

**ESTADÍSTICA AVANZADA: INSTRUMENTOS PARA LA GESTIÓN****GRADO GESTIÓN AERONÁUTICA
PRÁCTICAS INSTRUMENTOS ESTADÍSTICOS**

Cojocaru, Denisa
Fernández Vicente, Jaime
García Risquez, Diego
Martín Santa Olalla, Andrea
Pérez López, Andrea
Nuñez Chicharro, Aitor
Quesada Jiménez, David
Rodríguez García, Esther
Serrano Gómez, Jorge
Stella, Carlo

Redes

3 - 44

**Programación
Lineal**

45 - 70

**Programación
Dinámica**

71 - 82

Transporte

83 - 116

**Gestión
Pert**

117 - 164

Colas

165 - 240

**Colas
Simulación
Arena**

241 - 312

Decisión

313 - 334

Juegos

335 - 358

**Muestreo
Poblaciones
Finitas**

359 - 420



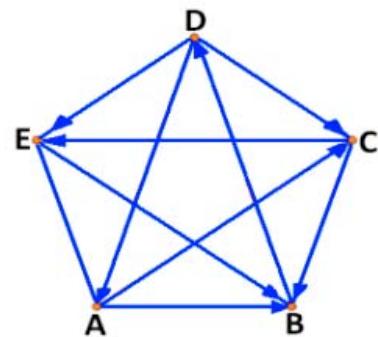






La Jefe de Recursos Humanos de una empresa quiere saber quién es el líder de un grupo de 5 personas (A, B, C, D, E). Para ello, hace entrevistas personales por parejas, estableciendo quién tiene ascendencia sobre el otro. Representa las encuestas en un grafo dirigido de cinco vértices, donde $A \rightarrow B$ indica que A domina a B.

¿Quién es el Líder?



Solución:

$$\text{Matriz de Adyacencia: } M = \begin{array}{c|ccccc} & \text{A} & \text{B} & \text{C} & \text{D} & \text{E} \\ \hline \text{A} & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \text{B} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \text{C} & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \text{D} & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \text{E} & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} \text{A domina a 3 personas} \\ \text{B domina a 1 persona} \\ \text{C domina a 2 personas} \\ \text{D domina a 3 personas} \\ \text{E domina a 2 personas} \end{array}$$

Para analizar quien es el líder del grupo se suman las líneas de la Matriz de Adyacencia, obteniendo cuantos trabajadores son influenciados por una persona (domina). Tanto A como D dominan a 3 personas, no pudiendo decidir quién es en líder. Se hace necesario calcular M^2

$$M^2 = M \times M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 5 \\ 3 \\ 3 \\ 7 \\ 4 \end{array}$$

Los elementos de M^2 indican el número de caminos diferentes de longitud 2 que se pueden seguir para ir de un vértice a otro. Es decir, dominios de segundo orden.

Más en concreto, cantidad de trabajadores que son influenciados por personas que domina cierta persona. Por ejemplo, si A domina a B y B domina a C, es lógico pensar que A domina a C.

$$M + M^2 = \begin{array}{c|ccccc} & \text{A} & \text{B} & \text{C} & \text{D} & \text{E} \\ \hline \text{A} & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \text{B} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \text{C} & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \text{D} & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \text{E} & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 8 \\ 4 \\ 5 \\ 10 \\ 6 \end{array}$$

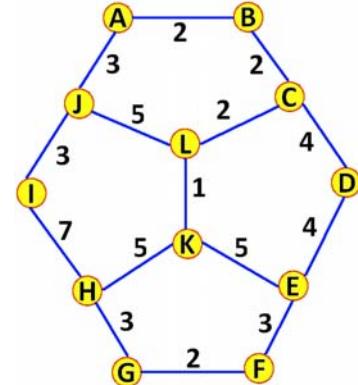
La matriz ($M + M^2$) representa la cantidad de dominios de primer y segundo orden que ejerce cada trabajador sobre el resto de personas del grupo.

Pudiendo afirmar que el trabajador D es el líder del grupo.



En la red de comunicaciones de un aeroporto se han detectado averías, por lo que se hace necesario analizar todos los nodos para verificar las conexiones. La etiqueta de cada tramo representa el coste de reparación de un tramo (en miles de euros).

- ¿Puede el técnico revisar todos los nodos sin pasar dos veces por el mismo y volver al nodo inicial?.
- Si el técnico decide revisar todos los tramos de la red, ¿puede hacerlo sin pasar dos veces por el mismo tramo?.
- Si el técnico para salir del paso decide reparar sólo los tramos que permitan la conexión entre A y H. ¿Cuáles son los tramos que hay que reparar para que el coste sea mínimo?. ¿Cuál será el coste total de la reparación?.



Solución:

- a) Un camino hamiltoniano pasa una sola vez por cada vértice (nodo). Si el camino es cerrado se denomina ciclo hamiltoniano.

Para que hubiera un ciclo hamiltoniano las aristas incidentes en los vértices tendrían que tener grado 2. En consecuencia, el técnico podrá revisar todos los nodos sin pasar dos veces por el mismo si la red es hamiltoniana. Para que pudiera hacerlo no tendría que pasar por los nodos K y L.

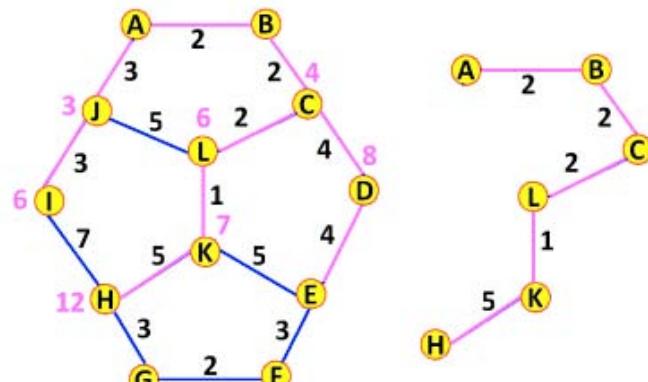
- b) Un camino es euleriano cuando la trayectoria contiene todas las aristas y recorre cada arista una sola vez. Cuando el camino euleriano comienza y termina con el mismo vértice se denomina ciclo euleriano. Una condición necesaria y suficiente para que la red tuviera un camino euleriano es que fuera conexa y que todos los vértices tuvieran grado par, o a lo sumo dos vértices con grado impar.

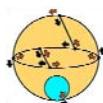
Por tanto, el técnico podría recorrer todos los tramos de la red sin pasar dos veces por el mismo tramo si admite una camino euleriano, situación que no se cumple porque hay seis nodos (C, E, H, J, L, K) con grado impar.

- c) Se requiere hallar un camino de longitud o coste mínimo del nodo A al nodo H. Para ello, basta aplicar el algoritmo de Dijkstra entre los dos nodos.

Los tramos que se tienen que reparar entre los nodos A y H son los que corresponden al camino A - B - C - L - K - H que es de coste o longitud mínimo.

El coste total de la reparación sería de 12.000 euros.





Se considera el grafo G que tiene por matriz de adyacencia:

Se pide:

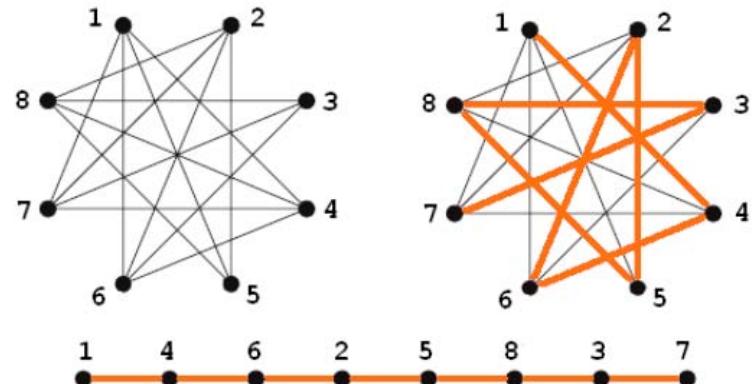
- Demostrar que el grafo es conexo, construyendo un árbol recubridor.
- Estudiar si el grafo admite circuitos o recorridos eulerianos y hamiltonianos y en caso afirmativo hallarlos.
- Responder a la pregunta anterior si se añade una arista entre el vértice 3 y el vértice 5.

0	0	0	1	1	1	1	0
0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	0	0	0	1	1	1
1	0	0	0	0	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	1
1	1	1	1	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	0	0	0

Solución:

- a) Un árbol con n vértices tiene $(n - 1)$ aristas, con lo que hay 7 aristas.

El grafo es conexo porque de cualquier vértice se puede llegar a otro a través de un camino.

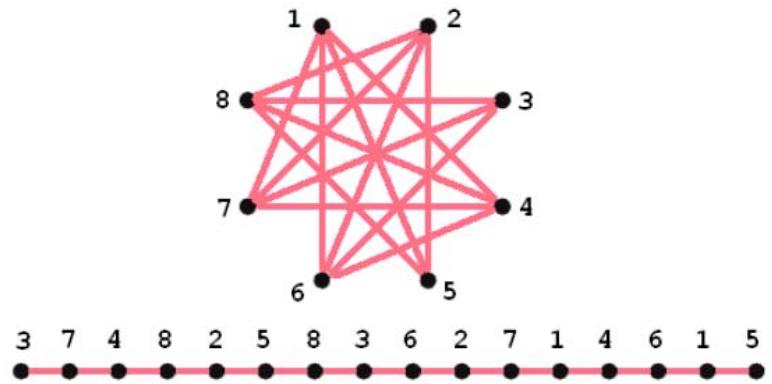


- b) Grado vértices: $\delta(1) = 4$, $\delta(2) = 4$, $\delta(3) = 3$, $\delta(4) = 4$, $\delta(5) = 3$, $\delta(6) = 4$, $\delta(7) = 4$, $\delta(8) = 4$.

El grafo no admite un circuito euleriano (grafo conexo, todos los vértices de grado par), pero sí admite un recorrido euleriano (tiene dos vértices impares y los demás pares).

El recorrido euleriano:

3 – 7 – 4 – 8 – 2 – 5 – 8 – 3 – 6 – 2 – 7 –
– 1 – 4 – 6 – 1 – 5

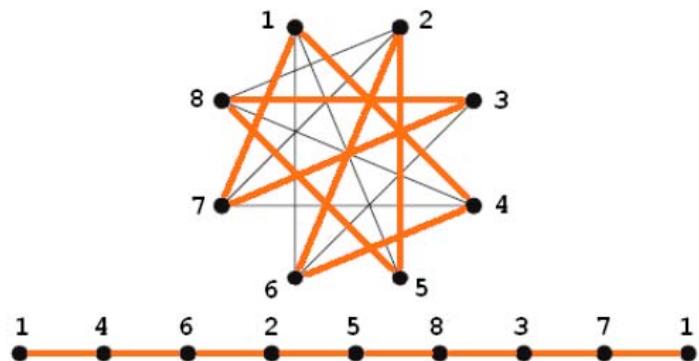




Admite un ciclo hamiltoniano (pasa una sola vez por cada vértice, en un camino cerrado).

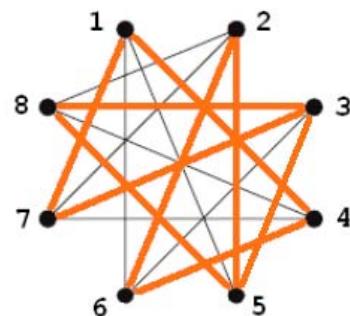
Basta añadir al árbol obtenido en el apartado 1, la arista 7–1, es decir:

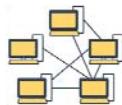
$1 - 4 - 6 - 2 - 5 - 8 - 3 - 7 - 1$



c) Si se añade la arista $3 - 5$, el grafo es euleriano (contiene todas las aristas del grafo G y recorre cada arista una sola vez) y por tanto admite un circuito euleriano.

