per hora =	\$0
22	Total system cost per hora =	\$0





## COLA GENERAL - Problem Specification / General Queuing System

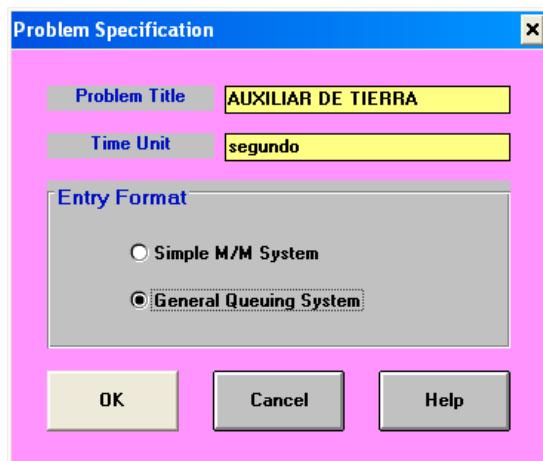
La dirección del aeropuerto Josep Tarradellas está pensando en contratar a un nuevo auxiliar de tierra. Para este puesto se han presentado varios candidatos, aunque solo han pasado a la fase final únicamente dos de ellos.

El primer auxiliar de tierra tarda en registrar a los pasajeros y su equipaje aproximadamente 20 segundos con un error típico de 2 segundos. Por otro lado, el segundo auxiliar es capaz de registrar cada pasajero en 25 segundos exactos.

Los pasajeros llegan en promedio cada 30 segundos. Los tiempos entre llegadas varían de acuerdo con la distribución exponencial.

¿A cuál de los dos auxiliares de tierra debería contratar el aeropuerto?

¿Cuál es la probabilidad de que el auxiliar contratado esté ocupado?



- Auxiliar 1 de tierra: Modelo de cola M/G/1 con  $s = 1$  servidor

$$\text{Tasa de llegadas: } \frac{1}{\lambda_1} = 30 \rightarrow \lambda_1 = 0,0333 \text{ pasajeros/segundo}$$

$$\text{Tasa de servicio: } \frac{1}{\mu_1} = 20 \rightarrow \mu_1 = 0,05 \text{ pasajeros/segundo , } \sigma_1 = 2 \text{ segundos}$$

Data Description	ENTRY
Number of servers	1
Service time distribution (in segundo)	Normal
Mean (u)	20
Standard deviation ( $s > 0$ )	2
(Not used)	
Service pressure coefficient	
Interarrival time distribution (in segundo)	Exponential
Location parameter (a)	0
Scale parameter (b>0) (b=mean if a=0)	30
(Not used)	
Arrival discourage coefficient	
Batch (bulk) size distribution	Constant
Constant value	1
(Not used)	
Queue capacity (maximum waiting space)	M
Customer population	M

Queuing Analysis		
System Performance Summary for AUXILIAR DE TIERRA		
	Performance Measure	Result
1	System: M/G/1	From Formula
2	Customer arrival rate ( $\lambda$ ) per segundo =	0,0333
3	Service rate per server ( $\mu$ ) per segundo =	0,0500
4	Overall system effective arrival rate per segundo =	0,0333
5	Overall system effective service rate per segundo =	0,0333
6	Overall system utilization =	66,6667 %
7	Average number of customers in the system ( $L$ ) =	1,3400
8	Average number of customers in the queue ( $L_q$ ) =	0,6733
9	Average number of customers in the queue for a busy system ( $L_b$ ) =	1,0100
10	Average time customer spends in the system ( $W$ ) =	40,2000 segundos
11	Average time customer spends in the queue ( $W_q$ ) =	20,2000 segundos
12	Average time customer spends in the queue for a busy system ( $W_b$ ) =	30,3000 segundos
13	The probability that all servers are idle ( $P_0$ ) =	33,3333 %
14	The probability an arriving customer waits ( $P_w$ ) or system is busy ( $P_b$ ) =	66,6667 %

$$\text{Factor de utilización: } \rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1} = \frac{0,0333}{0,05} = 0,6667$$

$$\text{Promedio de pasajeros en la cola: } L_{q1} = \frac{\lambda_1^2 \cdot \sigma_1^2 + \rho_1^2}{2(1 - \rho_1)} = \frac{0,03333^2 \times 2^2 + 0,6666^2}{2 \times (1 - 0,6666)} = 0,67 \text{ pasajeros}$$

$$\text{Tiempo promedio de espera en la cola: } W_{q1} = \frac{L_{q1}}{\lambda_1} = \frac{0,6666}{0,0333} = 20,20 \text{ segundos}$$

$$\text{Tiempo total que pasa el pasajero en la cola: } W_{s1} = W_{q1} + \frac{1}{\mu_1} = 20,20 + \frac{1}{0,05} = 40,20 \text{ segundos}$$

- Auxiliar 2 de tierra:

$$\text{Tasa de llegadas: } \frac{1}{\lambda_2} = 30 \rightarrow \lambda_2 = 0,0333 \text{ pasajeros/segundo}$$

$$\text{Tasa de servicio: } \frac{1}{\mu_2} = 25 \rightarrow \mu_2 = 0,04 \text{ pasajeros/segundo , } \sigma_2 = 0 \text{ segundos}$$

Queuing Analysis

AUXILIAR DE TIERRA

Data Description	ENTRY
Number of servers	1
Service time distribution [in segundo]	Normal
Mean ( $\mu$ )	25
Standard deviation ( $s>0$ )	0
(Not used)	
Service pressure coefficient	
Interarrival time distribution [in segundo]	Exponential
Location parameter (a)	0
Scale parameter (b>0) (b=mean if a=0)	30
(Not used)	
Arrival discourage coefficient	
Batch (bulk) size distribution	Constant
Constant value	1
(Not used)	
Queue capacity (maximum waiting space)	M
Customer population	M

Probability Distribution Function

Click the distribution for your choice.

Beta	Parameter 1
Binomial	Mean ( $\mu$ )
Constant	Parameter 2
Discrete	Standard deviation ( $s>0$ )
Erlang	Parameter 3
Exponential	(Not used)
Gamma	
Geometric	
HyperGeometric	
Laplace	
LogNormal	
Normal	Normal

OK Cancel Help

Queuing Analysis		
File Format Results Utilities Window Help		
	0.00 A	
<b>System Performance Summary for AUXILIAR DE TIERRA</b>		
1	System: M/G/1	Result From Formula
2	Customer arrival rate (lambda) per segundo =	0,0333
3	Service rate per server (mu) per segundo =	0,0400
4	Overall system effective arrival rate per segundo =	0,0333
5	Overall system effective service rate per segundo =	0,0333
6	Overall system utilization =	83,3333 %
7	Average number of customers in the system (L) =	2,9167
8	Average number of customers in the queue (Lq) =	2,0833
9	Average number of customers in the queue for a busy system (Lb) =	2,5000
10	Average time customer spends in the system (W) =	87,5000 segundos
11	Average time customer spends in the queue (Wq) =	62,5000 segundos
12	Average time customer spends in the queue for a busy system (Wb) =	75,0000 segundos
13	The probability that all servers are idle (Po) =	16,6667 %
14	The probability an arriving customer waits (Pw) or system is busy (Pb) =	83,3333 %

$$\text{Factor de utilización: } \rho_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_2} = \frac{0,0333}{0,04} = 0,8333$$

$$\text{Promedio de pasajeros en la cola: } L_{q2} = \frac{\lambda_2^2 \cdot \sigma_2^2 + \rho_2^2}{2(1 - \rho_2)} = \frac{0,0333^2 \times 0 + 0,8333^2}{2 \times (1 - 0,8333)} = 2,0833 \text{ pasajeros}$$

$$\text{Tiempo promedio de espera en la cola: } W_{q2} = \frac{L_{q2}}{\lambda_2} = \frac{2,0833}{0,0333} = 62,50 \text{ segundos}$$

$$\text{Tiempo total que pasa el pasajero en la cola: } W_{s2} = W_{q2} + \frac{1}{\mu_2} = 62,50 + \frac{1}{0,04} = 87,50 \text{ segundos}$$

Resulta más beneficioso contratar al primer auxiliar de tierra ( $W_{s1} = 40,20 < W_{s2} = 87,50$ ) al ser más rápido que el segundo.

La probabilidad de que el auxiliar 1 de tierra contratado se encuentre ocupado:

$$P(X \geq 1) = 1 - P_o = 1 - (1 - \rho) = 1 - (1 - 0,6666) = 0,6666$$



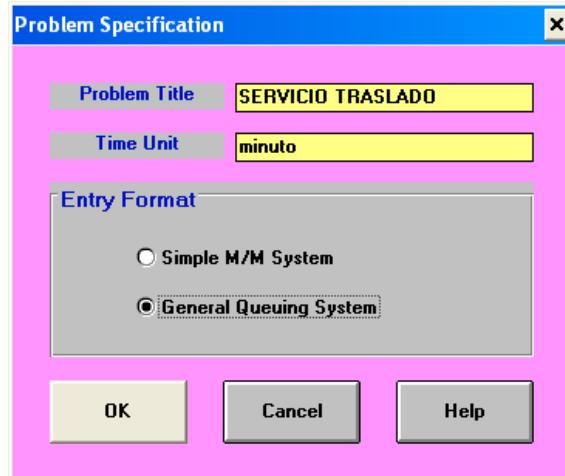


## COLA GENERAL - Problem Specification / General Queuing System

El aeropuerto dispone de un servicio de traslado en el que consiste en llevar a cada empleado que lo solicite a su casa, hotel o alrededores.

Este servicio puede atender a un empleado cada 2 minutos. El promedio de llegada de empleados es cada 8 minutos, siguiendo una distribución de Poisson.

- Encontrar las medidas de eficiencia del servicio.
- ¿Se podría mejorar el tiempo medio de un empleado en el sistema?



- Se trata de un modelo de cola M/D/1 con  $s = 1$  servidor

$$\text{Tasa de llegada} = \frac{1}{\lambda} = 8 \rightarrow \lambda = 0,125 \text{ pasajeros / minuto}$$

$$\text{Tasa de servicio} = \frac{1}{\mu} = 7 \rightarrow \mu = 0,1429 \text{ pasajeros / minuto}$$

Data Description		ENTRY
Number of servers		1
Service time distribution (in minuto)		Constant
Mean ( $\mu$ )		7
Standard deviation ( $s>0$ )		
(Not used)		
Service pressure coefficient		
Interarrival time distribution (in minuto)		Exponential
Location parameter ( $a$ )		0
Scale parameter ( $b>0$ ) ( $b=\text{mean if } a=0$ )		8
(Not used)		
Arrival discourage coefficient		
Batch (bulk) size distribution		Constant
Constant value		1
(Not used)		
(Not used)		
Queue capacity (maximum waiting space)		M
Customer population		M

Queuing Analysis		
File Format Results Utilities Window Help		
	0.00 A	
<b>System Performance Summary for SERVICIO TRASLADO</b>		
	Performance Measure	Result
1	<b>System: M/D/1</b>	<b>From Formula</b>
2	<b>Customer arrival rate (lambda) per minuto =</b>	<b>0,1250</b>
3	<b>Service rate per server (mu) per minuto =</b>	<b>0,1429</b>
4	<b>Overall system effective arrival rate per minuto =</b>	<b>0,1250</b>
5	<b>Overall system effective service rate per minuto =</b>	<b>0,1250</b>
6	<b>Overall system utilization =</b>	<b>87,5000 %</b>
7	<b>Average number of customers in the system (L) =</b>	<b>3,9375</b>
8	<b>Average number of customers in the queue (Lq) =</b>	<b>3,0625</b>
9	<b>Average number of customers in the queue for a busy system (Lb) =</b>	<b>3,5000</b>
10	<b>Average time customer spends in the system (W) =</b>	<b>31,5000 minutos</b>
11	<b>Average time customer spends in the queue (Wq) =</b>	<b>24,5000 minutos</b>
12	<b>Average time customer spends in the queue for a busy system (Wb) =</b>	<b>28,0000 minutos</b>
13	<b>The probability that all servers are idle (Po) =</b>	<b>12,5000 %</b>
14	<b>The probability an arriving customer waits (Pw) or system is busy (Pb) =</b>	<b>87,5000 %</b>

Factor de utilización:  $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0,1250}{0,1429} = 0,8750$

Promedio de empleados en la cola:  $L_q = \frac{\rho^2}{2(1 - \rho)} = \frac{0,875^2}{2 \times (1 - 0,875)} = 3,062$  empleados

Promedio de empleados en el sistema:  $L_s = L_q + \rho = 3,062 + 0,875 = 3,937$  empleados

Tiempo promedio que un empleado espera en la cola:  $W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{3,062}{0,125} = 24,500$  minutos

Tiempo promedio que los empleados están en la cola:  $W_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{3,937}{0,125} = 31,500$  minutos

b) En la situación actual, el factor de utilización  $\rho$  es muy alto, sería necesario aumentar la capacidad del sistema para mejorar las medidas de eficiencia.

Si se añade un servidor más ( $s = 2$ ), el factor de utilización:  $\rho = \frac{\lambda}{s \cdot \mu} = \frac{0,125}{2 \times 0,1429} = 0,437$

La red de transporte se encuentra más descongestionada. Se trataría de una cola M/D/2

**Queuing Analysis**

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

**SERVICIO TRASLADO**

Data Description	ENTRY
Number of servers	2
Service time distribution (in minuto)	Constant
Mean ( $\mu$ )	7
Standard deviation ( $s>0$ )	
(Not used)	
Service pressure coefficient	
Interarrival time distribution (in minuto)	Exponential
Location parameter (a)	0
Scale parameter ( $b>0$ ) ( $b=\text{mean}$ if $a=0$ )	8
(Not used)	
Arrival discourage coefficient	
Batch (bulk) size distribution	Constant
Constant value	1
(Not used)	
(Not used)	
Queue capacity (maximum waiting space)	M
Customer population	M

**Probability Distribution Function**

Click the distribution for your choice.