Lógicamente, sigue siendo hamiltoniano.





La red de ordenadores de una empresa de servicios se representa por un grafo ponderado donde los pesos de las aristas vienen dados por la longitud de los cables en metros.

- Si es un grafo, calcula el número de caras.
- Calcular el número de aristas que sería necesario eliminar para obtener un árbol recubridor.
- Determinar el camino mínimo desde el terminal A al terminal D.

	B	C	D	E	F	G	H	I
A	5	5		2				
B			2	2				
C				2	2			
D					3	3		
E						3	4	
F								3

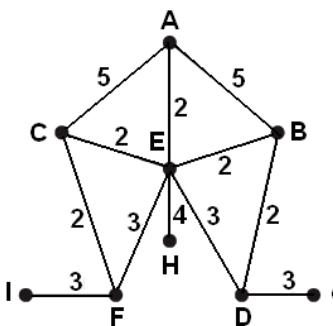
¿Se puede mandar un mensaje desde el terminal I que recorra todos los demás terminales, pasando una sola vez por cada terminal?. En caso afirmativo decir cuál es el camino.

Solución:

Es un grafo con $v = 9$ vértices y $a = 12$ aristas

Por tanto, $c = a + 2 - v = 12 + 2 - 9 = 5$ caras

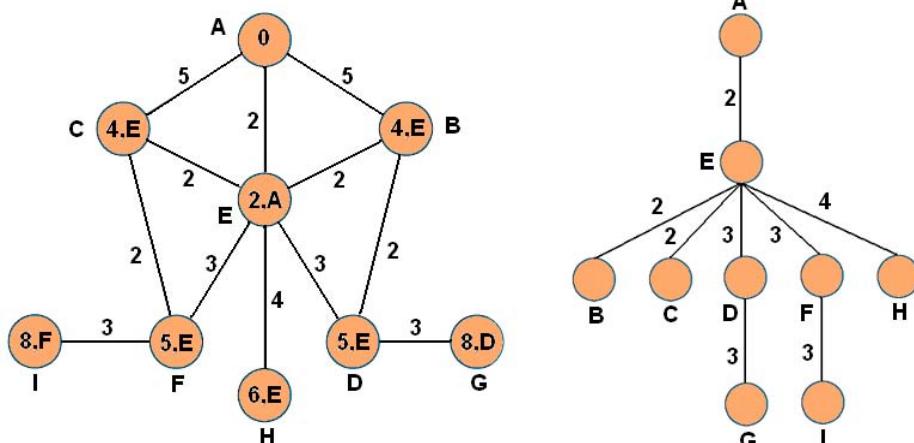
Un árbol recubridor tiene $v - 1 = 8$ aristas, por lo que es necesario eliminar 4 aristas.



Siguiendo el algoritmo de Dijkstra, se obtiene:

$$d(A,D) = A - E - D = 5$$

La Figura muestra el resultado de ejecución del algoritmo.



No se puede enviar un mensaje desde el terminal I recorriendo los demás terminales, pasando una sola vez por cada terminal, pues el grafo no contiene ningún camino hamiltoniano ya que tiene más de dos vértices de grado 1: I, H, G

Otra forma, si un grafo verifica que $\delta(v_i) \geq \frac{v-1}{2} = \frac{8}{2} = 4 \rightarrow$ tiene un camino hamiltoniano

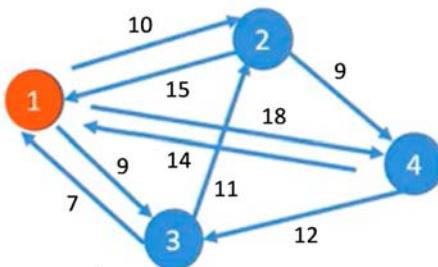
Se observa que no se verifica. No hay camino.



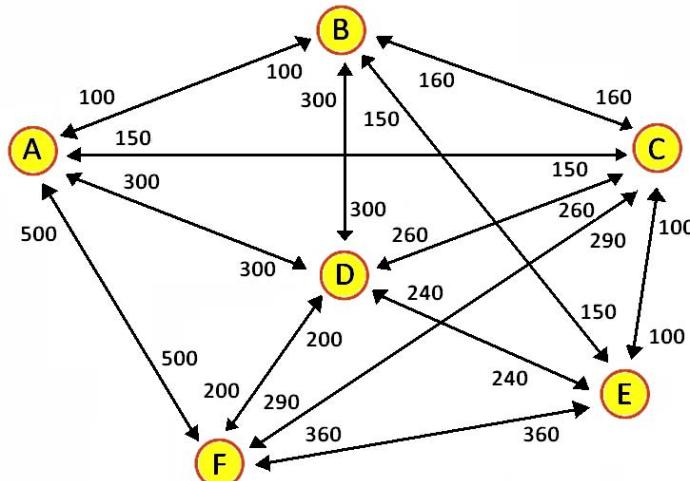
TSP

Un agente de comercio trabaja en varias ciudades. Determinar la ruta óptima para minimizar el número de kilómetros recorridos, sabiendo que debe pasar una sola vez por cada ciudad y que al final de la semana debe volver a su casa.
En los grafos adjuntos se refleja las distancias en km. entre las ciudades.

a)



b)


Solución:

a) El Problema del Agente Viajero – TSP (Travelling Salesman Problem) tiene gran aplicación en el ámbito de la logística y distribución, así como en la programación de curvas de producción.

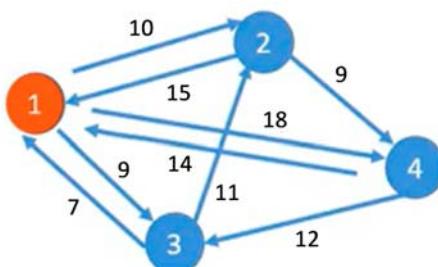
Presenta una variación importante dependiendo si es simétrico o no, es decir, si la distancia entre A y B sea igual a la distancia entre B y A. En la práctica es muy poco probable que así sea.

La cantidad de rutas posibles en una red de n nodos viene determinada por la expresión $(n - 1)!$, est es, en una red de 4 nodos la cantidad de rutas posibles es $3! = 6$.

Cuando el problema es simétrico la cantidad de rutas posibles es $\frac{1}{2} (n - 1)!$ produciendo un ahorro significativo de tiempo al procesar rutas de gran tamaño.

PROGRAMACIÓN LINEAL:

Función objetivo: Minimizar z



$$z = 10x_{12} + 9x_{12} + 18x_{14} + 15x_{21} + 9x_{24} + 7x_{31} + 11x_{32} + 14x_{41} + 12x_{43}$$

De cada nodo solo sale un arco:

$$\begin{cases} x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1 \\ x_{21} + x_{24} = 1 \\ x_{31} + x_{32} = 1 \\ x_{41} + x_{43} = 1 \end{cases}$$

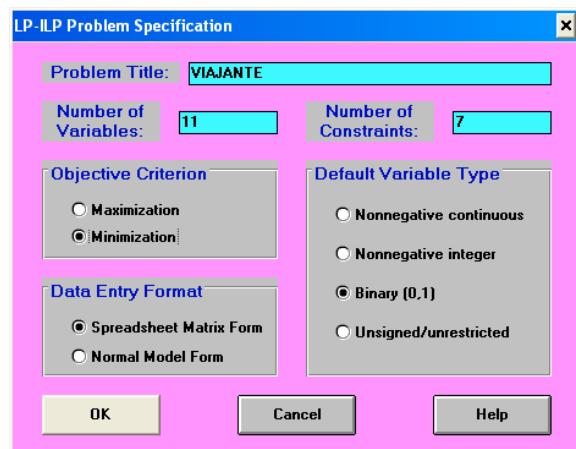


A cada nodo llega un solo arco:
$$\begin{cases} x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1 \\ x_{12} + x_{32} = 1 \\ x_{13} + x_{43} = 1 \\ x_{14} + x_{24} = 1 \end{cases}$$

Eliminar subtours
(Solo los de longitud 2)
$$\begin{cases} x_{12} + x_{21} \leq 1 \\ x_{13} + x_{31} \leq 1 \\ x_{14} + x_{41} \leq 1 \end{cases}$$

Naturaleza de las variables: $x_{ij} \in [0, 1]$

Max. CX $AX=b$ WinQSB / Linear and Integer Programming



Linear and Integer Programming

File	Edit	Format	Solve and Analyze	Results	Utilities	Window	WinQSB	Help			
VIAJANTE											
Variable -->	X12	X13	X14	X21	X24	X31	X32	X41	X43	Direction	R. H. S.
Minimize	10	9	18	15	9	7	11	14	12		= 1
C1	1	1	1								= 1
C2				1	1						= 1
C3						1	1				= 1
C4								1	1		= 1
C5				1		1			1		= 1
C6	1						1				= 1
C7		1							1		= 1
C8			1		1						= 1
C9	1			1						<=	1
C10		1				1				<=	1
C11			1					1		<=	1
LowerBound	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
UpperBound	1	1	1	1	1	1	1	1	1		
VariableType	Binary	Binary	Binary	Binary	Binary	Binary	Binary	Binary	Binary		



Linear and Integer Programming

File Format Results Utilities Window Help

5. Combined Report for VIAJANTE

	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(i)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(i)	Allowable Max. c(i)
1	X12	1	10	10	0	basic	-M	11
2	X13	0	9	0	0	basic	5	12
3	X14	0	18	0	9	at bound	9	M
4	X21	0	15	0	5	at bound	10	M
5	X24	1	9	9	0	basic	-M	18
6	X31	1	7	7	0	basic	-M	11
7	X32	0	11	0	1	at bound	10	M
8	X41	0	14	0	4	at bound	10	M
9	X43	1	12	12	0	basic	9	16
	Objective Function	(Min.) =	38					



WinQSB / Net Problem Specification - Travelling Salesman Problem

NET Problem Specification

Problem Type

- Network Flow
- Transportation Problem
- Assignment Problem
- Shortest Path Problem
- Maximal Flow Problem
- Minimal Spanning Tree
- Traveling Salesman Problem

Objective Criterion

- Minimization
- Maximization

Data Entry Format

- Spreadsheet Matrix Form
- Graphic Model Form
- Symmetric Arc Coefficients (i.e., both ways same cost)

Problem Title: VIAJANTE

Number of Nodes: 4

OK Cancel Help

Network Modeling

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

VIAJANTE: Minimization (Traveling Salesman Problem)

From \ To	1	2	3	4
1		10	9	18
2	15			9
3	7	11		
4	14		12	

Traveling Salesman Solution Method

Nearest Neighbor Heuristic

Cheapest Insertion Heuristic

Two-way Exchange Improvement Heuristic

Branch and Bound Method

Solve Branch-and-Bound Steps

Cancel Help

Branch-and-bound Method: Proporciona la solución óptima exacta planteando el problema como un problema de programación entera 0–1. Cuando el número de nodos es grande el coste computacional puede no ser viable.