- Beta
- Binomial
- Constant
- Discrete
- Erlang
- Exponential**
- Gamma
- Geometric
- HyperGeometric
- Laplace
- LogNormal
- Normal

Parameter 1  
Location parameter (a)

Parameter 2  
Scale parameter ( $b>0$ ) ( $b=\text{mean}$  if  $a=0$ )

Parameter 3  
(Not used)

OK Cancel Help

Calcula las medidas de rendimiento M/D/2 con una aproximación G/G/s

**QA Solution Method**

**Note:** The queuing system is classified as: M/D/2. However, there is no close form formula to solve it. You may choose approximation (by G/G/S) or simulation (by discrete-event Monte Carlo simulation) to solve the system performance.

**Solution Method**

Approximation by G/G/s

Monte Carlo Simulation

OK Cancel Help

**Queuing Analysis**

File Format Results Utilities Window Help

**SERVICIO TRASLADO**

**System Performance Summary for SERVICIO TRASLADO**

	Performance Measure	Result
1	System: M/D/2	From Formula
2	Customer arrival rate ( $\lambda$ ) per minuto =	0,1250
3	Service rate per server ( $\mu$ ) per minuto =	0,1429
4	Overall system effective arrival rate per minuto =	0,1250
5	Overall system effective service rate per minuto =	0,1250
6	Overall system utilization =	43,7500 %
7	Average number of customers in the system ( $L$ ) =	0,9786
8	Average number of customers in the queue ( $L_q$ ) =	0,1036
9	Average number of customers in the queue for a busy system ( $L_b$ ) =	0,3889
10	Average time customer spends in the system ( $W$ ) =	7,8285 minutos
11	Average time customer spends in the queue ( $W_q$ ) =	0,8285 minutos
12	Average time customer spends in the queue for a busy system ( $W_b$ ) =	3,1111 minutos
13	The probability that all servers are idle ( $P_0$ ) =	39,1304 %
14	The probability an arriving customer waits ( $P_w$ ) or system is busy ( $P_b$ ) =	26,6304 %

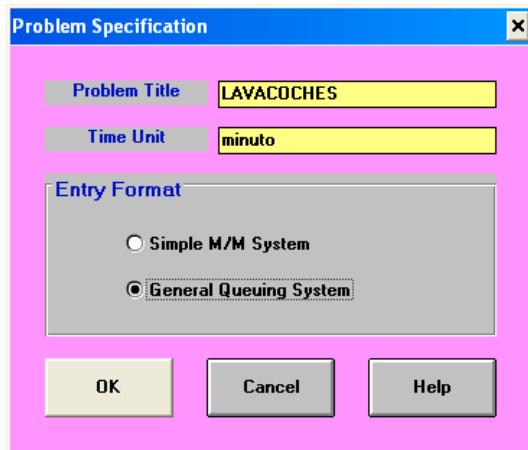




## COLA GENERAL - Problem Specification / General Queuing System

El servicio de lavacoches de un aeropuerto tiene una tasa de llegadas de 9 vehículos/hora, pudiendo atender un vehículo cada 5 minutos, con un error típico ( $\sigma = 2$ ) minutos. Se pide:

- Medidas de eficiencia según un modelo M/G/1
- Medidas de eficiencia según un modelo M/E<sub>k</sub>/1
- Medidas de eficiencia según un modelo M/D/1



$$\lambda = \frac{9}{60} = 0,15 \text{ vehículos/minuto} \rightarrow \text{Tasa llegadas (Media)} = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0,15} = 6,666666$$

$\mu = 5 \text{ vehículos/minuto}$ ,  $\sigma = 2 \text{ minutos}$

Data Description	ENTRY
Number of servers	1
Service time distribution [in minuto]	General/Arbitrary
Mean (u)	5
Standard deviation ( $s > 0$ )	2
(Not used)	
Service pressure coefficient	
Interarrival time distribution [in minuto]	Exponential
Location parameter (a)	0
Scale parameter ( $b > 0$ ) ( $b = \text{mean if } a = 0$ )	6.666666
(Not used)	
Arrival discourage coefficient	
Batch (bulk) size distribution	Constant
Constant value	1
(Not used)	
(Not used)	
Queue capacity (maximum waiting space)	M
Customer population	M

Queuing Analysis		
File Format Results Utilities Window Help  <span style="margin-left: 20px;">0.00 A</span>  		
System Performance Summary for LAVACOCHES		
	Performance Measure	Result
1	System: M/G/1	From Formula
2	Customer arrival rate (lambda) per minuto =	0,1500
3	Service rate per server (mu) per minuto =	0,2000
4	Overall system effective arrival rate per minuto =	0,1500
5	Overall system effective service rate per minuto =	0,1500
6	Overall system utilization =	75,0000 %
7	Average number of customers in the system (L) =	2,0550
8	Average number of customers in the queue (Lq) =	1,3050
9	Average number of customers in the queue for a busy system (Lb) =	1,7400
10	Average time customer spends in the system (W) =	13,7000 minutos
11	Average time customer spends in the queue (Wq) =	8,7000 minutos
12	Average time customer spends in the queue for a busy system (Wb) =	11,6000 minutos
13	The probability that all servers are idle (Po) =	25,0000 %
14	The probability an arriving customer waits (Pw) or system is busy (Pb) =	75,0000 %

Factor de utilización:  $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0,15}{0,2} = 0,75$

Promedio de vehículos en cola:  $L_q = \frac{\lambda^2 \cdot \sigma^2 + \rho^2}{2(1-\rho)} = \frac{0,15^2 \times 2^2 + 0,75^2}{2 \times (1-0,75)} = 1,3050$  vehículos

Promedio de vehículos en sistema:  $L_s = L_q + \rho = 1,3050 + 0,75 = 2,0550$  minutos

Tiempo promedio de espera en la cola:  $W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{1,3050}{0,15} = 8,7000$  minutos

Tiempo promedio de estancia en lavacoches:  $W_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{2,0550}{0,15} = 13,7000$  minutos

b) En un modelo de cola M/D/1 con s = 1 servidor

$\lambda = \frac{9}{60} = 0,15$  vehículos/minuto → Tasa llegadas (Media) =  $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0,15} = 6,666666$

Tasa de servicio =  $\frac{1}{\mu} = 5 \rightarrow \mu = 0,2$  pasajeros/minuto

**Queuing Analysis**

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

LAVACOCHES

Data Description	ENTRY
Number of servers	1
Service time distribution (in minuto)	Constant
Mean ( $\mu$ )	5
Standard deviation ( $s > 0$ )	
(Not used)	
Service pressure coefficient	
Interarrival time distribution (in minuto)	Exponential
Location parameter ( $a$ )	0
Scale parameter ( $b > 0$ ) ( $b = \text{mean if } a = 0$ )	6.666666
(Not used)	
Arrival discourage coefficient	
Batch (bulk) size distribution	Constant
Constant value	1
(Not used)	
(Not used)	
Queue capacity (maximum waiting space)	M
Customer population	M

Probability Distribution Function

Click the distribution for your choice.

- Beta
- Binomial
- Constant**
- Discrete
- Erlang
- Exponential
- Gamma
- Geometric
- HyperGeometric
- Laplace
- LogNormal
- Normal

Parameter 1: Constant value  
 Parameter 2: (Not used)  
 Parameter 3: (Not used)

OK Cancel Help

**Queuing Analysis**

File Format Results Utilities Window Help

LAVACOCHES

System Performance Summary for LAVACOCHES

	Performance Measure	Result
1	System: M/D/1	From Formula
2	Customer arrival rate ( $\lambda$ ) per minuto =	0,1500
3	Service rate per server ( $\mu$ ) per minuto =	0,2000
4	Overall system effective arrival rate per minuto =	0,1500
5	Overall system effective service rate per minuto =	0,1500
6	Overall system utilization =	75,0000 %
7	Average number of customers in the system ( $L$ ) =	1,8750
8	Average number of customers in the queue ( $L_q$ ) =	1,1250
9	Average number of customers in the queue for a busy system ( $L_b$ ) =	1,5000
10	Average time customer spends in the system ( $W$ ) =	12,5000 minutos
11	Average time customer spends in the queue ( $W_q$ ) =	7,5000 minutos
12	Average time customer spends in the queue for a busy system ( $W_b$ ) =	10,0000 minutos
13	The probability that all servers are idle ( $P_0$ ) =	25,0000 %
14	The probability an arriving customer waits ( $P_w$ ) or system is busy ( $P_b$ ) =	75,0000 %

$$\text{Factor de utilización: } \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0,15}{0,20} = 0,75$$

$$\text{Promedio de empleados en la cola: } L_q = \frac{\rho^2}{2(1 - \rho)} = \frac{0,75^2}{2 \times (1 - 0,75)} = 1,125 \text{ vehículos}$$

$$\text{Promedio de empleados en el sistema: } L_s = L_q + \rho = 1,125 + 0,75 = 1,875 \text{ vehículos}$$

$$\text{Tiempo promedio que un empleado espera en la cola: } W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{1,125}{0,15} = 7,50 \text{ minutos}$$

$$\text{Tiempo promedio que los empleados están en la cola: } W_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{1,875}{0,15} = 12,50 \text{ minutos}$$





## SISTEMA DE COLAS TANDEM - Queuing Analysis

Una tienda familiar realiza el proceso de ventas a la clientela en tres etapas diferenciadas:

- El cliente es atendido por el vendedor (son 8 vendedores)
- El cliente se dirige a la caja para pagar su pedido (hay 3 cajeros)
- El cliente, después de pagar) se dirige a que se lo empaquen (2 trabajadores)

La distribución se distribuye de la siguiente forma: El tiempo de atención en cada etapa se distribuye exponencialmente. La tasa de llegada sigue una distribución Poisson de 40 clientes por hora.

Solamente el 75% de los clientes que llegan hacen una compra

El tiempo promedio de atención al cliente es el siguiente:

Tiempo promedio que un vendedor con un cliente es de 10 minutos

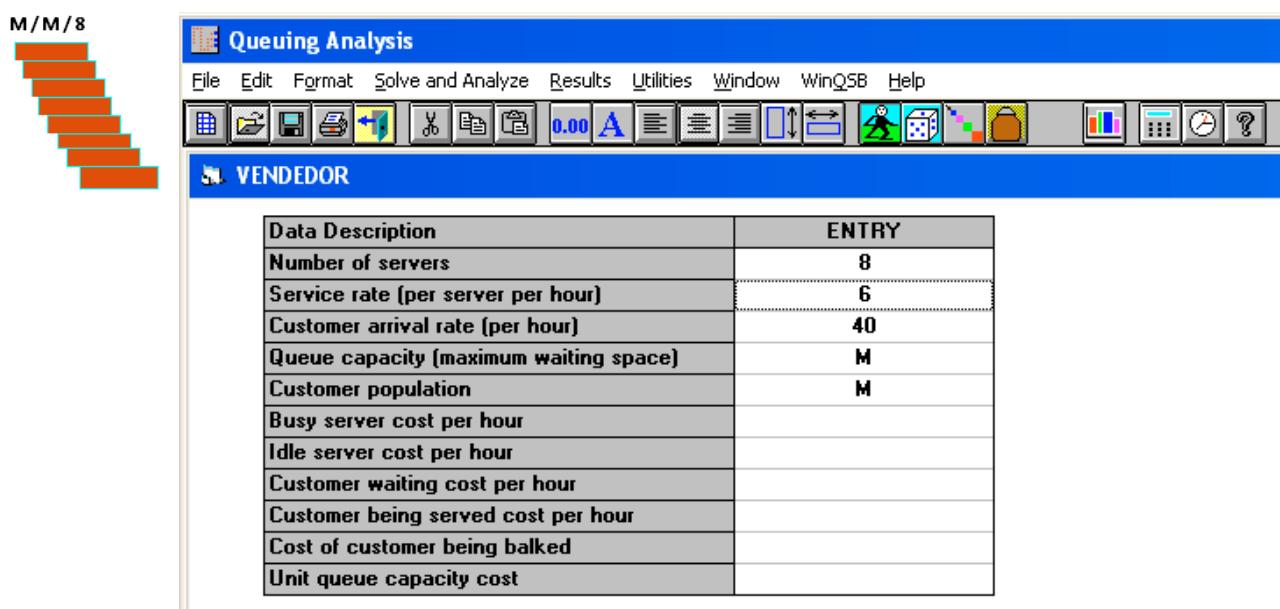
Tiempo promedio requerido para el proceso de pago es de 3 minutos.

Tiempo promedio en el área de empaquetado es de 2 minutos.

¿Cuál es el promedio de tiempo que un cliente que va a comprar invierte en la tienda?

El sistema de venta de la tienda familiar es un sistema de colas Tandem (3 colas).