Network Modeling

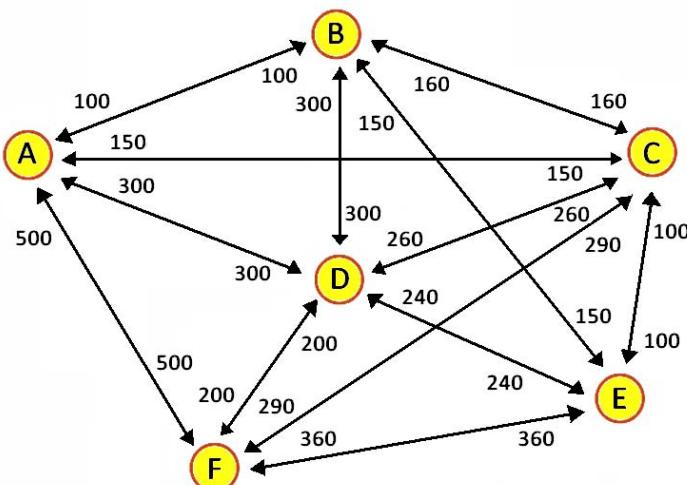
File Format Results Utilities Window Help

Solution for VIAJANTE: Minimization (Traveling Salesman Problem)

	From Node	Connect To	Distance/Cost		From Node	Connect To	Distance/Cost
1	1	2	10		4	3	12
2	2	4	9	4	3	1	7
	Total	Minimal	Traveling	Distance	or Cost	=	38
	(Result	from	Branch	and	Bound	Method)	



WinQSB / Net Problem Specification - Travelling Salesman Problem



NET Problem Specification

Problem Type

- Network Flow
- Transportation Problem
- Assignment Problem
- Shortest Path Problem
- Maximal Flow Problem
- Minimal Spanning Tree
- Traveling Salesman Problem

Objective Criterion

- Minimization
- Maximization

Data Entry Format

- Spreadsheet Matrix Form
- Graphic Model Form
- Symmetric Arc Coefficients (i.e., both ways same cost)

Problem Title VIAJANTE

Number of Nodes 6

OK Cancel Help

Network Modeling

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

VIAJANTE: Minimization (Traveling Salesman Problem)

From \ To	Ciudad 1	Ciudad 2	Ciudad 3	Ciudad 4	Ciudad 5	Ciudad 6
Ciudad 1		100	150		300	500
Ciudad 2	100		160	150	300	
Ciudad 3	150	160		100	260	290
Ciudad 4		150	100		240	360
Ciudad 5	300	300	260	240		200
Ciudad 6	500		290	360	200	

Traveling Salesman Solution Method

Nearest Neighbor Heuristic

Cheapest Insertion Heuristic

Two-way Exchange Improvement Heuristic

Branch and Bound Method

Solve Branch-and-Bound Steps

Cancel Help

Nearest Neighbor Heuristic (vecino más cercano): Parte de un nodo y se va moviendo al nodo de menor coste adyacente hasta que pasa por todos los nodos.

El procedimiento "Vecino más cercano" no garantiza que se pueda cerrar el ciclo, depende del nodo de partida. Por defecto, selecciona siempre como nodo inicial el primer nodo de la tabla.

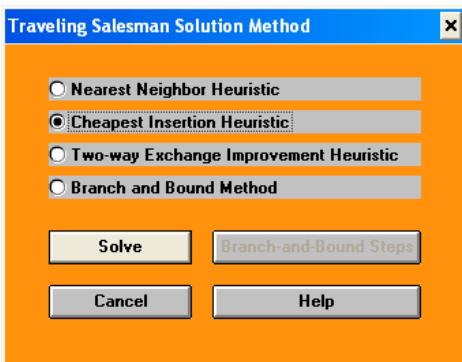


Network Modeling

File Format Results Utilities Window Help

Solution for VIAJANTE: Minimization (Traveling Salesman Problem)

	From Node	Connect To	Distance/Cost		From Node	Connect To	Distance/Cost
1	Ciudad 1	Ciudad 2	100	4	Ciudad 3	Ciudad 5	260
2	Ciudad 2	Ciudad 4	150	5	Ciudad 5	Ciudad 6	200
3	Ciudad 4	Ciudad 3	100	6	Ciudad 6	Ciudad 1	500
Total		Minimal	Traveling	Distance	or Cost	=	1310
(Result		from	Nearest	Neighbor	Heuristic)		



Cheapest Insertion Heuristic: Sigue los siguientes pasos:

1. Se seleccionan dos nodos (i, j) que se encuentren a menor distancia, formando el subciclo $i - j - i$
2. Para todos los nodos que no se encuentren en el subciclo anterior, se selecciona el nodo k de forma que minimice la cantidad $[C(i, k) + C(k, j) - C(i, j)]$ para todo par de nodos (i, j) del subciclo, siendo $C(i, j) \equiv$ distancia entre los nodos (i, j)

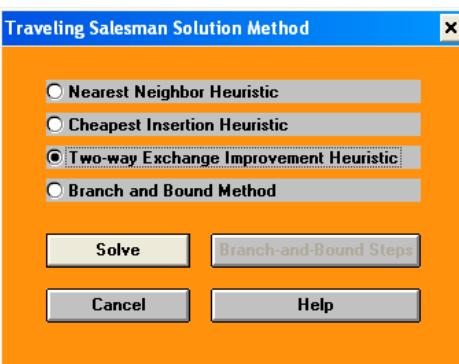
3. Introducir el nodo k en el subciclo y vuelve al paso 2, hasta conectar todos los nodos

Network Modeling

File Format Results Utilities Window Help

Solution for VIAJANTE: Minimization (Traveling Salesman Problem)

	From Node	Connect To	Distance/Cost		From Node	Connect To	Distance/Cost
1	Ciudad 1	Ciudad 3	150	4	Ciudad 6	Ciudad 5	200
2	Ciudad 3	Ciudad 4	100	5	Ciudad 5	Ciudad 2	300
3	Ciudad 4	Ciudad 6	360	6	Ciudad 2	Ciudad 1	100
Total		Minimal	Traveling	Distance	or Cost	=	1210
(Result		from	Cheapest	Insertion	Heuristic)		



Two-way Exchange Improvement Heuristic: Se basa en la bisección de una solución inicial.

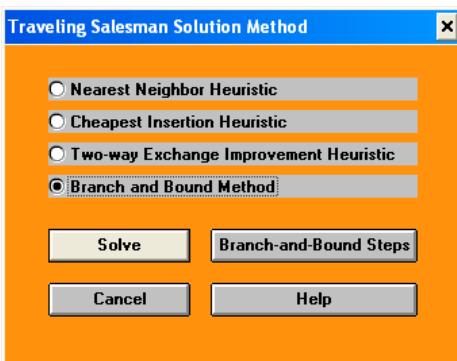


Network Modeling

File Format Results Utilities Window Help

Solution for VIAJANTE: Minimization (Traveling Salesman Problem)

	From Node	Connect To	Distance/Cost		From Node	Connect To	Distance/Cost
1	Ciudad 1	Ciudad 3	150	4	Ciudad 6	Ciudad 5	200
2	Ciudad 3	Ciudad 4	100	5	Ciudad 5	Ciudad 2	300
3	Ciudad 4	Ciudad 6	360	6	Ciudad 2	Ciudad 1	100
Total		Minimal	Traveling	Distance	or Cost	=	1210
(Result		from	Two-way	Exchange	Improvement	Heuristic)	



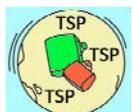
Branch-and-bound Method: Proporciona la solución óptima exacta planteando el problema como un problema de programación entera 0–1. Cuando el número de nodos es grande el coste computacional puede no ser viable.

Network Modeling

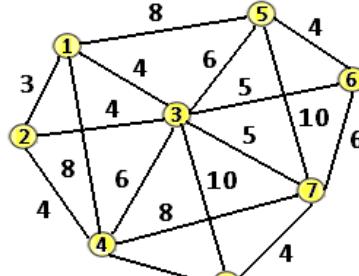
File Format Results Utilities Window Help

Solution for VIAJANTE: Minimization (Traveling Salesman Problem)

	From Node	Connect To	Distance/Cost		From Node	Connect To	Distance/Cost
1	Ciudad 1	Ciudad 2	100	4	Ciudad 5	Ciudad 6	200
2	Ciudad 2	Ciudad 4	150	5	Ciudad 6	Ciudad 3	290
3	Ciudad 4	Ciudad 5	240	6	Ciudad 3	Ciudad 1	150
Total		Minimal	Traveling	Distance	or Cost	=	1130
(Result		from	Branch	and	Bound	Method)	



Determinar la ruta óptima para minimizar el coste de un agente viajero sabiendo que debe pasar una sola vez por cada ciudad y que al final debe volver a su casa.

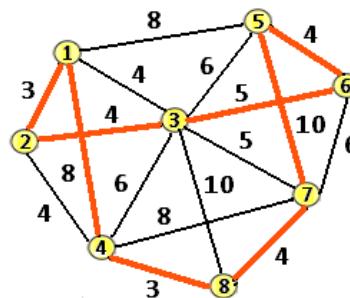


En el grafo se refleja el costo entre ciudades.

Solución:

Se trata de determinar un tour de coste mínimo. La figura adjunta muestra un grafo de 8 vértices en el que aparece destacado un ciclo hamiltoniano.

El TSP consiste en encontrar el camino mínimo que recorre todos los nodos de un grafo, saliendo de uno de ellos y retornando al mismo vértice de partida.



El problema se puede representar como un grafo completo orientado o bien como una permutación

Coste mínimo = 34

Un tour o ciclo hamiltoniano es un ciclo simple que pasa por todos los vértices del grafo. Un subtour es un ciclo simple que no pasa por todos los vértices del grafo. El Problema del Agente Viajero consiste en determinar un tour de coste mínimo.

En teoría de grafos, un camino hamiltoniano en un grafo es un camino, que visita todos los vértices del grafo una sola vez. Si además el primer y último vértice visitado coincide, el camino es un ciclo hamiltoniano.

Los nodos representan ciudades y los valores asociados a las aristas, son los costes entre ellas, y en consecuencia, nunca pueden ser negativos.



[WinQSB / Net Problem Specification - Travelling Salesman Problem](#)



Network Modeling

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

HAMILTON-TSP: Minimization (Traveling Salesman Problem)

From \ To	1	2	3	4	5	6	7	8
1		3	4	8	8			
2	3		4	4				
3	4	4		6	6	5	5	10
4	8	4	6				8	3
5	8		6		4	10		
6			5		4		6	
7			5	8	10	6		4
8			10	3			4	

Traveling Salesman Solution Method

Nearest Neighbor Heuristic
 Cheapest Insertion Heuristic
 Two-way Exchange Improvement Heuristic
 Branch and Bound Method

Solve Branch-and-Bound Steps
 Cancel Help

Nearest Neighbor Heuristic (vecino más cercano): Parte de un nodo y se va moviendo al nodo de menor coste adyacente hasta que pasa por todos los nodos.

El procedimiento "Vecino más cercano" no garantiza que se pueda cerrar el ciclo, depende del nodo de partida.

Network Modeling

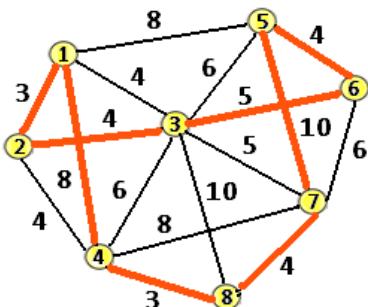
File Format Results Utilities Window Help

Solution for HAMILTON-TSP: Minimization (Traveling Salesman Problem)

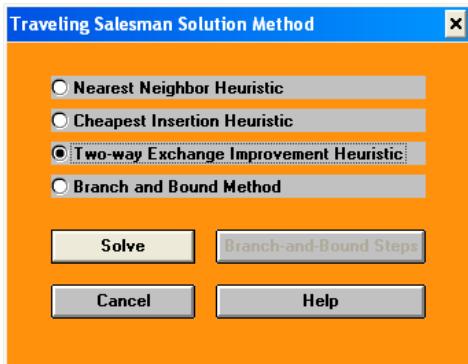
	From Node	Connect To	Distance/Cost		From Node	Connect To	Distance/Cost	
1	1	2	3		5	5	7	10
2	2	3	4		6	7	8	4
3	3	6	5		7	8	4	3
4	6	5	4		8	4	1	8
	Total	Minimal	Traveling	Distance	or Cost	=	41	
	(Result	from	Nearest	Neighbor	Heuristic)			

Vecino más cercano:

4 - 1 - 2 - 3 - 6 - 5 - 7 - 8 - 4



Suma = 41



Two-way Exchange Improvement Heuristic: Se basa en la bisección de una solución inicial.