El tiempo que invierte un cliente en la tienda es la suma de los tiempos invertidos en las tres etapas.



$$\mu = \frac{60}{10} = 6 \quad \lambda = 40$$

## MEDIDAS DE RENDIMIENTO VENDEDORES

**Queuing Analysis**

File Format Results Utilities Window Help

0.00 A

**System Performance Summary for VENDEDOR**

	Performance Measure	Result
1	System: M/M/8	From Formula
2	Customer arrival rate (lambda) per hour =	40,0000
3	Service rate per server (mu) per hour =	6,0000
4	Overall system effective arrival rate per hour =	40,0000
5	Overall system effective service rate per hour =	40,0000
6	Overall system utilization =	83,3333 %
7	Average number of customers in the system (L) =	9,3301
8	Average number of customers in the queue (Lq) =	2,6634
9	Average number of customers in the queue for a busy system (Lb) =	5,0000
10	Average time customer spends in the system (W) =	0,2333 hours
11	Average time customer spends in the queue (Wq) =	0,0666 hours
12	Average time customer spends in the queue for a busy system (Wb) =	0,1250 hours
13	The probability that all servers are idle (Po) =	0,0917 %
14	The probability an arriving customer waits (Pw) or system is busy (Pb) =	53,2687 %
15	Average number of customers being balked per hour =	0
16	Total cost of busy server per hour =	\$0
17	Total cost of idle server per hour =	\$0
18	Total cost of customer waiting per hour =	\$0
19	Total cost of customer being served per hour =	\$0
20	Total cost of customer being balked per hour =	\$0
21	Total queue space cost per hour =	\$0
22	Total system cost per hour =	\$0

Tiempo invertido en el sistema:  $W_{s1} = 0,2333 \times 60 = 14$  minutos

M/M/3

**Queuing Analysis**

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

0.00 A

**CAJEROS**

Data Description	ENTRY
Number of servers	3
Service rate (per server per hour)	20
Customer arrival rate (per hour)	30
Queue capacity (maximum waiting space)	M
Customer population	M
Busy server cost per hour	
Idle server cost per hour	
Customer waiting cost per hour	
Customer being served cost per hour	
Cost of customer being balked	
Unit queue capacity cost	

$$\mu = \frac{60}{3} = 20 \quad \lambda = 40 \times 0,75 = 30$$

## MEDIDAS DE RENDIMIENTO CAJEROS

**Queuing Analysis**

File Format Results Utilities Window Help

0.00 A

**System Performance Summary for CAJEROS**

	Performance Measure	Result
1	System: M/M/3	From Formula
2	Customer arrival rate (lambda) per hour =	30,0000
3	Service rate per server (mu) per hour =	20,0000
4	Overall system effective arrival rate per hour =	30,0000
5	Overall system effective service rate per hour =	30,0000
6	Overall system utilization =	50,0000 %
7	Average number of customers in the system (L) =	1,7368
8	Average number of customers in the queue (Lq) =	0,2368
9	Average number of customers in the queue for a busy system (Lb) =	1,0000
10	Average time customer spends in the system (W) =	0,0579 hours
11	Average time customer spends in the queue (Wq) =	0,0079 hours
12	Average time customer spends in the queue for a busy system (Wb) =	0,0333 hours
13	The probability that all servers are idle (Po) =	21,0526 %
14	The probability an arriving customer waits (Pw) or system is busy (Pb) =	23,6842 %
15	Average number of customers being balked per hour =	0
16	Total cost of busy server per hour =	\$0
17	Total cost of idle server per hour =	\$0
18	Total cost of customer waiting per hour =	\$0
19	Total cost of customer being served per hour =	\$0
20	Total cost of customer being balked per hour =	\$0
21	Total queue space cost per hour =	\$0
22	Total system cost per hour =	\$0

Tiempo invertido en el sistema:  $W_{s2} = 0,0579 \times 60 = 3,47$  minutos

M/M/2

**Queuing Analysis**

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

0.00 A

**EMPAQUETADO**

Data Description	ENTRY
Number of servers	2
Service rate (per server per hour)	30
Customer arrival rate (per hour)	30
Queue capacity (maximum waiting space)	M
Customer population	M
Busy server cost per hour	
Idle server cost per hour	
Customer waiting cost per hour	
Customer being served cost per hour	
Cost of customer being balked	
Unit queue capacity cost	

$$\mu = \frac{60}{2} = 30 \quad \lambda = 30$$

## MEDIDAS DE RENDIMIENTO EMPAQUETADO

Queuing Analysis		
File Format Results Utilities Window Help		
	Performance Measure	Result
1	System: M/M/2	From Formula
2	Customer arrival rate ( $\lambda$ ) per hour =	30,0000
3	Service rate per server ( $\mu$ ) per hour =	30,0000
4	Overall system effective arrival rate per hour =	30,0000
5	Overall system effective service rate per hour =	30,0000
6	Overall system utilization =	50,0000 %
7	Average number of customers in the system ( $L$ ) =	1,3333
8	Average number of customers in the queue ( $L_q$ ) =	0,3333
9	Average number of customers in the queue for a busy system ( $L_b$ ) =	1,0000
10	Average time customer spends in the system ( $W$ ) =	0,0444 hours
11	Average time customer spends in the queue ( $W_q$ ) =	0,0111 hours
12	Average time customer spends in the queue for a busy system ( $W_b$ ) =	0,0333 hours
13	The probability that all servers are idle ( $P_0$ ) =	33,3333 %
14	The probability an arriving customer waits ( $P_w$ ) or system is busy ( $P_b$ ) =	33,3333 %
15	Average number of customers being balked per hour =	0
16	Total cost of busy server per hour =	\$0
17	Total cost of idle server per hour =	\$0
18	Total cost of customer waiting per hour =	\$0
19	Total cost of customer being served per hour =	\$0
20	Total cost of customer being balked per hour =	\$0
21	Total queue space cost per hour =	\$0
22	Total system cost per hour =	\$0

Tiempo invertido en el sistema:  $W_{s3} = 0,0444 \times 60 = 2,67$  minutos

Tiempo que invierte el cliente:  $W_s = W_{s1} + W_{s2} + W_{s3} = 14 + 3,47 + 2,67 = 20,14$  minutos



$$W_s = W_{s1} + W_{s2} + W_{s3} = 14 + 3,47 + 2,67 = 20,14 \text{ minutos}$$



# PROGRAMACIÓN DINÁMICA



## WinQSB

### Dynamic Programming

- Problema de la Diligencia
- Problema de la Mochila
- Programación de producción e inventario

## PROGRAMACIÓN DINÁMICA

Presenta un enfoque general para la solución de problemas en donde se necesitan tomar decisiones en etapas sucesivas. De forma que las decisiones tomadas en una etapa condicionan la evolución futura del sistema, afectando a las situaciones en las que el sistema se encontrará en el futuro (denominadas estados), y a las decisiones que se plantearán en el futuro.

A diferencia de la programación lineal, el modelado de problemas de programación dinámica no sigue una forma estándar, una solución está formada por una serie de decisiones.

Para un problema de programación dinámica es necesario especificar cada uno de los problemas que lo caracterizan.

La resolución general de un problema de programación dinámica se fracciona en orden inverso en el análisis recursivo de casa una de las etapas. Es decir, se comienza por la última etapa pasando en cada iteración a la etapa antecesora. De este modo, el análisis de la primera etapa finaliza con la obtención del óptimo del problema.

**FUNCIÓN RECURSIVA DILIGENCIA:** Dados unos nodos y unos arcos que conectan estos nodos, el problema de la diligencia intenta encontrar la ruta más corta que conecta un nodo de arranque con el nodo final (destino).

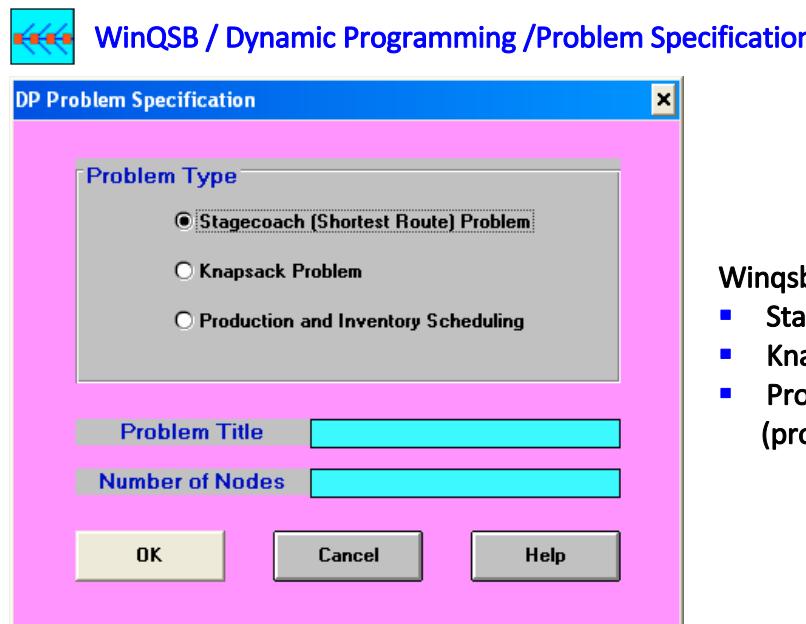
Siendo  $s \equiv$  estado de inicio y  $j \equiv$  estado final

$n \equiv$  fase (normalmente, representa el número de arcos hasta el destino)

$C(s, j) \equiv$  costo o distancia de ir de  $s$  hasta  $j$

$f(n, s) \equiv$  política de costo mínimo al encontrarse en el estado  $s$  de la etapa  $n$

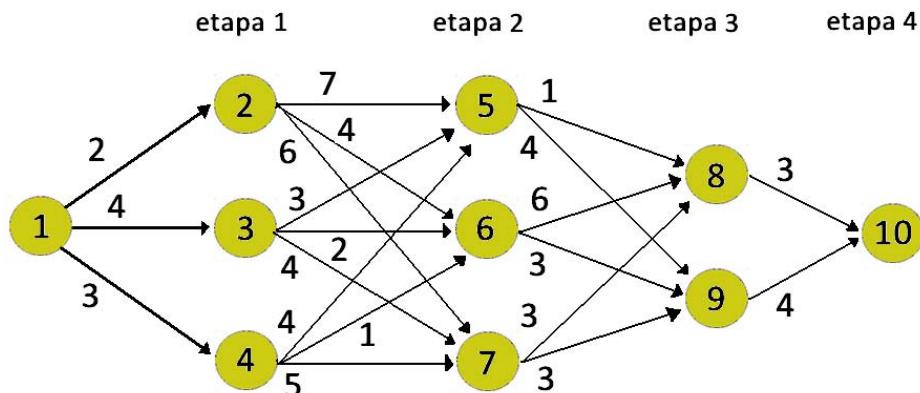
Función recursiva dinámica:  $f(n, s) = \min[C(s, j) + f(n-1, j)] \quad \forall \text{arco } (s, j)$



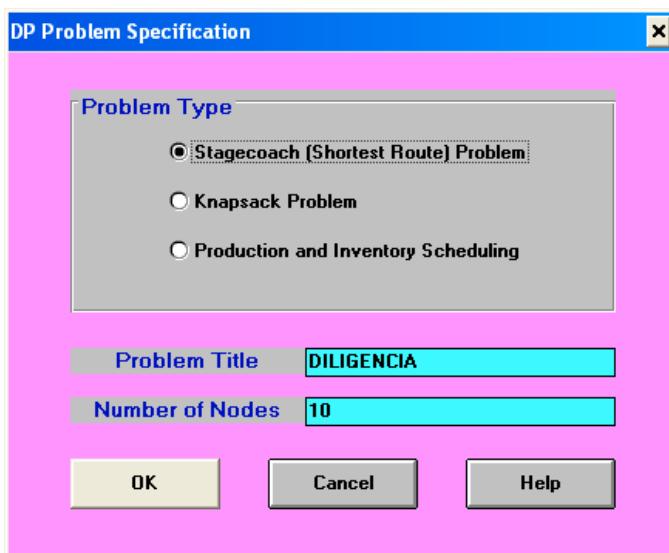
Winqsb incorpora tres modelos diferentes:

- Stagecoach Problem (Problema Diligencia)
- Knapsack Problem (Problema Mochila)
- Production and Inventory Scheduling (programación de producción e inventario)

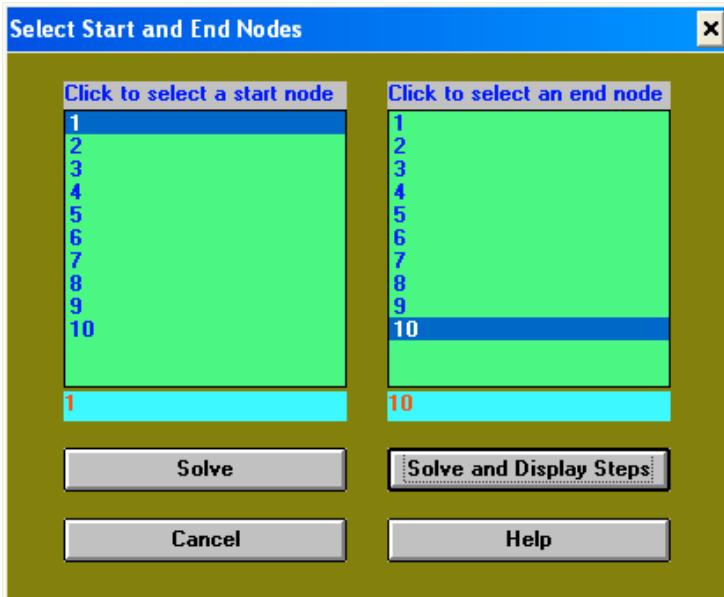
**PROBLEMA DE LA DILIGENCIA:** En el grafo se representan las posibles rutas de ir de la Ciudad 1 hasta la Ciudad 10. Cada nodo representa a una Ciudad y los arcos el costo o distancia de ir e un nodo a otro. Se supone que los desplazamientos tienen la misma duración. Calcular la solución óptima.



**Solución:**



From \ To	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		2	4	3						
2					7	4	6			
3					3	2	4			
4					4	1	5			
5			3	4				1	4	
6								6	3	
7								3	3	
8										3
9										4
10										



**Dynamic Programming**

File Format Results Utilities Window Help

Show Solution Summary  
Show Solution Detail

**Solution**

Perform What If Analysis

Stagecoach-Shortest Route Problem

	From Input State	To Output State	Distance	Cumulative Distance	Distance to 10
1	1	3	4	4	11
2	3	5	3	7	7
3	5	8	1	8	4
4	8	10	3	11	3
	From 1	To 10	Min. Distance	= 11	CPU = 0,00

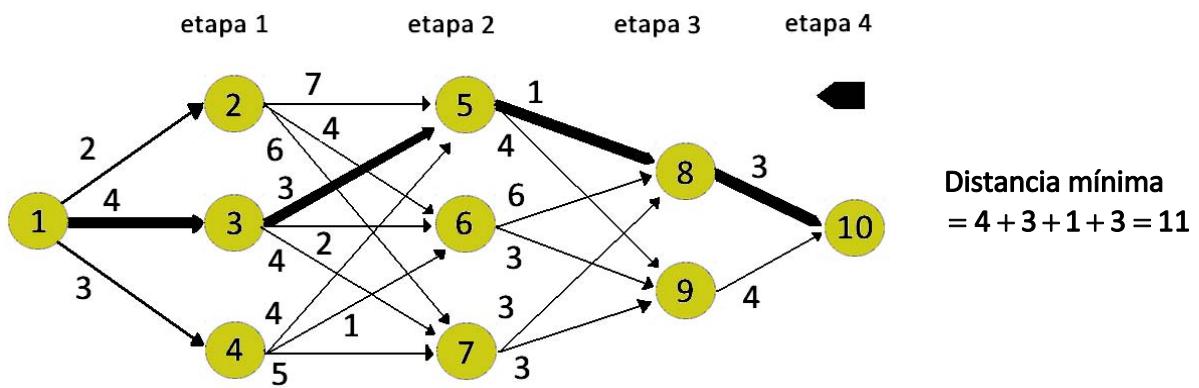
**Dynamic Programming**

File Format Results Utilities Window Help

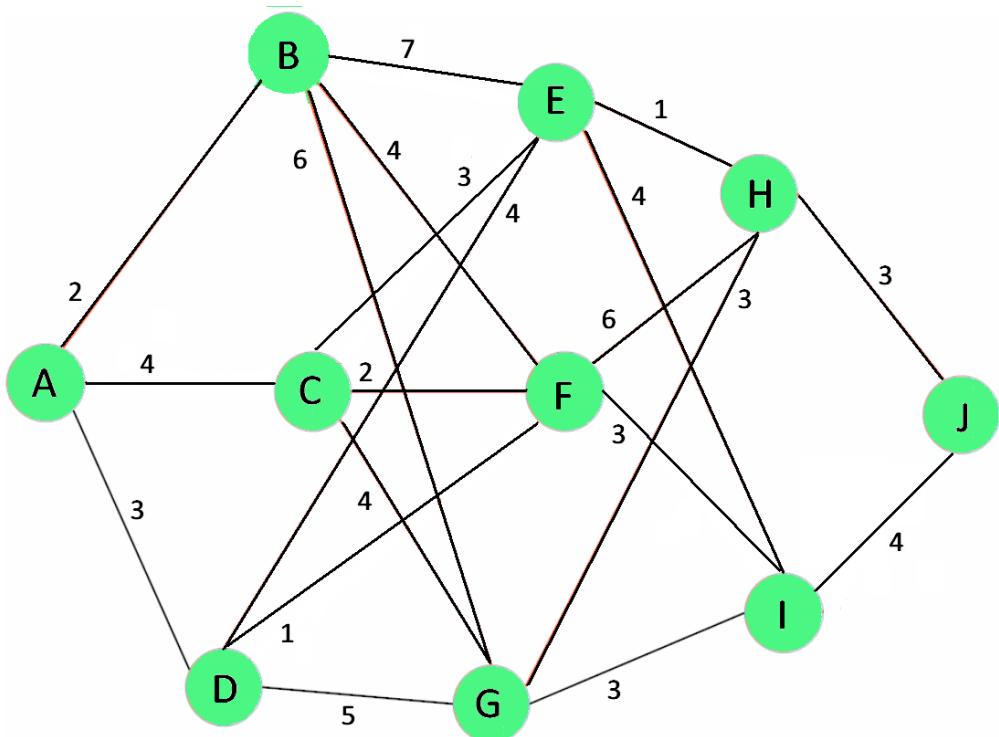
0.00 A

**Solution Steps for DILIGENCIA: Stagecoach-Shortest Route Problem**

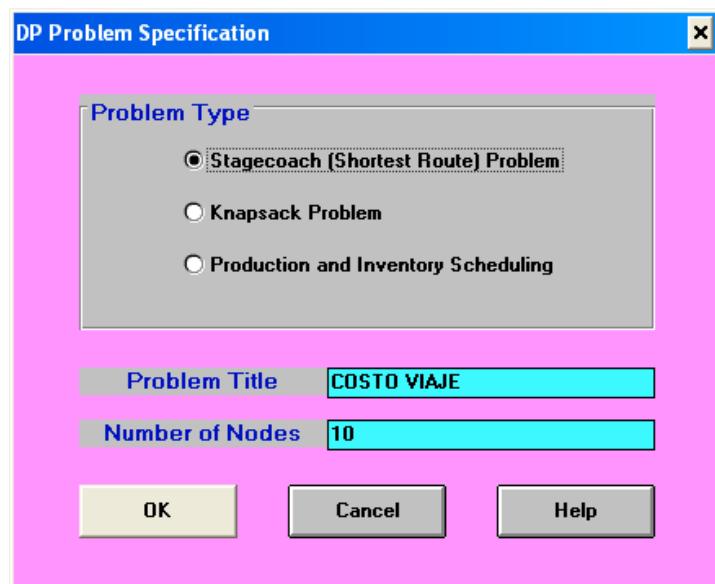
	Stage	From Input State	To Output State	Distance	Distance to 10	Status
1	1	1	3	4	11	Optimal
2	2	2	5	7	11	
3	2	3	5	3	7	Optimal
4	2	4	5	4	8	
5	3	5	8	1	4	Optimal
6	3	6	9	3	7	
7	3	7	8	3	6	
8	4	8	10	3	3	Optimal
9	4	9	10	4	4	
	From 1	To 10	Minimum Distance =	11	CPU = 0,00	



**PROBLEMA DE LA DILIGENCIA:** Se ofrecen pólizas de seguro de vida a los pasajeros. El costo de la póliza de cualquier jornada está basado en una evaluación de la seguridad del recorrido, la ruta más segura debe ser aquella cuya póliza de seguro tenga el menor costo total.  
 En cada arco, del estado i al estado j, se denota el costo de la póliza de viaje. ¿Cuál es la ruta que minimiza el costo total?



WinQSB / Dynamic Programming /Problem Specification

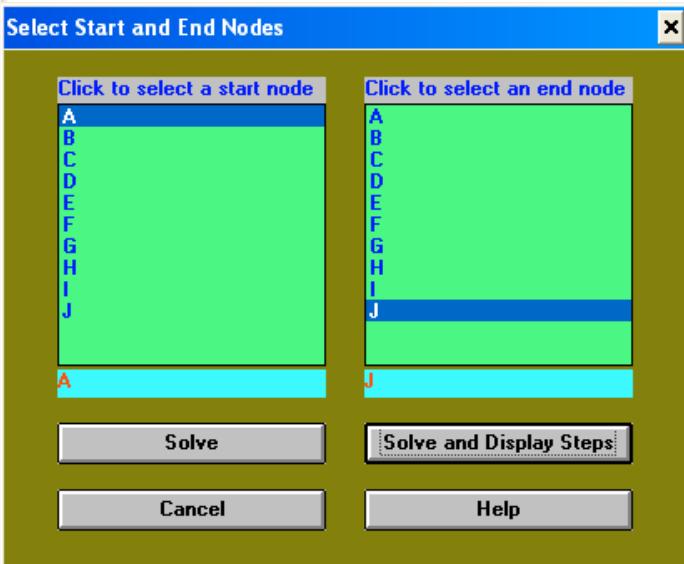


**Dynamic Programming**

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

The screenshot shows a software window titled "Dynamic Programming". The menu bar includes "File", "Edit", "Format", "Solve and Analyze", "Results", "Utilities", "Window", "WinQSB", and "Help". Below the menu is a toolbar with various icons. A red arrow points to the "Solve and Display Steps" icon. The main area displays a table titled "COSTO VIAJE: Stagecoach-Shortest Route Problem". The table has columns labeled "From \ To" and rows labeled A through J. The entries represent costs between nodes:

From \ To	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
A		2	4	3						
B					7	4	6			
C					3	2	4			
D					4	1	5			
E			3	4				1	4	
F								6	3	
G								3	3	
H										3
I										4
J										



**Dynamic Programming**

File Format Results Utilities Window Help

The screenshot shows the software window again, but now the "Results" menu is selected. The "Show Solution Detail" option is highlighted. The main area displays the results for the "Stagecoach-Shortest Route Problem".

**Solution**

Perform What If Analysis

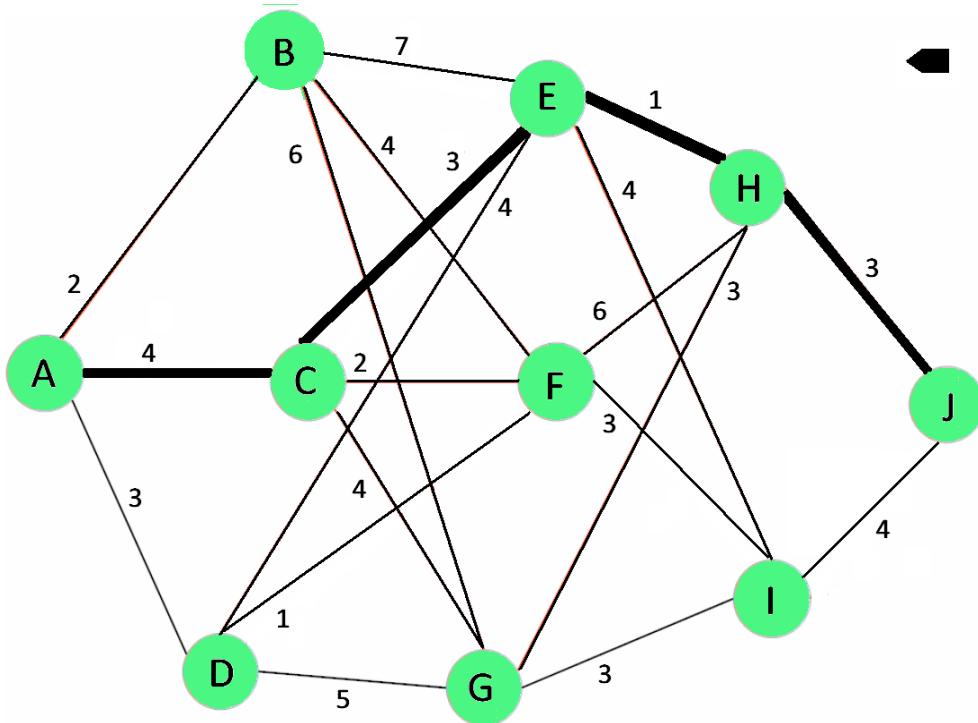
**Stagecoach-Shortest Route Problem**

	From Input State	To Output State	Distance	Cumulative Distance	Distance to J
1	A	C	4	4	11
2	C	E	3	7	7
3	E	H	1	8	4
4	H	J	3	11	3
	From A	To J	Min. Distance	= 11	CPU = 0



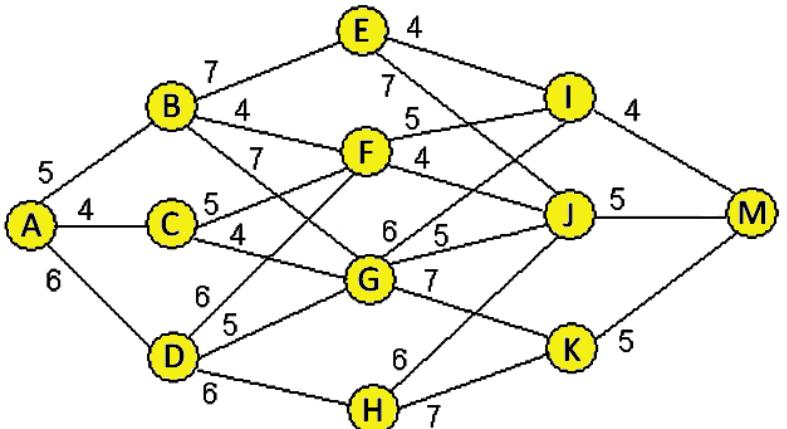
**Solution Steps for COSTO VIAJE: Stagecoach-Shortest Route Problem**

	Stage	From Input State	To Output State	Distance	Distance to J	Status
1	1	A	C	4	11	Optimal
2	2	B	E	7	11	
3	2	C	E	3	7	Optimal
4	2	D	E	4	8	
5	3	E	H	1	4	Optimal
6	3	F	I	3	7	
7	3	G	H	3	6	
8	4	H	J	3	3	Optimal
9	4	I	J	4	4	
		From A	To J	Minimum	Distance =	11
					CPU =	0



### PROBLEMA DE LA DILIGENCIA:

Encontrar el mejor camino para un viajante que tiene que desplazarse de A hasta M, si cada nodo representa una ciudad y las ramas la distancia en Km.