Network Modeling

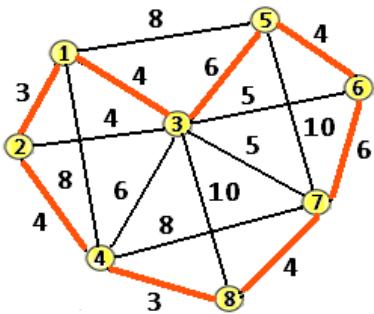
File Format Results Utilities Window Help

Solution for HAMILTON-TSP: Minimization (Traveling Salesman Problem)

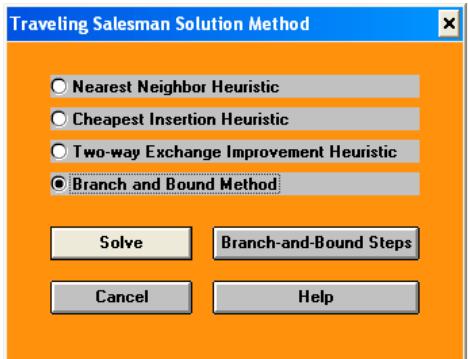
	From Node	Connect To	Distance/Cost		From Node	Connect To	Distance/Cost
1	1	3	4	5	7	8	4
2	3	5	6	6	8	4	3
3	5	6	4	7	4	2	4
4	6	7	6	8	2	1	3
	Total (Result)	Minimal from	Traveling Two-way	Distance Exchange	or Cost Improvement	=	34
					Heuristic)		

Intercambio bidireccional:

7 - 8 - 4 - 2 - 1 - 3 - 5 - 6 - 7



Suma = 34



Branch-and-bound Method: Proporciona la solución óptima exacta planteando el problema como un problema de programación entera 0–1. Cuando el número de nodos es grande el coste computacional puede no ser viable.



Network Modeling

File Format Results Utilities Window Help

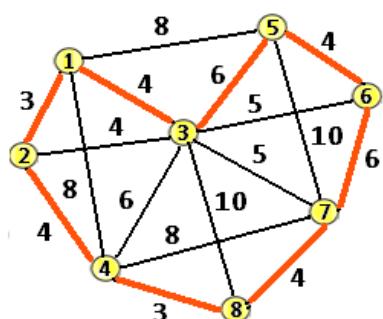
0.00 A

5. Solution for HAMILTON-TSP: Minimization (Traveling Salesman Problem)

	From Node	Connect To	Distance/Cost		From Node	Connect To	Distance/Cost
1	1	3	4	5	7	8	4
2	3	5	6	6	8	4	3
3	5	6	4	7	4	2	4
4	6	7	6	8	2	1	3
	Total	Minimal	Traveling	Distance	or Cost	=	34
	(Result	from	Branch	and	Bound	Method)	

Ramificación y acotación:

8 - 4 - 2 - 1 - 3 - 5 - 6 - 7 - 8

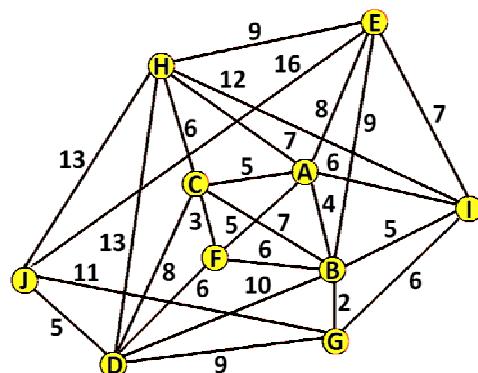


Suma = 34



En el grafo adjunto figura el diseño de un metro para Valladolid, indicando en las estaciones (nodos) y las distancias que las separan en centenares de metros.

Suponiendo que el coste de la construcción es proporcional a la distancia y que cuando dos estaciones no se encuentran unidas es debido a imposibilidades técnicas por el río Pisuerga o a un coste excesivo.



- Diseñar la red de metro de forma que las estaciones queden conectadas a coste mínimo. ¿Cuál será la red a construir y cuál su longitud?
- El Ayuntamiento de Valladolid impone la condición de que entre dos estaciones de metro no tiene que haber más de cuatro estaciones intermedias, ¿Cuál sería la red de metro?

Solución:

- Se trata de construir un árbol generador mínimo para la red conexa de la figura. Para ello, se aplica el algoritmo de Sollin, comenzando por establecer la matriz de incidencia asociada al grafo.

Al iniciar el algoritmo se elige el elemento de menor valor. En este caso hay dos elementos con valor 2, se selecciona arbitrariamente uno de ellos, por ejemplo el 2 de la columna G y se elimina.

Se marca la fila G como la primera.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
	A		4	5		8	5		7	6
	B	4		7	10	9	6	2 ¹		5
	C	5	7		8		3		6	
	D		10	8			6	9	13	5
	E	8	9						9	7
	F	5	6	3	6					
1 →	G		2		9				6	11
	H	7		6	13	9			12	13
	I	6	5			7		6	12	
	J				5	16		11	13	

1^a

Se elige el elemento de menor valor de las columnas no marcadas. Hay un elemento con valor 2 en la columna B. Se suprime la columna B y se marca la fila B como segunda.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
	A	4	5		8	5		7	6	
<u>2</u> →	B	4		7	10	9	6	<u>2¹</u>		5
	C	5	7		8		3		6	
	D		10	8			6	9	13	5
	E	8	9					9	7	16
	F	5	6	3	6					
<u>1</u> →	G		<u>2²</u>		9				6	11
	H	7		6	13	9			12	13
	I	6	5			7		6	12	
	J				5	16		11	13	

2^a1^a

De las filas marcadas (G, B) se elige el elemento con menor valor, no marcado anteriormente. Hay un elemento A con valor 4 en la columna A, se marca y se elimina la columna A donde se encuentra, quedando la fila A como tercera.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
	A	4	5		8	5		7	6	
<u>3</u> →	B	<u>4³</u>		7	10	9	6	<u>2¹</u>		5
<u>2</u> →	C	5	7		8		3		6	
	D		10	8			6	9	13	5
	E	8	9					9	7	16
	F	5	6	3	6					
<u>1</u> →	G		<u>2²</u>		9				6	11
	H	7		6	13	9			12	13
	I	6	5			7		6	12	
	J				5	16		11	13	

3^a2^a1^a

De filas marcadas (G, B, A) se elige el elemento con menor valor, no marcado anteriormente. Hay dos elementos con valor 5, se elige libremente el 5 de la fila C, se marca y se elimina la columna C, donde se encuentra, quedando la fila C como cuarta.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
3 →	A		4	5^4		8	5		7	6
2 →	B	4^3		7	10	9	6	2^1		5
4 →	C	5	7		8		3		6	
	D		10	8			6	9	13	5
	E	8	9						9	7
	F	5	6	3	6					
1 →	G		2^2		9				6	11
	H	7		6	13	9			12	13
	I	6	5			7		6	12	
	J				5	16		11	13	
		3 ^a	2 ^a	4 ^a			1 ^a			

De filas marcadas (G, B, A, C) se elige el elemento con menor valor, no marcado anteriormente. Hay un elemento con valor 3 en la columna F , se marca y se elimina la columna F donde se encuentra, quedando la fila F como quinta.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
3 →	A		4	5^4		8	5		7	6
2 →	B	4^3		7	10	9	6	2^1		5
4 →	C	5	7		8		3^5		6	
	D		10	8			6	9	13	5
	E	8	9						9	7
5 →	F	5	6	3	6					
1 →	G		2^2		9				6	11
	H	7		6	13	9			12	13
	I	6	5			7		6	12	
	J				5	16		11	13	
		3 ^a	2 ^a	4 ^a		5 ^a	1 ^a			

De filas marcadas (G, B, A, C, F) se elige el elemento con menor valor, no marcado anteriormente. Hay un elemento con valor 5 en la columna I , se marca y se elimina la columna I donde se encuentra, quedando la fila I como sexta.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
3 →	A		4	5^4		8	5		7	6
2 →	B	4^3		7	10	9	6	2^1		5^6
4 →	C	5	7		8		3^5		6	
	D		10	8			6	9	13	5
	E	8	9						9	7
5 →	F	5	6	3	6					
1 →	G		2^2		9				6	11
	H	7		6	13	9			12	13
6 →	I	6	5			7		6	12	
	J				5	16		11	13	
		3 ^a	2 ^a	4 ^a			5 ^a	1 ^a		6 ^a

De filas marcadas (G, B, A, C, F, I) se elige el elemento con menor valor, no marcado anteriormente. Hay dos elementos con valor 6 en las columnas H y D , se elige arbitrariamente la columna H se marca y se elimina la columna H donde se encuentra, quedando la fila H como séptima.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
3 →	A		4	5^4		8	5		7	6
2 →	B	4^3		7	10	9	6	2^1		5^6
4 →	C	5	7		8		3^5		6^7	
	D		10	8			6	9	13	5
	E	8	9						9	7
5 →	F	5	6	3	6					
1 →	G		2^2		9				6	11
7 →	H	7		6	13	9			12	13
6 →	I	6	5			7		6	12	
	J				5	16		11	13	
		3 ^a	2 ^a	4 ^a			5 ^a	1 ^a	7 ^a	6 ^a

De filas marcadas (G, B, A, C, F, I, H) se elige el elemento con menor valor, no marcado anteriormente. Hay un elemento con valor 6 en la columna D , se marca y se elimina la columna D donde se encuentra, quedando la fila D como octava.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
3 →	A		4	5^4		8	5		7	6
2 →	B	4^3		7	10	9	6	2^1		5^6
4 →	C	5	7		8		3^5		6^7	
8 →	D		10	8			6	9	13	
	E	8	9						9	7
5 →	F	5	6	3	6^8					
1 →	G		2^2		9					6
7 →	H	7		6	13	9			12	13
6 →	I	6	5			7		6	12	
	J				5	16		11	13	
		3 ^a	2 ^a	4 ^a	8 ^a	5 ^a	1 ^a	7 ^a	6 ^a	

De filas marcadas (G, B, A, C, F, I, H, D) se elige el elemento con menor valor, no marcado anteriormente. Hay un elementos con valor 5 en la columna J , se marca y se elimina la columna J donde se encuentra, quedando la fila J como novena.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
3 →	A		4	5^4		8	5		7	6
2 →	B	4^3		7	10	9	6	2^1		5^6
4 →	C	5	7		8		3^5		6^7	
8 →	D		10	8			6	9	13	5^9
	E	8	9						9	7
5 →	F	5	6	3	6^8					
1 →	G		2^2		9					6
7 →	H	7		6	13	9			12	13
6 →	I	6	5			7		6	12	
9 →	J				5	16		11	13	
		3 ^a	2 ^a	4 ^a	8 ^a	5 ^a	1 ^a	7 ^a	6 ^a	9 ^a

Finalmente, el menor valor de la columna E es 7, se marca y se elimina la columna E, quedando la fila E como décima.