WinQSB / Dynamic Programming /Problem Specification

**DP Problem Specification**

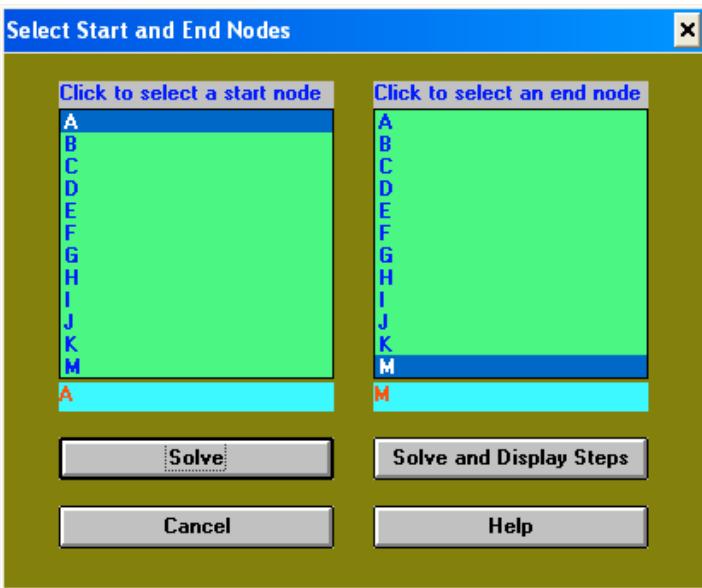
<b>Problem Type</b>
<input checked="" type="radio"/> Stagecoach (Shortest Route) Problem
<input type="radio"/> Knapsack Problem
<input type="radio"/> Production and Inventory Scheduling
<b>Problem Title</b> VIAJANTE
<b>Number of Nodes</b> 12
<b>OK</b> <b>Cancel</b> <b>Help</b>

**Dynamic Programming**

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

VIAJANTE: Stagecoach-Shortest Route Problem

From \ To	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	M
A		5	4	6								
B					7	4	7					
C						5	4					
D						6	5	6				
E									4	7		
F									5	4		
G									6	5	7	
H									6	7		
I												4
J												5
K												5
M												



**Dynamic Programming**

File Format Results Utilities Window Help

Show Solution Summary Show Solution Detail

**Solution**

Perform What If Analysis

Shortest Route Problem

	From Input State	To Output State	Distance	Cumulative Distance	Distance to M
1	A	B	5	5	18
2	B	F	4	9	13
3	F	I	5	14	9
4	I	M	4	18	4
	From A	To M	Min. Distance	= 18	CPU = 0

**Dynamic Programming**

File Format Results Utilities Window Help

Show Solution Summary Show Solution Detail

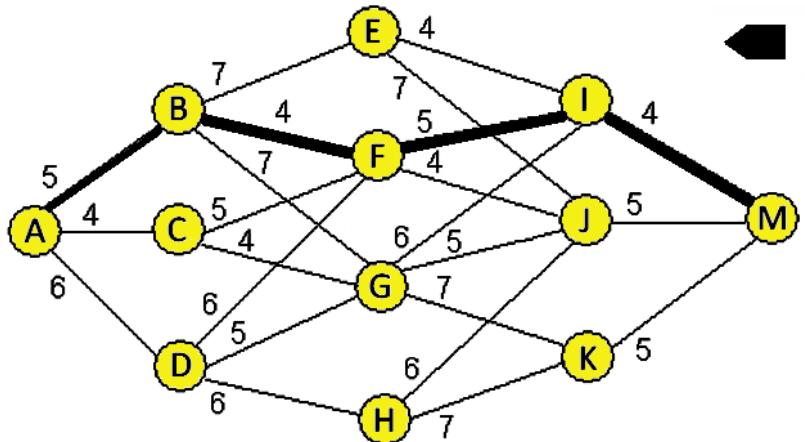
**Solution**

Perform What If Analysis

Shortest Route Problem

	Stage	From Input State	To Output State	Distance	Distance to M	Status
1	1	A	B	5	18	Optimal
2	2	B	F	4	13	Optimal
3	2	C	F	5	14	
4	2	D	F	6	15	
5	3	E	I	4	8	
6	3	F	I	5	9	Optimal
7	3	G	I	6	10	
8	3	H	J	6	11	
9	4	I	M	4	4	Optimal
10	4	J	M	5	5	
11	4	K	M	5	5	
	From A	To M	Minimum	Distance =	18	CPU = 0

Distancia mínima  
 $= 5 + 4 + 5 + 4 = 18 \text{ km}$



## PROBLEMA DE LA MOCHILA O CANASTA DE EQUIPAJE (Knapsack Problem)

Existen  $n$  tipos distintos de artículos que pueden cargarse en una mochila. Cada artículo tiene asociado un peso y un valor. El problema consiste en determinar cuántas unidades de cada artículo se deben colocar en la mochila para maximizar el valor total.

Este enfoque resulta útil para la planificación del transporte de artículos en algún medio (carga de un buque, avión, camión). Este modelo también se utiliza en planificación de producción (distribuir la producción a través de varias máquinas).

El problema se desarrolla considerando el peso o el volumen. También se puede resolver mediante programación lineal entera binaria.

### FUNCIÓN RECURSIVA DE LA MOCHILA:

Sea  $x_j$  el elemento  $j$  a transportar.

$x(j) \equiv$  número de unidades cargadas del artículo  $j$

$w(j) \equiv$  espacio o peso que demanda cada unidad del artículo  $j$

$R(j, x(j)) \equiv$  función de retorno del artículo  $j$  si se llevan  $x(j)$  unidades en la mochila del artículo  $j$

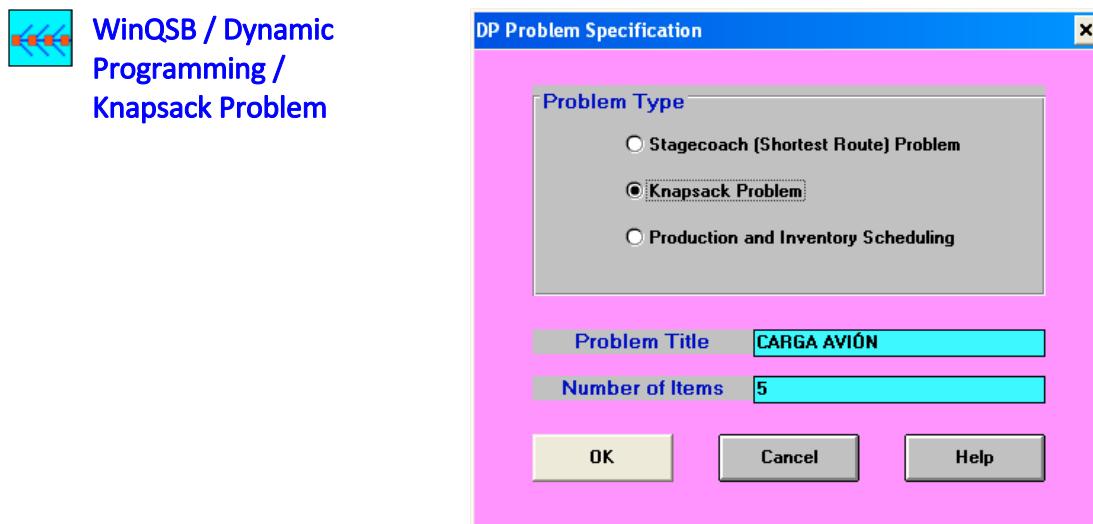
$g(j, w) \equiv$  retorno del total acumulativo dado el espacio  $w$  disponible para el artículo  $j$

Función recursiva dinámica:  $g(j, w) = \max[R(j, x(j)) + g(j-1, w - w(j) \cdot x(j)] \quad \forall x(j)$

**PROBLEMA DE LA MOCHILA:** La carga de un avión se distribuye con el propósito de maximizar el ingreso total. Se consideran 5 elementos y solo se necesita uno de cada uno. La compañía gana 4.000 euros por elemento más una bonificación por elemento. El avión puede transportar 1400 kg, con un volumen máximo de 100 metros cúbicos.

Atendiendo a las especificaciones de la tabla, ¿cuál es el máximo ingreso que puede obtenerse? Y ¿cuántos elementos deben transportarse?

Elemento	Peso (kg)	Volumen ( $m^3$ )	Bonificación
1	600	30	900
2	650	40	800
3	450	35	1100
4	520	25	1000
5	300	30	700



**Dynamic Programming**

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

**CARGA AVIÓN: Knapsack Problem**

Item (Stage)	Item Identification	Units Available	Unit Capacity Required	Return Function (X: Item ID) (e.g., 50X, 3X+100, 2.15X^2+5)
1	A	1	600	4900A
2	B	1	650	4800B
3	C	1	450	5100C
4	D	1	520	5000D
5	E	1	300	4700E
<b>Knapsack</b>	<b>Capacity =</b>	<b>1400</b>		

**Dynamic Programming**

File Format Results Utilities Window Help

**Solution for CARGA AVIÓN: Knapsack Problem**

Stage	Item Name	Decision Quantity (X)	Return Function	Total Item Return Value	Capacity Left
1	A	0	4900A	0	1400
2	B	0	4800B	0	1400
3	C	1	5100C	5100	950
4	D	1	5000D	5000	430
5	E	1	4700E	4700	130
Total			Value =	14800	CPU = 0,48

La solución indica que se deben transportar los ítems 3, 4 y 5 con un retorno total de 14.800 euros.

CPU: Tiempo aproximado de procesamiento.

Considerando sólo el volumen, el nuevo modelo será:

**Dynamic Programming**

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

**CARGA AVIÓN: Knapsack Problem**

Item (Stage)	Item Identification	Units Available	Unit Capacity Required	Return Function (X: Item ID) (e.g., 50X, 3X+100, 2.15X^2+5)
1	A	1	30	4900A
2	B	1	40	4800B
3	C	1	35	5100C
4	D	1	25	5000D
5	E	1	30	4700E
<b>Knapsack</b>	<b>Capacity =</b>	<b>100</b>		

**Dynamic Programming**

File Format Results Utilities Window Help

03-19-2022 Stage	Item Name	Decision Quantity (X)	Return Function	Total Item Return Value	Capacity Left
1	A	1	4900A	4900	70
2	B	0	4800B	0	70
3	C	1	5100C	5100	35
4	D	1	5000D	5000	10
5	E	0	4700E	0	10
	Total	Return	Value =	15000	CPU = 0,12

La solución indica que se deben transportar los ítems 1, 3 y 4 con un retorno total de 15.000 euros.

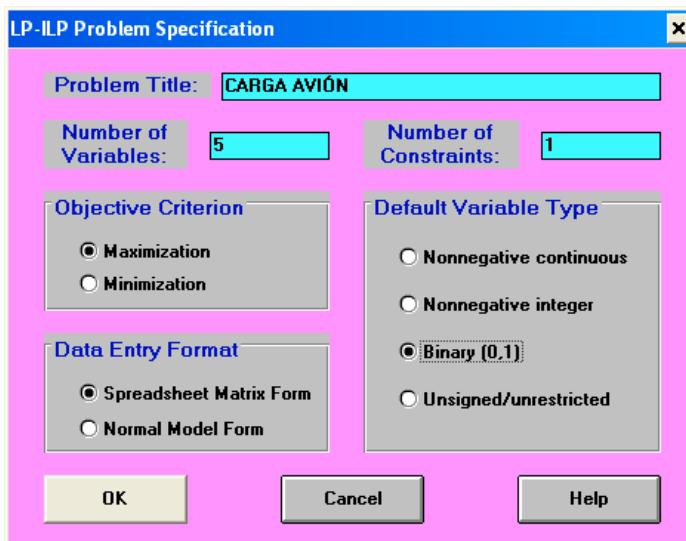
CPU: Tiempo aproximado de procesamiento.

### Max. $\text{CX}$ WinQSB / Linear and Integer Programming / Nonnegative Integer

Se puede resolver como un problema de programación lineal entera binaria

$$\text{Maximizar } z = 4900x_1 + 4800x_2 + 5100x_3 + 5000x_4 + 4700x_5$$

$$\text{Restricciones: } 600x_1 + 650x_2 + 450x_3 + 520x_4 + 300x_5 \leq 1400 \text{ kg} \quad x_i \geq 0 \text{ entero}$$



Linear and Integer Programming

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

Variable -->	X1	X2	X3	X4	X5	Direction	R. H. S.
Maximize	4900	4800	5100	5000	4700		
C1	600	650	450	520	300	$\leq$	1400
LowerBound	0	0	0	0	0		
UpperBound	1	1	1	1	1		
VariableType	Binary	Binary	Binary	Binary	Binary		

Linear and Integer Programming

File Format Results Utilities Window Help

	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c[i]	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status
1	X1	0	4900	0	4900	at bound
2	X2	0	4800	0	4800	at bound
3	X3	1	5100	5100	0	basic
4	X4	1	5000	5000	0	basic
5	X5	1	4700	4700	0	basic
Objective Function		(Max.) =	14800			
Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	
1	C1	1270	<=	1400	130	0

Análogamente para el volumen:

$$\text{Maximizar } z = 4900x_1 + 4800x_2 + 5100x_3 + 5000x_4 + 4700x_5$$

$$\text{Restricciones: } 30x_1 + 40x_2 + 35x_3 + 25x_4 + 30x_5 \leq 100 \text{ m}^3 \quad x_i \geq 0 \text{ entero}$$

Linear and Integer Programming

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

Variable -->	X1	X2	X3	X4	X5	Direction	R. H. S.
Maximize	4900	4800	5100	5000	4700		
C1	30	40	35	25	30	<=	100
LowerBound	0	0	0	0	0		
UpperBound	1	1	1	1	1		
VariableType	Binary	Binary	Binary	Binary	Binary		

Linear and Integer Programming

File Format Results Utilities Window Help

	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c[i]	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status
1	X1	1	4900	4900	0	basic
2	X2	0	4800	0	4800	at bound
3	X3	1	5100	5100	5100	at bound
4	X4	1	5000	5000	0	basic
5	X5	0	4700	0	4700	at bound
Objective Function		(Max.) =	15000			
Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	
1	C1	90	<=	100	10	0



## PROGRAMACIÓN DE PRODUCCIÓN E INVENTARIO (Production and Inventory Scheduling)

Los sistemas de producción con inventarios son muy variados, cada uno presenta un nivel de complejidad diferente y es innegable la importancia que tienen para la planificación y el desarrollo de la economía.

Determinar el nivel de inventario para diferentes períodos de forma que se garantice cierto flujo de producción, calcular el tiempo de reaprovisionamiento de materias primas y materiales, estudiar el comportamiento de la demanda, son algunos de los aspectos más importantes analizados por estos sistemas.

La programación dinámica da solución a uno de los casos más sencillos: El problema de producción con inventarios de un solo producto para un determinado período, con demanda conocida para cada subperíodo.

**DESCRIPCIÓN GENERAL DEL PROBLEMA TIPO:** Se produce un producto A en un determinado período, se conoce la capacidad de producción y la demanda del producto para cada subperíodo y se puede almacenar para ser utilizado posteriormente. Se saben los costos de producción y de almacenamiento. El objetivo es determinar la cantidad a producir en cada subperíodo para minimizar los costos totales.

Elementos que componen un problema de producción con inventario:

Etapas (n): cada uno de los subperíodos de tiempo en que se puede dividir el período de planificación.

Estados (S): cantidad de unidades del producto en inventario al inicio de cada etapa.

Variable de decisión ( $X_n$ ): cantidad de unidades a producir en cada uno de los subperíodos de tiempo.

$C_{ap}(P)$  : capacidad de producción       $C_{ap}(A)$  : capacidad de almacenamiento

$C_p$  : costo de producción       $C_a$  : costo de almacenamiento

Función de recursividad: 
$$\begin{cases} f_n^*(S) = \min [f_n(S, x_n)] \\ f_n^*(S, x_n) = \min [C_p(x_n) + C_l(S) + f_{n-1}^*(S+x_n - d_n)] \end{cases}$$

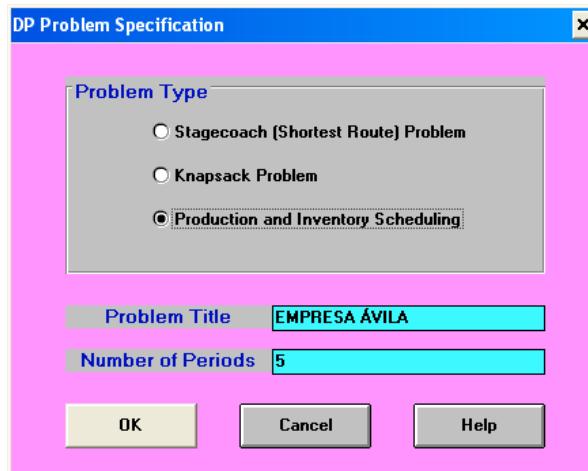
**PRODUCCIÓN E INVENTARIO:** La empresa Ávila para los primeros cinco meses quiere producir tanques de agua para servicio público. El producto puede producirse en un mes y almacenarse para ser vendido posteriormente. En la tabla adjunta se muestra la demanda y la capacidad de producción para cada mes y el costo unitario de producción y almacenamiento. Al comienzo del período no hay tanques en el almacén, ni se desea que haya al final.

La empresa desea conocer cuántos tanques debe producir cada mes para minimizar el costo total al final del período, sabiendo que no permite tener más de 3 tanques en inventario.

Mes	Demanda (tanques)	Capacidad de Producción (tanques)	Costo unitario de Producción (euros/tanque)	Costo unitario de Almacenamiento (euros/tanque)
Enero	2	4	30	2
Febrero	4	5	60	1
Marzo	5	5	30	5
Abril	3	4	50	2
Mayo	1	5	20	5



## WinQSB / Dynamic Programming / Production and Inventory Scheduling



Period (Stage)	Period Identification	Demand	Production Capacity	Storage Capacity	Production Setup Cost	Variable Cost Function (P,H,B: Variables)
1	Enero	2	4	3	0	$30P+2H$
2	Febrero	4	5	3	0	$60P+2H$
3	Marzo	5	5	3	0	$30P+2H$
4	Abril	3	4	3	0	$50P+2H$
5	Mayo	1	5	3	0	$20P+2H$
Initial	Inventory =	0				

El problema consiste en determinar un programa de producción para un periodo de tiempo con el fin de minimizar los costos totales relacionados. Hay demandas conocidas para cada periodo, límites de capacidad tanto para la producción como para los inventarios (almacenamiento).

Cuando hay más producción que demanda, se acumula inventario (almacenamiento), y cuando la producción es menor que la demanda, se generarán retrasos en el cumplimiento de pedidos (backorder, pedido pendiente).

Para cada periodo, una producción no-cero incurre en un costo de preparación. En programación dinámica, el costo variable se expresa como una función de la producción (P), el inventario (H), y backorder (B).

$P(n)$  ≡ Número de unidades producidas en el periodo n

$D(n)$  ≡ Demanda en el periodo n

$H(n)$  ≡ Inventario disponible al final del periodo n

$B(n)$  ≡ Pedido pendiente al final del periodo n

$I(n)$  ≡ Posición del pedido pendiente al final del periodo n. Es decir,  $I(n) = H(n)$  o  $I(n) = B(n)$

$$I(n) = I(n - 1) + P(n) - D(n)$$

$S(n)$  ≡ Costo de preparación en el periodo n

$V[P(n), I(n)]$  ≡ Costo variable → Función de  $P(n)$ ,  $H(n)$ , y/o  $B(n)$

$$C[n, P(n), I(n)] = \begin{cases} S(n) + V[P(n), I(n)] & P(n) > 0 \\ V[P(n), I(n)] & P(n) = 0 \end{cases}$$

Función recursiva:  $f(n, i) = \max [ \{ C(n, P(n), i + P(n) - D(n)) + f(n-1, i + P(n) - D(n)) \} ] \quad \forall P(n)$

**Period Identification:** Identificación de los períodos de tiempo en que se divide el estudio (etapas).

**Demand:** Demanda para cada período.

**Production Capacity:** Capacidad de producción de cada período.

**Storage Capacity:** Capacidad de almacenamiento de cada período.

**Production Setup Cost:** Costo de lanzamiento o preparación para el período (es independiente de la cantidad de unidades a producir en el período).

**Variable Cost Function:** Función del costo variable.

The screenshot shows a software application titled "Dynamic Programming". The menu bar includes File, Format, Results, Utilities, Window, and Help. Below the menu is a toolbar with various icons. The main window displays a table titled "Solution for EMPRESA ÁVILA: Production and Inventory Scheduling Problem". The table has columns for Stage, Period Description, Net Demand, Starting Inventory, Production Quantity, Ending Inventory, Setup Cost, Variable Cost Function (P,H,B), Variable Cost, and Total Cost. The data is as follows:

Stage	Period Description	Net Demand	Starting Inventory	Production Quantity	Ending Inventory	Setup Cost	Variable Cost Function (P,H,B)	Variable Cost	Total Cost
1	Enero	2	0	4	2	0	30P+2H	124,00 €	124,00 €
2	Febrero	4	2	2	0	0	60P+2H	120,00 €	120,00 €
3	Marzo	5	0	5	0	0	30P+2H	150,00 €	150,00 €
4	Abril	3	0	3	0	0	50P+2H	150,00 €	150,00 €
5	Mayo	1	0	1	0	0	20P+2H	20,00 €	20,00 €
<b>Total</b>		<b>15</b>	<b>2</b>	<b>15</b>	<b>2</b>	<b>0</b>		<b>564,00 €</b>	<b>564,00 €</b>



# **PROCESOS DE MARKOV**

**WinQSB**



## CADENAS DE MARKOV

En teoría de la probabilidad, se conoce como **Cadena de Markov** a un tipo especial de proceso estocástico en el que la probabilidad de que ocurra un suceso depende del suceso inmediatamente anterior. En efecto, las cadenas de este tipo tienen memoria.

Recuerdan el último suceso y esto condiciona las posibilidades de los sucesos futuros. Esta dependencia del suceso anterior distingue a las cadenas de Markov de las series de sucesos independientes, como tirar un dado al aire.

## PROCESO ESTOCÁSTICO

Concepto matemático que sirve para caracterizar una sucesión de variables aleatorias (estocásticas) que evolucionan en función de otra variable, generalmente el tiempo.

Para describir y analizar un proceso de Markov, se introduce la siguiente terminología:

## MATRIZ DE TRANSICIÓN EN PLAZOS

Estado: Condición particular del sistema  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Se definen las variables aleatorias:  $X_n \equiv$  celda ocupada en el instante  $n$

Vector distribución: Vector fila no negativo con una entrada para cada estado del sistema.

Vector probabilidad: Vector  $v = (v_1, v_2, \dots, v_k)$  con entradas no negativas, de forma que se agregan hasta llegar a 1. Las entradas pueden representar las probabilidades de encontrar un sistema en cada uno de los estados.  $v_i \geq 0$  para  $i=1, 2, \dots, n$   $\sum_{i=1}^n v_i = 1$

El vector de distribución  $v = (v_1, v_2, \dots, v_k)$  y la matriz de transición  $P$  determinan la probabilidad para el estado de la cadena en el segundo instante de tiempo, dicha probabilidad viene dada por el vector  $(vP)$

Distribución después del 1 paso:  $vP$

Distribución después del 2 paso:  $(vP)P = vP^2$

Distribución después del 3 paso:  $(vP^2)P = vP^3$

---

Distribución después de  $n$  pasos:  $vP^n$

Una notación conveniente para representar las probabilidades de transición de  $n$  pasos es la matriz de transición de  $n$  pasos:

$$P^{(n)} = \begin{pmatrix} p_{11}^{(n)} & p_{12}^{(n)} & \cdots & p_{1k}^{(n)} \\ p_{21}^{(n)} & p_{22}^{(n)} & \cdots & p_{2k}^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{k1}^{(n)} & p_{k2}^{(n)} & \cdots & p_{kk}^{(n)} \end{pmatrix}$$

La probabilidad de transición en una fila y columna dadas es la transición del estado en esa fila al estado en la columna. Cuando  $n = 1$  el superíndice  $n$  no se escribe y se hace referencia a ésta como una Matriz de Transición.

Las probabilidades de transición en  $n$  pasos son las probabilidades de transición del estado  $i$  al estado  $j$  en  $n$  pasos, denotándose como:

$$p_{ij}^{(n)} = P(X_n = j | X_0 = i) = P(X_{n+m} = j | X_m = i), \text{ por tanto, } p_{ij}^{(1)} = p_{ij}$$

Las cadenas de Markov que se analizan:  $\begin{cases} \text{Número finito de estados} \\ \text{Probabilidades de transición estacionarias} \end{cases}$

Sean los posibles estados  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Las probabilidades de transición  $p_{ij} = P[X_{n+1} = j | X_n = i]$  son estacionarias porque no dependen del instante en que se encuentre el proceso.

Estados	1	2	3	4	5	6
1	$p_{11}$	$p_{12}$	$p_{13}$	$p_{14}$	$p_{15}$	$p_{16}$
2	$p_{21}$	$p_{22}$	$p_{23}$	$p_{24}$	$p_{25}$	$p_{26}$
3	$p_{31}$	$p_{32}$	$p_{33}$	$p_{34}$	$p_{35}$	$p_{36}$
4	$p_{41}$	$p_{42}$	$p_{43}$	$p_{44}$	$p_{45}$	$p_{46}$
5	$p_{51}$	$p_{52}$	$p_{53}$	$p_{54}$	$p_{55}$	$p_{56}$
6	$p_{61}$	$p_{62}$	$p_{63}$	$p_{64}$	$p_{65}$	$p_{66}$

Matriz de transición (P):

Probabilidad de que el sistema se mueva del estado  $i$  al estado  $j$

$P =$

Según las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov, la matriz de probabilidades de transición de  $n$  pasos ( $P^n$ ) se puede obtener al calcular la  $n$ -ésima potencia de la matriz de transición de un paso  $P$ :  $P^{(n)} = P^n$

**DISTRIBUCIÓN MARGINAL DEL PASO  $n$ -ésimo:** Conocidas las probabilidades de transición en  $n$  pasos se calcula la distribución marginal del paso  $n$ -ésimo:

$$P(X_n = j) = \sum_i P(X_n = j | X_0 = i) = \sum_i p_{ij}^{(n)} \pi_i^0$$

Distribución de probabilidad inicial  $X_0$ :  $\pi^0 = (\pi_0^0, \pi_1^0, \dots, \pi_i^0, \dots)$  con  $\pi_i^0 = P(X_0 = i)$

Distribución de probabilidad en  $n$  pasos:  $\pi^n = (\pi_0^n, \pi_1^n, \dots, \pi_i^n, \dots)$  con  $\pi_i^n = P(X_n = i)$

Por tanto,  $\pi^n = \pi^0 P^n$

### ESTADO ESPERADO

Estado esperado en el instante  $n$  suponiendo que se parte del estado  $i$ :

$$P(X_n | X_0 = i) = \sum_{j=0}^{\infty} j P(X_n = j | X_0 = i) = \sum_{j=0}^{\infty} j p_{ij}^{(n)}$$

$$\text{Estado esperado en el instante } n: P(X_n = j) = \sum_{i=0}^{\infty} j P(X_n = j) = \sum_{i=0}^{\infty} j \sum_i p_{ij}^{(n)} \pi_i^0$$

**VECTOR DE PROBABILIDAD ESTACIONARIO:** Un vector de probabilidad  $\pi$  (finito o infinito numerable) se dice estacionario para una cadena de Markov en tiempo discreto (CMTD) si cualquier transición de

acuerdo con la matriz  $P$  verifica:  $\pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i p_{ij} \quad j \geq 0 \quad \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1$

$\pi_j$  ≡ probabilidad estacionaria de estar en el estado  $j$

$\mu_j = \frac{1}{\pi_j}$  ≡ frecuencia que tarda en ser visitado el estado  $j$

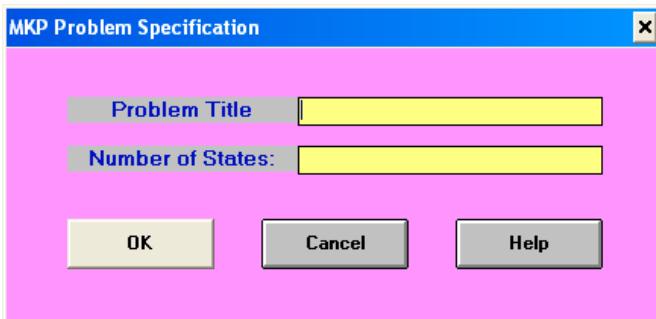
Al vector de probabilidad estacionario  $\pi$  también se le denomina distribución estacionaria o distribución de equilibrio.