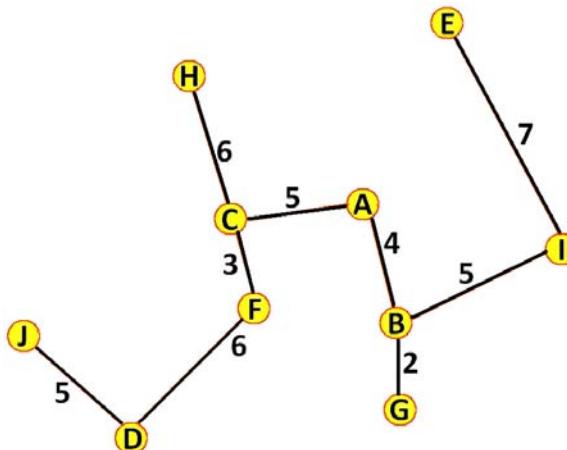


	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
3 →	A		4	5 ⁴		8	5		7	6
2 →	B	4 ³		7	10	9	6	2 ¹		5 ⁶
4 →	C	5	7		8		3 ⁵		6 ⁷	
8 →	D		10	8			6	9	13	5 ⁹
10 →	E	8	9						9	7
5 →	F	5	6	3	6 ⁸					
1 →	G		2 ²		9				6	11
7 →	H	7		6	13	9			12	13
6 →	I	6	5			7 ¹⁰		6	12	
9 →	J				5	16		11	13	

3^a 2^a 4^a 8^a 10^a 5^a 1^a 7^a 6^a 9^a

El árbol generador mínimo indica la red de metro a construir

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
A			5							
B	4						2		5	
C						3		6		
D										5
E										
F				6						
G			2							
H										
I					7					
J										



Longitud de la red;

$$43 \times 100 = 4300 \text{ metros}$$

- b) Analizando el árbol generador mínimo, la cadena JDFCABIE no cumple la condición. La estación E se encuentra separada de la estación J por más de cuatro estaciones.



WinQSB / Network Modeling/ Minimal Spanning Tree

NET Problem Specification

Problem Type	Objective Criterion	
<input type="radio"/> Network Flow <input type="radio"/> Transportation Problem <input type="radio"/> Assignment Problem <input type="radio"/> Shortest Path Problem <input type="radio"/> Maximal Flow Problem <input checked="" type="radio"/> Minimal Spanning Tree <input type="radio"/> Traveling Salesman Problem	<input checked="" type="radio"/> Minimization <input type="radio"/> Maximization	
Data Entry Format		
<input checked="" type="radio"/> Spreadsheet Matrix Form <input type="radio"/> Graphic Model Form <input type="checkbox"/> Symmetric Arc Coefficients (i.e., both ways same cost)		
Problem Title	METRO	
Number of Nodes	10	
OK	Cancel	Help

Network Modeling

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

Toolbar icons: File, Edit, Format, Solve and Analyze, Results, Utilities, Window, WinQSB, Help.

Minimal Spanning Tree Problem METRO VALLADOLID

From \ To	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
A		4	5		8	5		7	6	
B	4		7	10	9	6		2		5
C	5	7		8		3		6		
D		10	8			6	9	13		5
E	8	9						9	7	16
F	5	6	3	6						
G		2		9					6	11
H	7		6	13	9				12	13
I	6	5			7		6	12		
J				5	16		11	13		

Network Modeling

File Format Results Utilities Window Help

Toolbar icons: File, Format, Results, Utilities, Window, Help.

Solution for Minimal Spanning Tree Problem METRO VALLADOLID

	From Node	Connect To	Distance/Cost		From Node	Connect To	Distance/Cost
1	A	B	4	6	B	G	2
2	A	C	5	7	C	H	6
3	F	D	6	8	B	I	5
4	I	E	7	9	D	J	5
5	C	F	3				
	Total	Minimal	Connected	Distance or Cost	=		43


PRIM


Una empresa aeronáutica decide instalar un sistema de distribución que permita enviar contenedores a ocho provincias españolas, considerando la posibilidad de envío no directo. Los costes en cientos de euros se reflejan en la tabla adjunta.

ÁRBOL
EXPANSIÓN
MÍNIMA

Dibujar el grafo y calcular el mínimo coste por el algoritmo de Prim.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	—	20	18	14	19	15	16	13
2	20	—	16	9	12	11	10	16
3	18	16	—	8	22	12	13	14
4	14	9	8	—	13	16	21	17
5	19	12	22	13	—	10	17	24
6	15	11	12	16	10	—	13	18
7	16	10	13	21	17	13	—	14
8	13	16	14	17	24	18	14	—

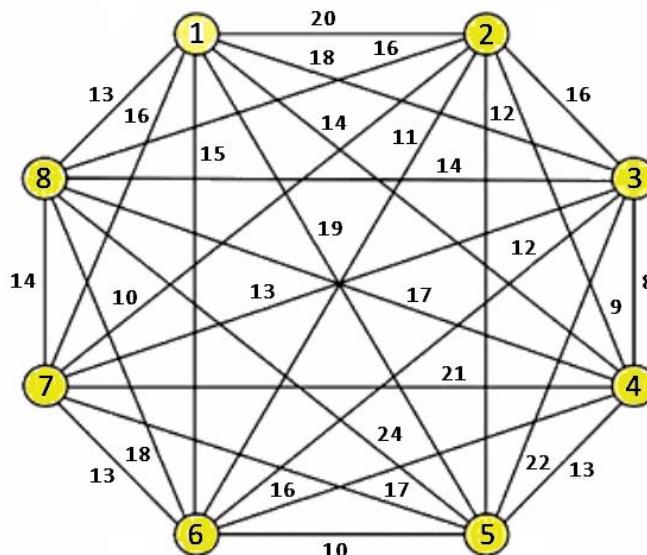
Solución:

El algoritmo de Prim comienza eligiendo un vértice cualquiera.

Se elige arbitrariamente el vértice 5 y se construye el árbol con 5 como único vértice.

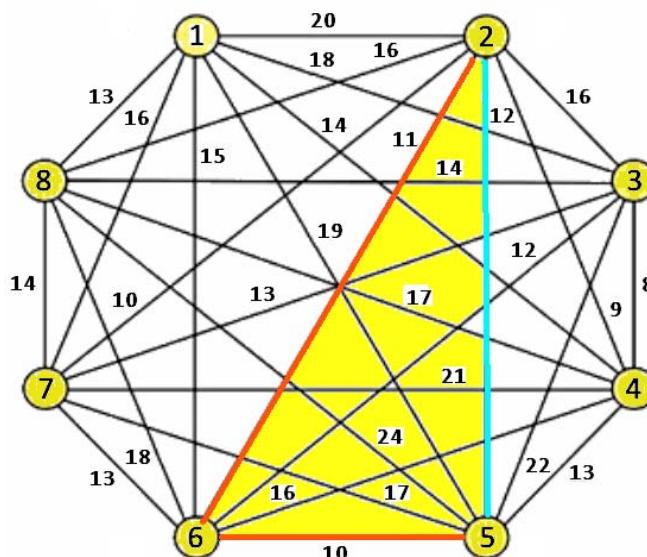
A continuación, se añade la arista de menor peso que une el vértice.

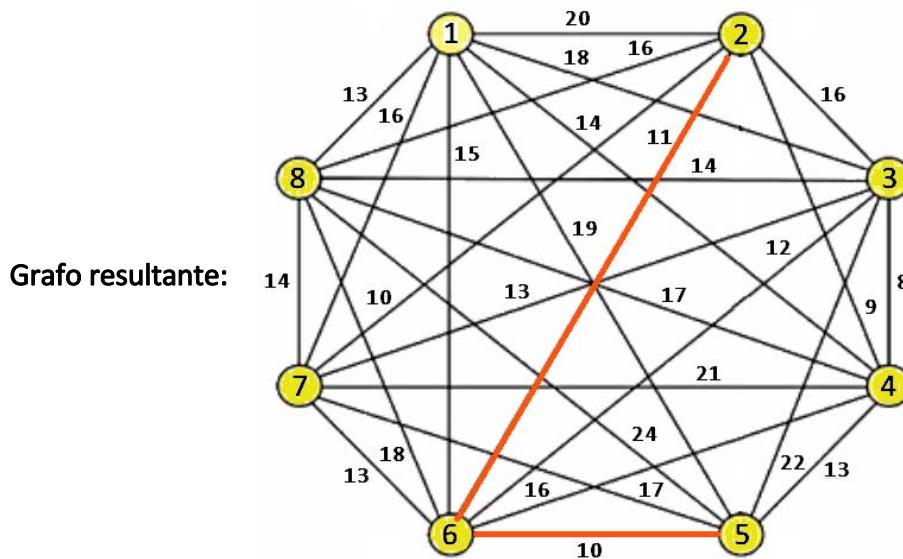
El segundo vértice más cercano a 5 es el vértice 6 (a una distancia de 10). Se marca la arista 5-6.



El siguiente vértice más cercano a elegir entre 5 y 6 es el vértice 2, a una distancia de 11 del vértice 6.

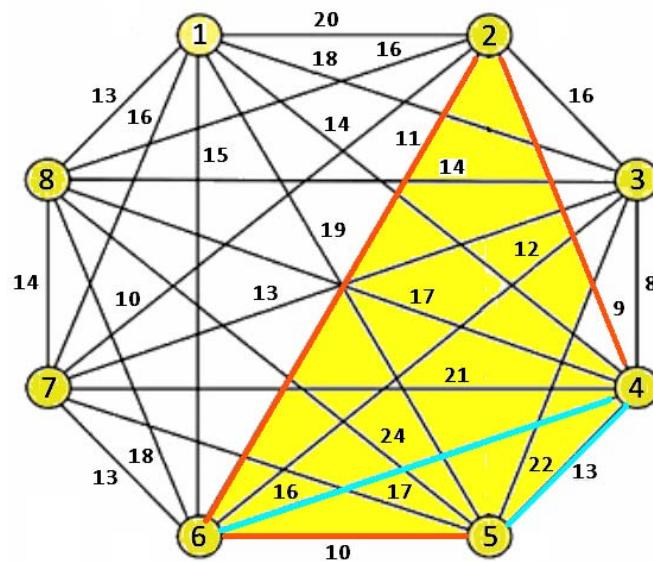
Se marca la arista 6-2, mientras que la arista 2-5 desaparece porque formaría un ciclo.



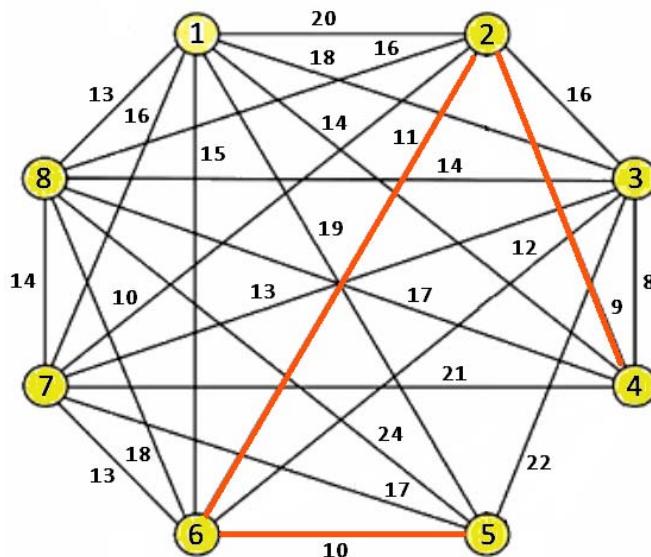


El siguiente vértice más cercano a elegir entre 6 o 2 es el vértice 4, a una distancia de 9 del vértice 2.