**ESTADO ESTABLE:** Las cadenas de Markov poseen una propiedad notable en cuanto a que tienden a aproximarse a lo que se llama estado estable.

El estado estable se determina resolviendo la ecuación  $\pi P = \pi$ , añadiendo la ecuación  $\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1$



## WinQSB / Markov Process /Problem Specification



La opción Nuevo Problema (New Problem) genera una plantilla (MKP Problem Specification) donde se introducen las características del problema.

Titulo del problema (Problem Title)

Número de estados (Number of States)

La plantilla representa una matriz con las relaciones entre los estados (State), sus probabilidades iniciales (Initial Prob.) y el costo de cada uno de ellos (State Cost).

En el menú Resolver y analizar (Solve and Analyze) figuran las opciones de Resolver los estados completos (Solve Steady State) o mostrar el Proceso de Markov por pasos (Markov Process Step).

From \ To	State1	State2	State3	State4
State1	0.2	0.3	0.1	0.4
State2	0.25	0.35	0.4	0
State3	0.1	0.2	0.2	0.5
State4	0.5	0.3	0.1	0.1
Initial Prob.	0.2	0.1	0.35	0.35
State Cost	2000	1500	1000	900

	State Name	State Probability	Recurrence Time
1	State1	0,2638	3,7908
2	State2	0,2938	3,4038
3	State3	0,2090	4,7838
4	State4	0,2334	4,2849
	Expected	Cost/Return =	1387,3530

Con la primera opción resulta una matriz final indicando las probabilidades de estado estable, lo que significa que a largo plazo el sistema estará el 26,38 % del tiempo en el estado 1, un 29,38% estará en el estado 2, 20,9 % estará en estado 3 y 23,34 % en estado 4, lo que hace que el costo medio del proceso es de 1.387,3530 euros

Desde la matriz inicial, con la opción Solve and Analyze / Markov Process Step aparece una ventana que permite controlar las iteraciones del proceso.

From \ To	State1	State2	State3	State4
State1	0.2	0.3	0.1	0.4
State2	0.25	0.35	0.4	0
State3	0.1	0.2	0.2	0.5
State4	0.5	0.3	0.1	0.1
Initial Prob.	0.2	0.1	0.35	0.35
State Cost	2000	1500	1000	900

**Markov Process for Specific Periods**

Specify the initial state probabilities and enter the number of time periods from now (i.e., initial), then press the OK button. The resulted state probabilities will be shown in the right column. You may press the Steady State button to obtain the steady state result.

State	Initial State Probability	Resulted State Probability
State1	0,200000	
State2	0,100000	
State3	0,350000	
State4	0,350000	

The number of time periods from initial:

Expected cost or return:

OK      Next Period      Steady State

Cancel      Print      Help

Se observa **Number of Time Periods from Initial** (Número de periodos procesados), pulsando en el botón **Next Period** y luego en el botón **OK**.

Para el periodo dos, se pulsa **Next Period** seguido del botón **OK**. Así, sucesivamente.

En la columna **Resulted State Probability** (Probabilidad del estado resultante) se muestran las probabilidades para los períodos.

**Markov Process for Specific Periods**

Specify the initial state probabilities and enter the number of time periods from now (i.e., initial), then press the OK button. The resulted state probabilities will be shown in the right column. You may press the Steady State button to obtain the steady state result.

State	Initial State Probability	Resulted State Probability
State1	0,200000	0,263798
State2	0,100000	0,293785
State3	0,350000	0,209040
State4	0,350000	0,233377

The number of time periods from initial:  Steady state

Expected cost or return:  1.387,353000

OK      Next Period      Steady State

Cancel      Print      Help

Pulsando en el botón **Steady State** se alcanza la matriz estable.

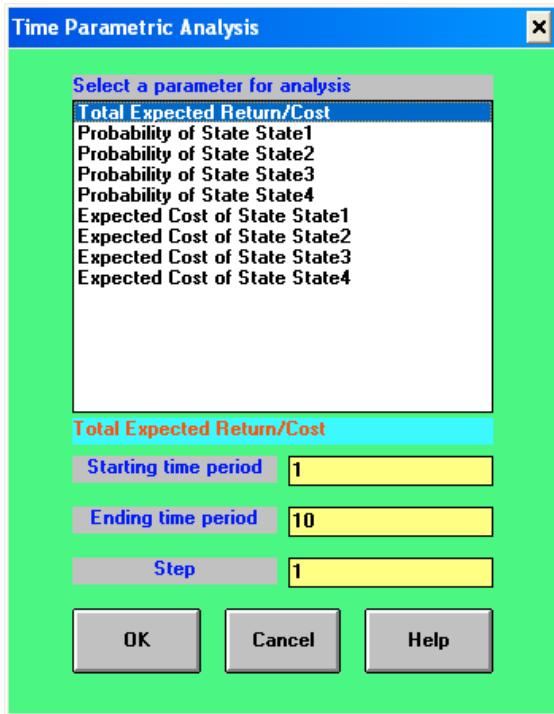
Con la opción **Solve and Analyze / Time Parametric Analysis** (Análisis Paramétrico en el Tiempo) aparece una nueva ventana.

**Markov Process**

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

Solve Steady State  
Markov Process Step  
Time Parametric Analysis

From \ To	State1	State2	State3	State4
State1	0.2	0.3	0.1	0.4
State2	0.25	0.35	0.4	0
State3	0.1	0.2	0.2	0.5
State4	0.5	0.3	0.1	0.1
Initial Prob.	0.2	0.1	0.35	0.35
State Cost	2000	1500	1000	900



Se puede acceder a tres opciones:

**Total Expected Return/Cost** : Retorno/Costo total esperado

**Probability of State**: Probabilidad de cada estado

**Expected Cost of State**: Costo esperado de cada estado

Pulsando el botón OK para mostrar el **Total Expected Return/Cost** (Retorno/Costo total esperado) para 10 períodos (1 por periodo – Step = 1) se observa que el costo comienza a estabilizarse para los últimos períodos (recordar que el costo final es de 1.387,3530 euros).

**Markov Process**

File	Format	Results	Utilities	Window	Help
0.00 A					
<b>Time Parametric Analysis for PRUEBA</b>					
	Time Period	Total Expected Return/Cost			
1	1	1381			
2	2	1410,3500			
3	3	1385,6500			
4	4	1387,9060			
5	5	1387,0120			
6	6	1387,4280			
7	7	1387,3330			
8	8	1387,3610			
9	9	1387,3510			
10	10	1387,3540			

**Markov Process for Specific Periods**

Specify the initial state probabilities and enter the number of time periods from now [i.e., initial], then press the OK button. The resulted state probabilities will be shown in the right column. You may press the Steady State button to obtain the steady state result.

State	Initial State Probability	Resulted State Probability
State1	0,200000	0,263799
State2	0,100000	0,293785
State3	0,350000	0,209040
State4	0,350000	0,233376

The number of time periods from initial: 10

Expected cost or return: 1.387,354000

OK Next Period Steady State  
Cancel Print Help

Idéntico resultado se hubiera obtenido para el período 10, pulsando **Next Period**.

**Markov Process for Specific Periods**

Specify the initial state probabilities and enter the number of time periods from now (i.e., initial), then press the OK button. The resulted state probabilities will be shown in the right column. You may press the Steady State button to obtain the steady state result.

State	Initial State Probability	Resulted State Probability
State1	0.200000	0.263798
State2	0.100000	0.293785
State3	0.350000	0.209040
State4	0.350000	0.233377

The number of time periods from initial: 11

Expected cost or return: 1.387,353000

**Buttons:** OK, Next Period, Steady State, Cancel, Print, Help

En el período 11 se obtiene el costo final óptimo de 1.387,3530 euros.

Para conocer **Probability of State (Probabilidad de cada estado)** en el período 11

**Time Parametric Analysis**

Select a parameter for analysis

- Total Expected Return/Cost
- Probability of State State1**
- Probability of State State2
- Probability of State State3
- Probability of State State4
- Expected Cost of State State1
- Expected Cost of State State2
- Expected Cost of State State3
- Expected Cost of State State4

Probability of State State1

Starting time period: 1

Ending time period: 11

Step: 1

**Buttons:** OK, Cancel, Help

**Time Parametric Analysis**

Select a parameter for analysis

- Total Expected Return/Cost
- Probability of State State1
- Probability of State State2
- Probability of State State3
- Probability of State State4**
- Expected Cost of State State1
- Expected Cost of State State2
- Expected Cost of State State3
- Expected Cost of State State4

Probability of State State4

Starting time period: 1

Ending time period: 11

Step: 1

**Buttons:** OK, Cancel, Help

**Markov Process**

File Format Results Utilities Window Help

	Time Period	Probability of State State1
1	1	0,2750
2	2	0,2840
3	3	0,2615
4	4	0,2642
5	5	0,2635
6	6	0,2639
7	7	0,2638
8	8	0,2638
9	9	0,2638
10	10	0,2638
11	11	0,2638

**Markov Process**

File Format Results Utilities Window Help

	Time Period	Probability of State State4
1	1	0,2900
2	2	0,2215
3	3	0,2345
4	4	0,2325
5	5	0,2336
6	6	0,2333
7	7	0,2334
8	8	0,2334
9	9	0,2334
10	10	0,2334
11	11	0,2334

Análogamente, el Costo esperado de cada estado (Expected Cost of State) en el período 11:

**Time Parametric Analysis**

Select a parameter for analysis

- Total Expected Return/Cost
- Probability of State State1
- Probability of State State2
- Probability of State State3
- Probability of State State4
- Expected Cost of State State1**
- Expected Cost of State State2
- Expected Cost of State State3
- Expected Cost of State State4

**Expected Cost of State State1**

Starting time period

Ending time period

Step

OK Cancel Help

**Time Parametric Analysis**

Select a parameter for analysis

- Total Expected Return/Cost
- Probability of State State1
- Probability of State State2
- Probability of State State3
- Probability of State State4
- Expected Cost of State State1
- Expected Cost of State State2**
- Expected Cost of State State3
- Expected Cost of State State4

**Expected Cost of State State2**

Starting time period

Ending time period

Step

OK Cancel Help

**Markov Process**

File Format Results Utilities Window Help

	Time Period	Expected Cost of State State1
1	1	550
2	2	568,00
3	3	523,10
4	4	528,44
5	5	527,00
6	6	527,74
7	7	527,56
8	8	527,61
9	9	527,59
10	10	527,60
11	11	527,60

**Markov Process**

File Format Results Utilities Window Help

	Time Period	Expected Cost of State State2
1	1	405,00
2	2	445,50
3	3	442,65
4	4	440,80
5	5	440,63
6	6	440,67
7	7	440,68
8	8	440,68
9	9	440,68
10	10	440,68
11	11	440,68

La suma de los Costes esperados de cada estado en el período 11 asciende a 1.387,3530 euros

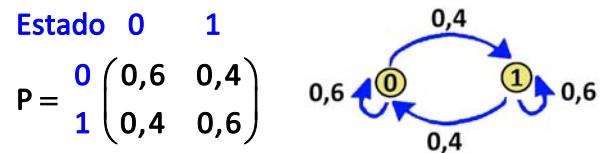


Se sabe que un sistema de comunicaciones falla o no dependiendo si ha fallado o no el día anterior. La probabilidad de que falle un día sabiendo que ha fallado el día anterior es de 0,6, pero si no ha fallado el día anterior es de 0,4.

- ¿Cuál es la probabilidad de que el sistema falle dentro de cuatro días sabiendo que hoy no ha fallado?
- ¿Cuál es la probabilidad de que el sistema falle el cuarto día sabiendo que inicialmente la probabilidad de fallar es de 0,3 y la de no fallar es de 0,7?
- ¿Cuál es el vector de probabilidades de equilibrio?

a) Sean los estados  $E = \{0 \equiv \text{falla}, 1 \equiv \text{no falla}\}$

La probabilidad pedida es  $p_{10}^{(4)} = P(X_4 = 0 \mid X_0 = 1)$



### WinQSB / Markov Process /Problem Specification

MKP Problem Specification

Problem Title	SISTEMA	
Number of States:	2	
OK	Cancel	Help

Markov Process

File	Edit	Format	Solve and Analyze	Results
				0.00 A
Transition Probabilities for SISTEMA				
From \ To	State1	State2		
State1	0.6	0.4		
State2	0.4	0.6		
Initial Prob.				
State Cost				

La matriz de transición en el período 4:  $P^{(4)} = P^4 = \begin{pmatrix} p_{11}^{(4)} & p_{12}^{(4)} \\ p_{21}^{(4)} & p_{22}^{(4)} \end{pmatrix}$

Markov Process

File	Edit	Format	Solve and Analyze	Results
				Solve Steady State
Markov Process Step				
Time Parametric Analysis				
Transition Probabilities for SISTEMA				
From \ To	State1	State2		
State1	0.6	0.4		
State2	0.4	0.6		
Initial Prob.	1	0		
State Cost				

Markov Process for Specific Periods

Specify the initial state probabilities and enter the number of time periods from now (i.e., initial), then press the OK button. The resulted state probabilities will be shown in the right column. You may press the Steady State button to obtain the steady state result.

State	Initial State Probability	Resulted State Probability
State1	1	0.500800
State2	0	0.499200

The number of time periods from initial: 4

Expected cost or return: 0

OK	Next Period	Steady State
Cancel	Print	Help

**Markov Process**

File	Edit	Format	Solve and Analyze	Results
				Solve Steady State
Markov Process Step				
Time Parametric Analysis				

**Transition Probabilities for SISTEMA**

From \ To	State1	State2
State1	0.6	0.4
State2	0.4	0.6
Initial Prob.	0	1
State Cost		

**Markov Process for Specific Periods**

Specify the initial state probabilities and enter the number of time periods from now (i.e., initial), then press the OK button. The resulted state probabilities will be shown in the right column. You may press the Steady State button to obtain the steady state result.