Se marca la arista 2-4 y desaparecen las aristas 4-6 y 4-5 porque formarían un ciclo



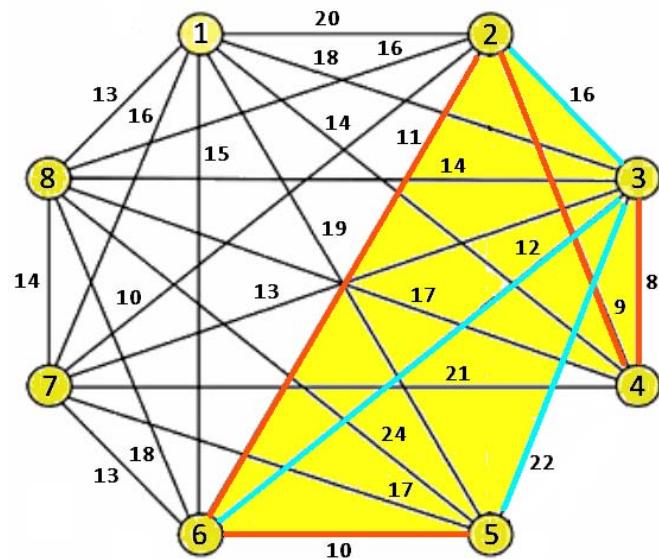
Grafo resultante:



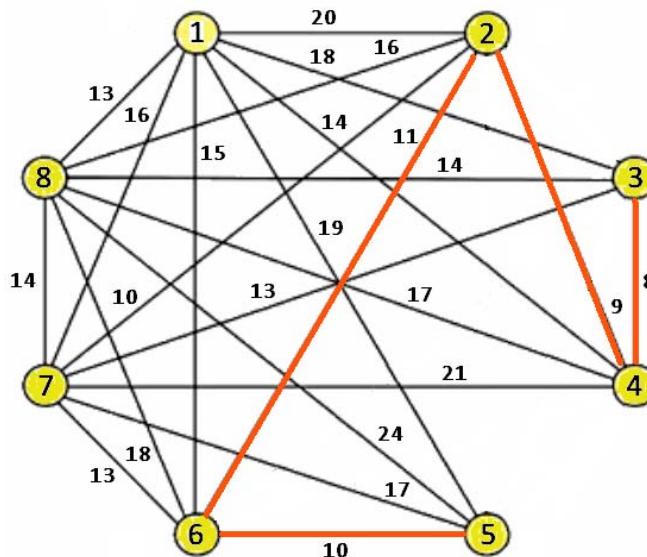


El vértice más cercano a 2 o 4 es el vértice 3, a una distancia de 8 del vértice 4.

Se marca la arista 4-3 a una distancia de 8 y desaparece las aristas 3-2 , 3-6 y 3-5 para no formar ciclos.

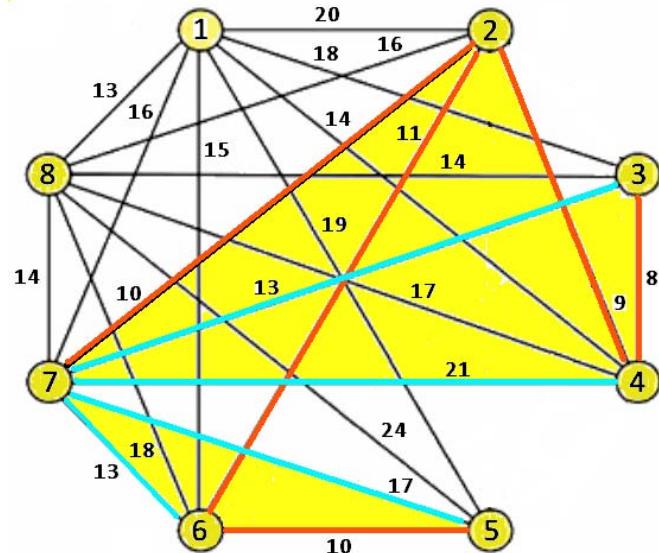


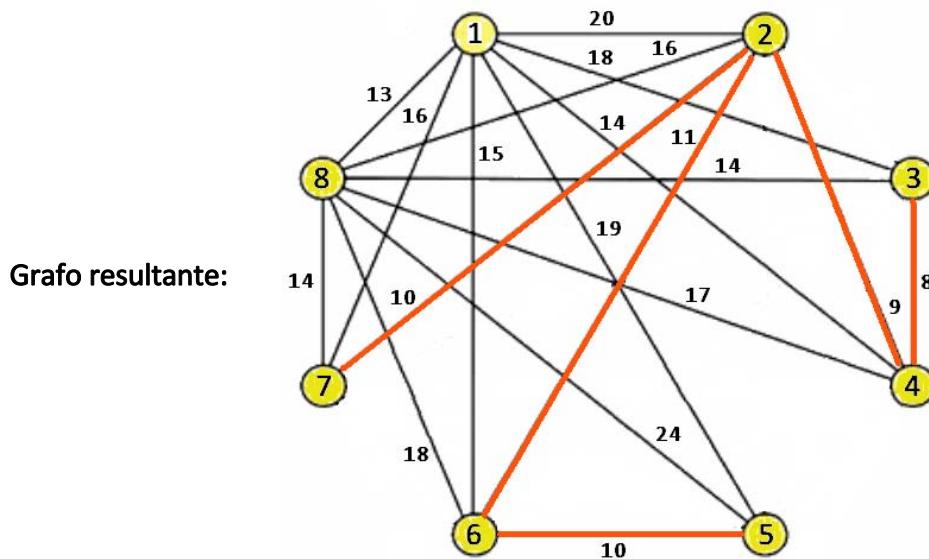
Grafo resultante:



El siguiente vértice más cercano a elegir entre 2 o 3 es el vértice 7, a una distancia de 10 del vértice 2.

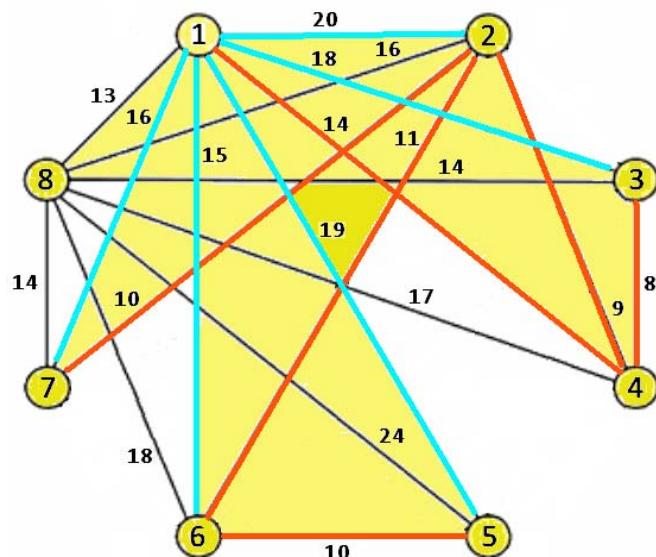
Se marca la arista 2-7 y desaparecen las aristas 7-3 , 7-6 , 7-5 y 7-4 para no formar ciclos.



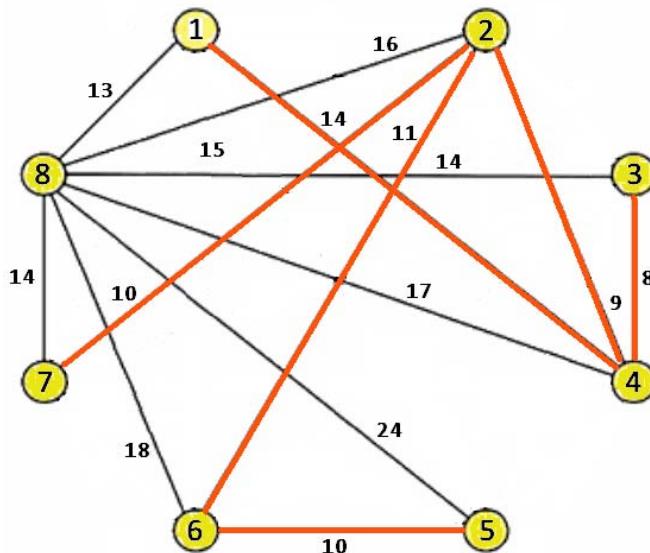


El siguiente vértice más cercano es el 1, a una distancia de 14 del vértice 4.

Se marca la arista 4-1 y desaparecen las aristas 1-7, 1-3, 1-2, 1-5 y 1-6 para no formar ciclos.



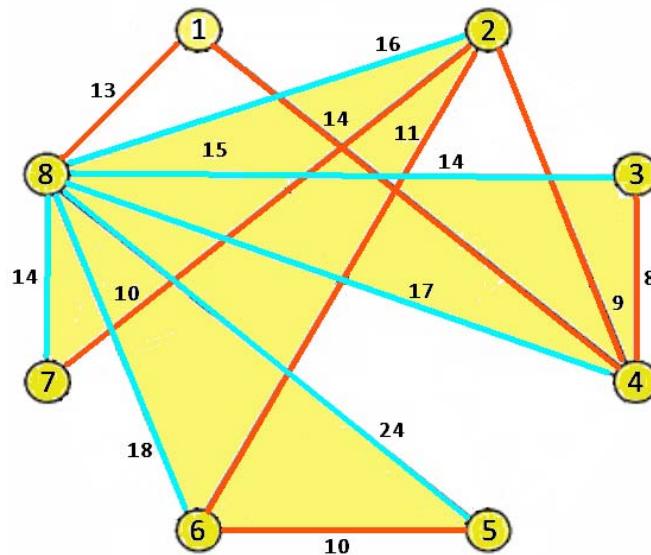
Grafo resultante:





Finalmente, se elige el vértice 8, a una distancia de 13 del vértice 1.

Se marca la arista 1-8 y desaparecen las aristas 8-2 , 8-5 , 8-6 , 8-3 , 8-4 y 8-7 para no formar ciclos

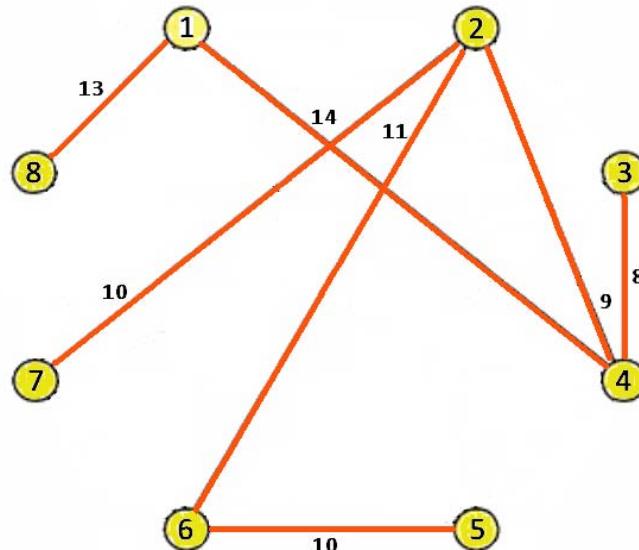


El algoritmo de Prim finaliza cuando todos los vértices están marcados.

Generalmente, finaliza cuando se han añadido $(n - 1) = 8 - 1 = 7$ aristas.

Longitud o peso mínimo de la distribución:
 $8 + 9 + 10 + 10 + 11 + 13 + 14 = 75$

Coste mínimo de la distribución:
 $75 \times 100 = 7.500$ euros.




KRUSKAL


Una empresa aeronáutica decide instalar un sistema de distribución que permita enviar contenedores a ocho provincias españolas, considerando la posibilidad de envío no directo. Los costes en cientos de euros se reflejan en la tabla adjunta.