1	State	Initial State Probability	Resulted State Probability
State1		0	0,499200
State2		1	0,500800

The number of time periods from initial: 4

Expected cost or return: 0

OK      Next Period      Steady State  
 Cancel      Print      Help

Matriz de transición en el período 4:  $P^4 = \begin{pmatrix} 0,5008 & 0,4992 \\ 0,4992 & 0,5008 \end{pmatrix}$   $p_{10}^4 = 0,4992$

b) La distribución de probabilidad inicial es  $\pi^0 = (0,3, 0,7)$  y la distribución de probabilidad en 4 pasos será  $\pi^4 = \pi^0 P^4$

$$\pi^4 = (\pi_0^4, \pi_1^4) = \pi^0 P^4 = (0,3 \quad 0,7) \begin{pmatrix} 0,5008 & 0,4992 \\ 0,4992 & 0,5008 \end{pmatrix} = (0,49968 \quad 0,50032)$$

$$\pi^4 = (\pi_0^4, \pi_1^4) = (0,49968, 0,50032) \rightarrow P(X_4 = 0) = \pi_0^4 = 0,49968$$

**Markov Process**

File	Edit	Format	Solve and Analyze	Results
				Solve Steady State
Markov Process Step				
Time Parametric Analysis				

**Transition Probabilities for SISTEMA**

From \ To	State1	State2
State1	0.6	0.4
State2	0.4	0.6
Initial Prob.	0.3	0.7
State Cost		

**Markov Process for Specific Periods**

Specify the initial state probabilities and enter the number of time periods from now (i.e., initial), then press the OK button. The resulted state probabilities will be shown in the right column. You may press the Steady State button to obtain the steady state result.

1	State	Initial State Probability	Resulted State Probability
State1		0,300000	0,499680
State2		0,700000	0,500320

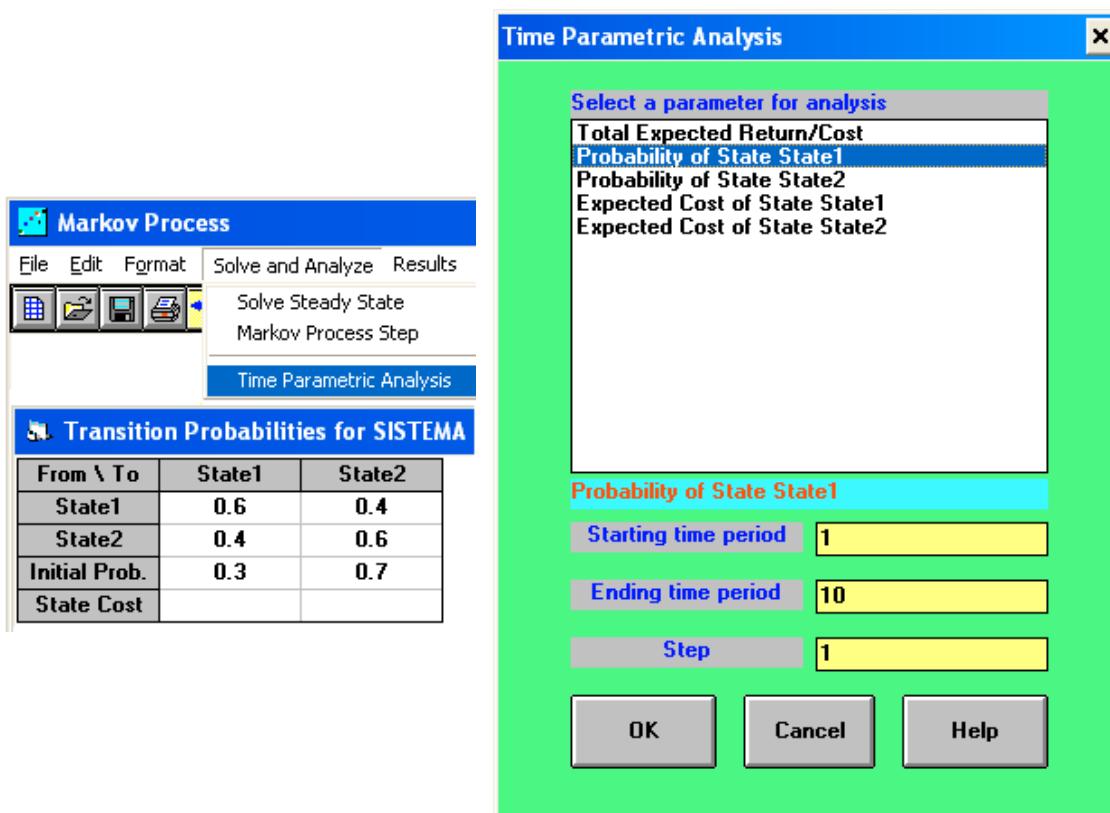
The number of time periods from initial: 4

Expected cost or return: 0

OK      Next Period      Steady State  
 Cancel      Print      Help

c) Para encontrar el vector de probabilidades de equilibrio hay que tener la matriz a largo plazo de la transición.

Con la opción **Solve and Analyze / Time Parametric Analysis** (Análisis Paramétrico en el Tiempo)



	Time Period	Probability of State State1
1	1	0,4600
2	2	0,4920
3	3	0,4984
4	4	0,4997
5	5	0,4999
6	6	0,5000
7	7	0,5000
8	8	0,5000
9	9	0,5000
10	10	0,5000

Análogamente para la Probabilidad del estado 2.

También se alcanza la matriz estable con la opción **Solve and Analyze / Markov Process Step / Steady State**

**Markov Process**

File Edit Format Solve and Analyze Results

Solve Steady State  
Markov Process Step  
Time Parametric Analysis

**Transition Probabilities for SISTEMA**

From \ To	State1	State2
State1	0.6	0.4
State2	0.4	0.6
Initial Prob.	1	0
State Cost		

Markov Process for Specific Periods

Specify the initial state probabilities and enter the number of time periods from now (i.e., initial), then press the OK button. The resulted state probabilities will be shown in the right column. You may press the Steady State button to obtain the steady state result.

State	Initial State Probability	Resulted State Probability
State1	0,300000	0,500000
State2	0,700000	0,500000

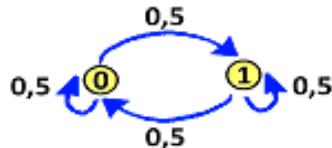
The number of time periods from initial: Steady state

Expected cost or return: 0

OK Next Period Steady State  
Cancel Print Help

Matriz de transición a largo plazo:

$$\tilde{P} = \lim_{n \rightarrow \infty} P^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$$



El único vector de probabilidades de equilibrio se expresa por  $\tilde{\pi} = (0,5 \ 0,5)$  de modo que,

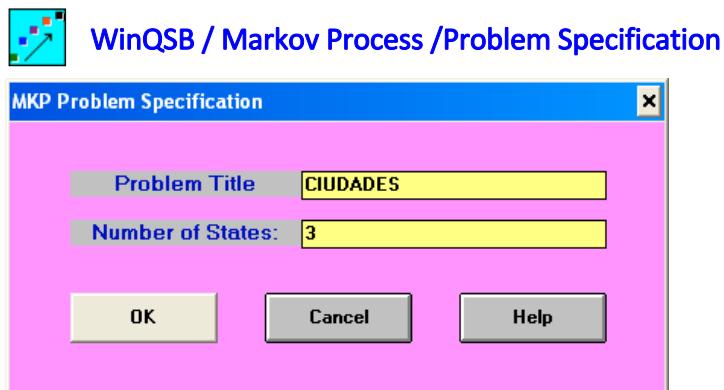
$$\tilde{\pi}P = (0,5 \ 0,5) \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} = (0,5 \ 0,5) = \tilde{\pi}$$



-  Un viajante opera en tres ciudades: Madrid, Segovia y Toledo. Con tal de evitar desplazamientos innecesarios pasa todo el día en la misma ciudad y al día siguiente, si no tiene suficiente trabajo, se Despues de trabajar un día en Toledo, la probabilidad de tener que continuar allí al día siguiente es 0,4, la de tener que viajar a Segovia es 0,4, y la de tener que ir a Madrid es 0,2. Si el viajante duerme un día en Segovia, con probabilidad 0,2, tendrá que seguir trabajando en la misma ciudad al día siguiente, en el 60% de los casos viajará a Toledo, mientras que irá a Madrid con Si el viajante trabaja todo un día en Madrid, permanecerá en la ciudad al día siguiente con probabilidad 0,1, irá a Segovia con probabilidad 0,3, y a Toledo con probabilidad 0,6.
- Si el viajante se encuentra hoy en Toledo, ¿cuál es la probabilidad de que tenga que trabajar en la misma ciudad al cabo de cuatro días?
  - ¿Cuáles son los porcentajes de días en los que el viajante está en cada una de las tres ciudades?

$$a) \text{ Matriz de transición } P = \begin{matrix} & M & S & T \\ M & \begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 & 0,6 \end{pmatrix} \\ S & \begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 & 0,6 \end{pmatrix} \\ T & \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 & 0,4 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Estando en Toledo, para saber con qué probabilidad se encuentra en Toledo a los cuatro días hay que calcular  $p_{33}^{(4)}$



**Markov Process**

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window

Solve Steady State Markov Process Step Time Parametric Analysis

From \ To	Madrid	Segovia	Toledo
Madrid	0.1	0.3	0.6
Segovia	0.2	0.2	0.6
Toledo	0.2	0.4	0.4
Initial Prob.	0	0	1
State Cost			

**Markov Process for Specific Periods**

Specify the initial state probabilities and enter the number of time periods from now [i.e., initial], then press the OK button. The resulted state probabilities will be shown in the right column. You may press the Steady State button to obtain the steady state result.

State	Initial State Probability	Resulted State Probability
Madrid	0	0,181800
Segovia	0	0,317400
Toledo	1	0,500800

The number of time periods from initial: 4

Expected cost or return: 0

OK Next Period Steady State  
Cancel Print Help

$$\text{Matriz de transición } P^4 = M \begin{pmatrix} & S & T \\ S & & \\ T & 0,1818 & 0,3174 & 0,5008 \end{pmatrix}$$

En Toledo se encuentra a los cuatro días con probabilidad  $p_{33}^{(4)} = 0,5008$

Para calcular la matriz de transición en el periodo 4, se tiene:

**Markov Process**

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window

Solve Steady State Markov Process Step Time Parametric Analysis

From \ To	Madrid	Segovia	Toledo
Madrid	0.1	0.3	0.6
Segovia	0.2	0.2	0.6
Toledo	0.2	0.4	0.4
Initial Prob.	0	1	0
State Cost			

**Markov Process for Specific Periods**

Specify the initial state probabilities and enter the number of time periods from now [i.e., initial], then press the OK button. The resulted state probabilities will be shown in the right column. You may press the Steady State button to obtain the steady state result.

State	Initial State Probability	Resulted State Probability
Madrid	0	0,181800
Segovia	1	0,319000
Toledo	0	0,499200

The number of time periods from initial: 4

Expected cost or return: 0

OK Next Period Steady State  
Cancel Print Help

**Markov Process**

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window

Solve Steady State Markov Process Step Time Parametric Analysis

From \ To	Madrid	Segovia	Toledo
Madrid	0.1	0.3	0.6
Segovia	0.2	0.2	0.6
Toledo	0.2	0.4	0.4
Initial Prob.	1	0	0
State Cost			

Markov Process for Specific Periods

Specify the initial state probabilities and enter the number of time periods from now (i.e., initial), then press the OK button. The resulted state probabilities will be shown in the right column. You may press the Steady State button to obtain the steady state result.

State	Initial State Probability	Resulted State Probability
Madrid	1	0,181900
Segovia	0	0,318900
Toledo	0	0,499200

The number of time periods from initial: 4

Expected cost or return: 0

OK Next Period Steady State Cancel Print Help

$$\text{Matriz de transición } P^4 = \begin{pmatrix} M & S & T \\ M & 0,1819 & 0,3189 & 0,4992 \\ S & 0,1818 & 0,3190 & 0,4992 \\ T & 0,1818 & 0,3174 & 0,5008 \end{pmatrix}$$

### b) Para calcular las probabilidades estacionarias

**Markov Process**

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

Solve Steady State Markov Process Step Time Parametric Analysis

From \ To	Madrid	Segovia	Toledo
Madrid	0.1	0.3	0.6
Segovia	0.2	0.2	0.6
Toledo	0.2	0.4	0.4
Initial Prob.			
State Cost			

**Markov Process**

File Format Results Utilities Window Help

Steady State for CIUDADES

	State Name	State Probability	Recurrence Time
1	Madrid	0,1818	5,5000
2	Segovia	0,3182	3,1429
3	Toledo	0,5000	2
Expected	Cost/Return =	0	

Presionando el botón de **Solve the Problem** o bien con la opción **Solve and Analyze / Markov Process Step / Steady State**

El porcentaje de que el viajante se encuentre en cada ciudad es: Madrid el 18,18%, Segovia el 31,82% y Toledo el 50%.

Para calcular las probabilidades estacionarias se plantea la ecuación matricial:

$$\pi P = \pi \rightarrow (x \ y \ z) \begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 & 0,6 \\ 0,2 & 0,2 & 0,6 \\ 0,2 & 0,4 & 0,4 \end{pmatrix} = (x \ y \ z) \text{ siendo } x+y+z=1$$

Resulta el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 0,1 \cdot (x + 2y + 2z) = x \\ 0,1 \cdot (3x + 2y + 4z) = y \\ 0,1 \cdot (6x + 6y + 4z) = z \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -9x + 2y + 2z = 0 \\ 3x - 8y + 4z = 0 \\ 6x + 6y - 6z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -9x + 2y + 2z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

con lo que,  $x = 0,1818$ ,  $y = 0,3182$ ,  $z = 0,5$





**Instrumentos Estadísticos Avanzados**  
**Facultad Ciencias Económicas y Empresariales**  
**Departamento de Economía Aplicada**  
**Profesor: Santiago de la Fuente Fernández**