ÁRBOL EXPANSIÓN MÍNIMA

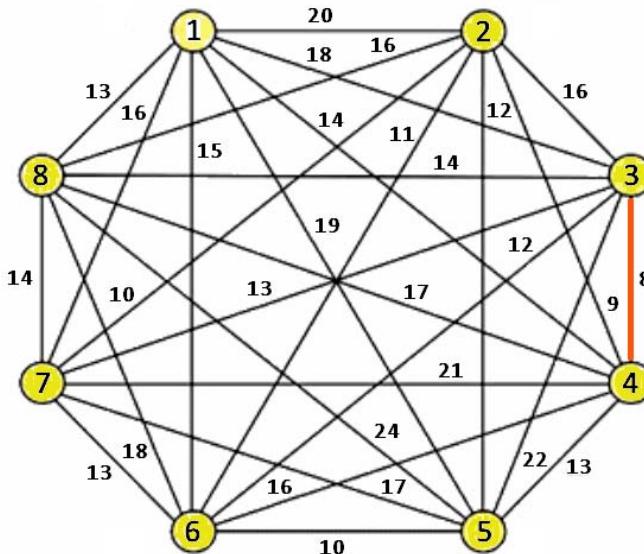
Dibujar el grafo y calcular el mínimo coste por el algoritmo de Kruskal.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	—	20	18	14	19	15	16	13
2	20	—	16	9	12	11	10	16
3	18	16	—	8	22	12	13	14
4	14	9	8	—	13	16	21	17
5	19	12	22	13	—	10	17	24
6	15	11	12	16	10	—	13	18
7	16	10	13	21	17	13	—	14
8	13	16	14	17	24	18	14	—

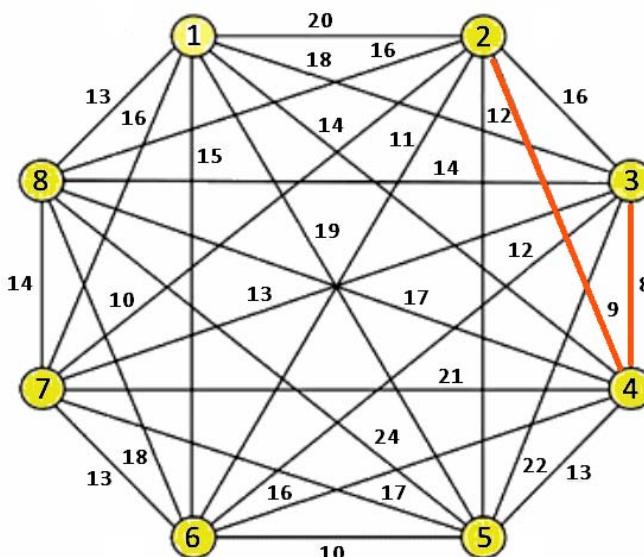
Solución:

Se van seleccionando las aristas más cortas (con menor peso), ya que hay que calcular el mínimo coste. Se presta atención a las aristas marcadas para no formar un ciclo.

Se comienza seleccionando el menor valor, en este caso el 8, que une el nodo 3 y 4.

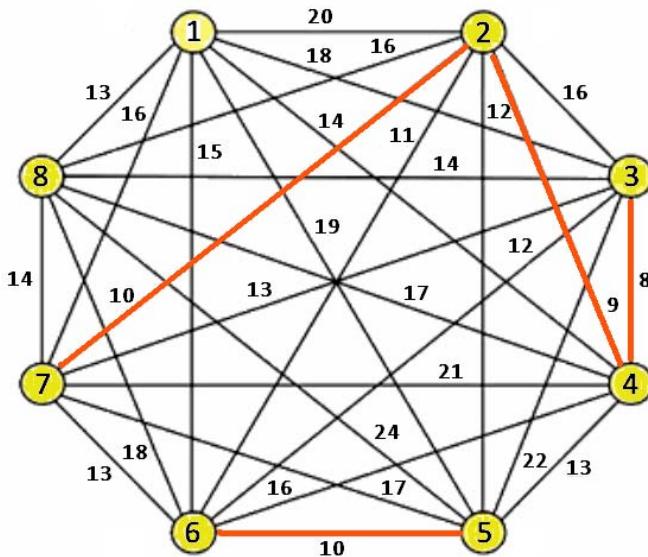


A continuación, se selecciona la arista que une los nodos 2 y 4.

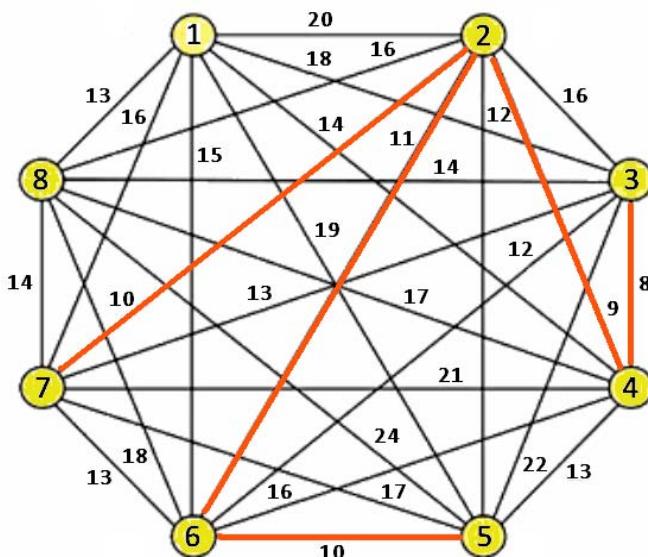




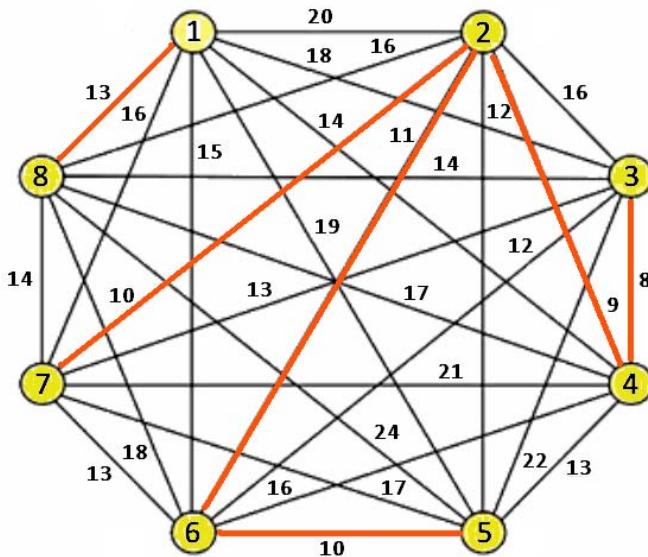
Se selecciona la arista que une los nodos
5 - 6 y 2 - 7



A Se unen los nodos 2 - 6



A Se unen los nodos 1 - 8

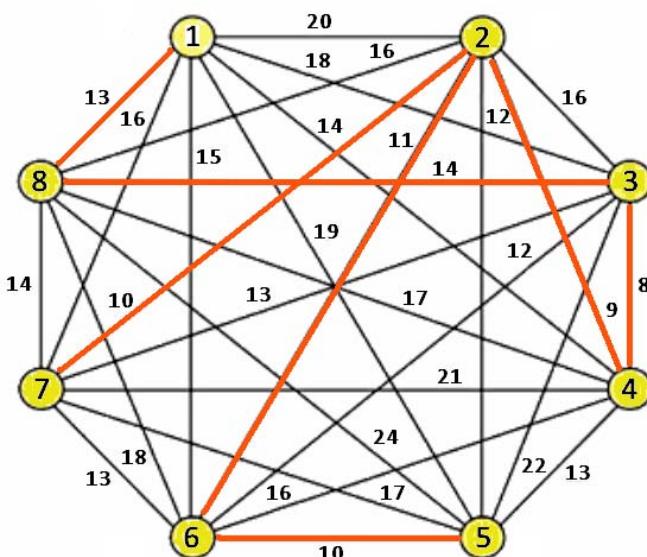




Finalmente, se selecciona la arista que une los nodos 3 - 8.

La unión de cualquiera de otras aristas formaría ciclo.

El algoritmo finaliza cuando el bosque forma un árbol de expansión mínima.

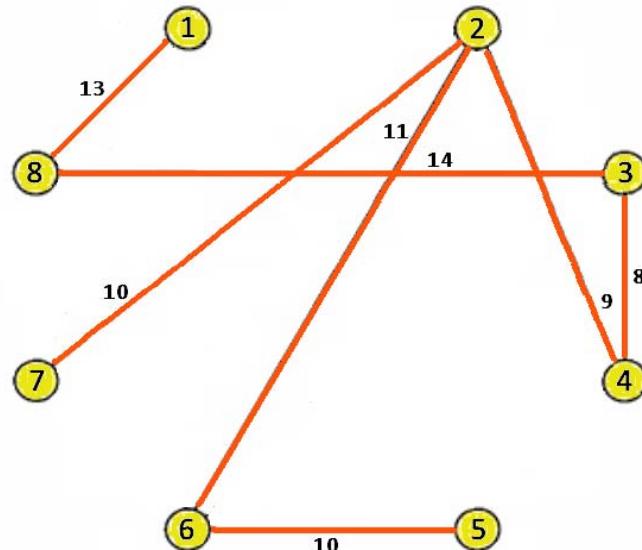


Longitud o peso mínimo de la distribución:

$$8 + 9 + 14 + 10 + 11 + 13 + 10 = 75$$

Coste mínimo de la distribución:

$$75 \times 100 = 7.500 \text{ euros.}$$



KRUSKAL: Network Modeling / Minimal Spanning Tree

NET Problem Specification

Problem Type	Objective Criterion	
<input type="radio"/> Network Flow <input type="radio"/> Transportation Problem <input type="radio"/> Assignment Problem <input type="radio"/> Shortest Path Problem <input type="radio"/> Maximal Flow Problem <input checked="" type="radio"/> Minimal Spanning Tree <input type="radio"/> Traveling Salesman Problem	<input checked="" type="radio"/> Minimization <input type="radio"/> Maximization	
Data Entry Format		
<input checked="" type="radio"/> Spreadsheet Matrix Form <input type="radio"/> Graphic Model Form <input checked="" type="checkbox"/> Symmetric Arc Coefficients <small>(i.e., both ways same cost)</small>		
Problem Title	KRUSKAL	
Number of Nodes	8	
OK	Cancel	Help



Network Modeling

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

0.00 A

From \ To	1	2	3	4	5	6	7	8
1		20	18	14	19	15	16	13
2	20		16	9	12	11	10	16
3	18	16		8	22	12	13	14
4	14	9	8		13	16	21	17
5	19	12	22	13		10	17	24
6	15	11	12	16	10		13	18
7	16	10	13	21	17	13		14
8	13	16	14	17	24	18	14	

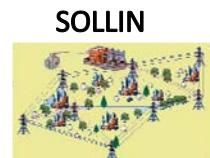
Network Modeling

File Format Results Utilities Window Help

0.00 A

Solution for Minimal Spanning Tree Problem KRUSKAL

	From Node	Connect To	Distance/Cost		From Node	Connect To	Distance/Cost
1	4	2	9	5	2	6	11
2	4	3	8	6	2	7	10
3	1	4	14	7	1	8	13
4	6	5	10				
	Total	Minimal	Connected	Distance or Cost		=	75



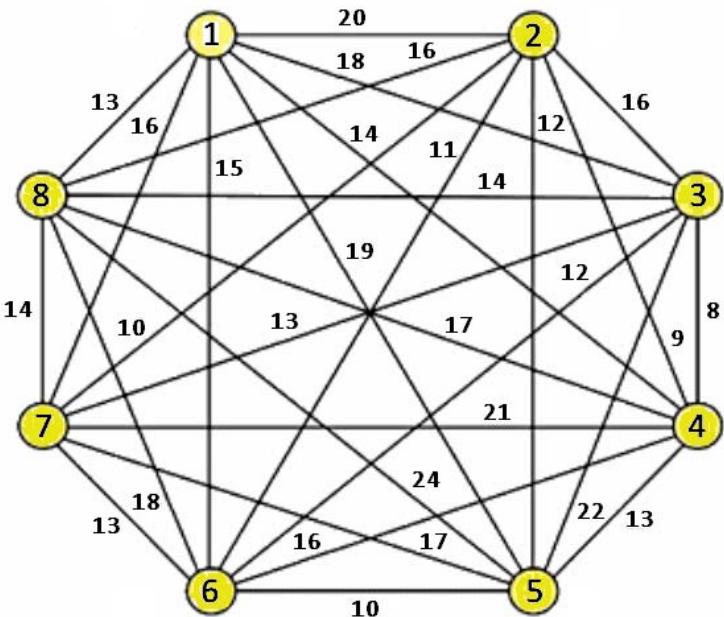
ÁRBOL EXPANSIÓN MÍNIMA

Una empresa aeronáutica decide instalar un sistema de distribución que permita enviar contenedores a ocho provincias españolas, considerando la posibilidad de envío no directo. Los costes en cientos de euros se reflejan en la tabla adjunta.

Dibujar el grafo y calcular el coste mínimo por el algoritmo de Sollin.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	—	20	18	14	19	15	16	13
2	20	—	16	9	12	11	10	16
3	18	16	—	8	22	12	13	14
4	14	9	8	—	13	16	21	17
5	19	12	22	13	—	10	17	24
6	15	11	12	16	10	—	13	18
7	16	10	13	21	17	13	—	14
8	13	16	14	17	24	18	14	—

Solución:



Se selecciona el mínimo elemento de la tabla (elemento 8) que se encuentra en la casilla (3, 4). En caso de existir varios, se selecciona uno cualquiera.

Se eliminan las columnas 3 y 4 , marcando las filas 3 y 4.

1	2	3	4	5	6	7	8	
1	—	20	18	14	19	15	16	13
2	20	—	16	9	12	11	10	16
3	18	16	—	8	22	12	13	14
4	14	9	8	—	13	16	21	17
5	19	12	22	13	—	10	17	24
6	15	11	12	16	10	—	13	18
7	16	10	13	21	17	13	—	14
8	13	16	14	17	24	18	14	—

1	2	3	4	5	6	7	8
1	—	20	19	15	16	13	13
2	20	—	12	11	10	10	16
3	18	16	—	13	16	12	13
4	14	9	—	13	16	11	17
5	19	12	22	—	10	—	17
6	15	11	12	16	—	10	—
7	16	10	13	21	17	13	—
8	13	16	14	17	24	18	14

Como no están marcadas todas las filas, el algoritmo sigue.



Se selecciona el mínimo elemento que pertenece a las filas marcadas y no pertenecen a las columnas eliminadas. El mínimo elemento es el 9, que se encuentra en la casilla (4, 2), se elimina la columna 2 y se marca la fila 2.

	1	2	3	4	5	6	7	8		1	2	3	4	5	6	7	8
1	—	20			19	15	16	13		1	—			19	15	16	13
2	20	—			12	11	10	16		3•2	20			12	11	10	16
1•3	18	16			22	12	13	14		1•3	18			22	12	13	14
2•4	14	9			13	16	21	17		2•4	14			13	16	21	17
5	19	12			—	10	17	24		5	19			—	10	17	24
6	15	11			10	—	13	18		6	15			10	—	13	18
7	16	10			17	13	—	14		7	16			17	13	—	14
8	13	16			24	18	14	—		8	13			24	18	14	—

Se selecciona el mínimo elemento que pertenece a las filas marcadas y no pertenecen a las columnas eliminadas. El mínimo elemento es el 10, que se encuentra en la casilla (2, 7), se elimina la columna 7 y se marca la fila 7.

	1	2	3	4	5	6	7	8		1	2	3	4	5	6	7	8
	—				19	15	16	13		1	—			19	15	—	13
3•	20				12	11	10	16		3•2	20			12	11	—	16
1•	18				22	12	13	14		1•3	18			22	12	—	14
2•	14				13	16	21	17		2•4	14			13	16	—	17
19					—	10	17	24		5	19			—	10	—	24
15					10	—	13	18		6	15			10	—	—	18
16					17	13	—	14		4•7	16			17	13	—	14
13					24	18	14	—		8	13			24	18	—	—

Se selecciona el mínimo elemento que pertenece a las filas marcadas y no pertenecen a las columnas eliminadas. El mínimo elemento es el 11, que se encuentra en la casilla (2, 6), se elimina la columna 6 y se marca la fila 6.

	1	2	3	4	5	6	7	8		1	2	3	4	5	6	7	8
1	—				19	15		13		1	—			19	—	13	
3•2	20				12	11	10	16		3•2	20			12	—	16	
1•3	18				22	12		14		1•3	18			22	—	14	
2•4	14				13	16		17		2•4	14			13	—	17	
5	19				—	10		24		5	19			—	—	24	
6	15				10	—		18		5•6	15			10	—	18	
4•7	16				17	13		14		4•7	16			17	—	14	
8	13				24	18		—		8	13			24	—	—	



Se selecciona el mínimo elemento que pertenece a las filas marcadas y no pertenecen a las columnas eliminadas. El mínimo elemento es el 10, que se encuentra en la casilla (6, 5), se elimina la columna 5 y se marca la fila 6.

	1	2	3	4	5	6	7	8		1	2	3	4	5	6	7	8
1	—				19		13			—							13
3• 2	20				12		16			3• 2	20						16
1• 3	18				22		14			1• 3	18						14
2• 4	14				13		17			2• 4	14						17
5	19				—		24			6• 5	19						24
5• 6	15				10		18			5• 6	15						18
4• 7	16				17		14			4• 7	16						14
8	13				24		—			8	13						—

Se selecciona el mínimo elemento que pertenece a las filas marcadas y no pertenecen a las columnas eliminadas. El mínimo elemento es el 14, que se encuentra en la casilla (7, 8), se elimina la columna 8 y se marca la fila 8.

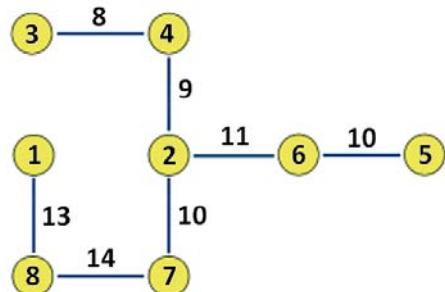
	1	2	3	4	5	6	7	8		1	2	3	4	5	6	7	8
1	—					13				—							
3• 2	20					16				3• 2	20						
1• 3	18					14				1• 3	18						
2• 4	14					17				2• 4	14						
6• 5	19					24				6• 5	19						
5• 6	15					18				5• 6	15						
4• 7	16					14				4• 7	16						
8	13					—				7• 8	13						

El mínimo elemento es el 13, que se encuentra en la casilla (8, 1), se elimina la columna 1 y se marca la fila 1.

	1	2	3	4	5	6	7	8		1	2	3	4	5	6	7	8
1	—						13			8• 1							
3• 2	20									3• 2							
1• 3	18									1• 3							
2• 4	14									2• 4							
6• 5	19									6• 5							
5• 6	15									5• 6							
4• 7	16									4• 7							
7• 8	13									7• 8							

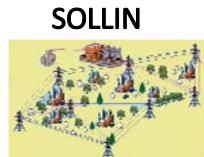


	1	2	3	4	5	6	7	8
8° 1	—	20	18	14	19	15	16	13
3° 2	20	—	16	9	12	11	10	16
1° 3	18	16	—	8	22	12	13	14
2° 4	14	9	8	—	13	16	21	17
6° 5	19	12	22	13	—	10	17	24
5° 6	15	11	12	16	10	—	13	18
4° 7	16	10	13	21	17	13	—	14
7° 8	13	16	14	17	24	18	14	—



Longitud o peso mínimo de la distribución: $8 + 9 + 11 + 10 + 10 + 14 + 13 = 75$

Coste mínimo de la distribución: $75 \times 100 = 7.500$ euros



ÁRBOL EXPANSIÓN

MÁXIMA

Una empresa aeronáutica decide instalar un sistema de distribución que permita enviar contenedores a ocho provincias españolas, considerando la posibilidad de envío no directo. Los costes en cientos de euros se reflejan en la tabla adjunta.

Dibujar el grafo y calcular el máximo coste por el algoritmo de Sollin.

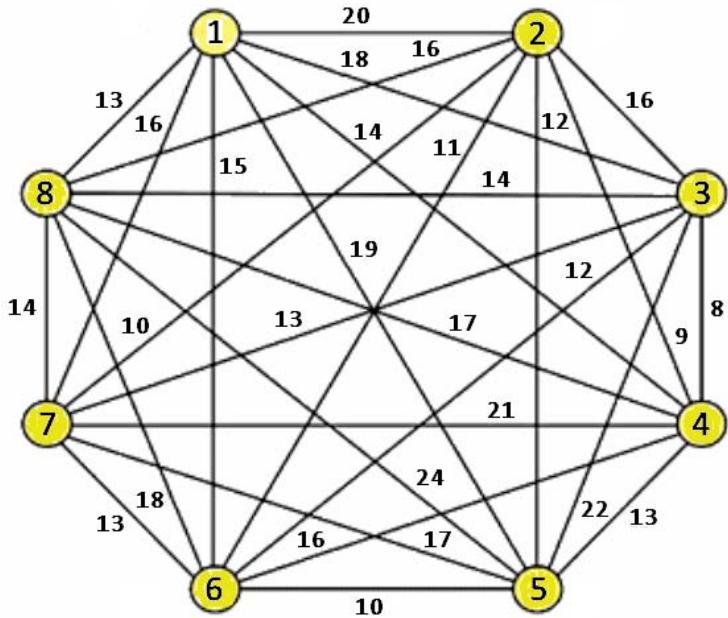
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	—	20	18	14	19	15	16	13
2	20	—	16	9	12	11	10	16
3	18	16	—	8	22	12	13	14
4	14	9	8	—	13	16	21	17
5	19	12	22	13	—	10	17	24
6	15	11	12	16	10	—	13	18
7	16	10	13	21	17	13	—	14
8	13	16	14	17	24	18	14	—

Solución:

Se selecciona el máximo elemento de la tabla (elemento 24) que se encuentra en la casilla (8, 5).

Se eliminan las columnas 5 y 8, y se marcan las filas 5 y 8.

En caso de existir varios, se selecciona uno cualquiera.



	1	2	3	4	5	6	7	8
1	—	20	18	14	19	15	16	13
2	20	—	16	9	12	11	10	16
3	18	16	—	8	22	12	13	14
4	14	9	8	—	13	16	21	17
5	19	12	22	13	—	10	17	24
6	15	11	12	16	10	—	13	18
7	16	10	13	21	17	13	—	14
8	13	16	14	17	24	18	14	—

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	—	20	18	14	—	15	16	
2	20	—	16	9	—	11	10	
3	18	16	—	8	—	8	—	12
4	14	9	8	—	—	—	—	16
5 ^a	19	12	22	13	—	10	17	
6	15	11	12	16	—	—	—	13
7	16	10	13	21	17	—	13	—
8 ^a	13	16	14	17	24	18	14	—

Como no están marcadas todas las filas, el algoritmo continúa.

Se selecciona el máximo elemento que pertenece a las filas marcadas y no pertenecen a las columnas eliminadas.



El máximo elemento es 22, que se encuentra en la casilla (5, 3).

Se elimina la columna 3 y se marca la fila 3.

	1	2	3	4	5	6	7	8		1	2	3	4	5	6	7	8		
1	—	20	18	14		15	16		1	—	20		14		15	16			
2	20	—	16	9		11	10		2	20	—		9		11	10			
3	18	16	—	8		12	13		3 ^a	3	18	16	—	8		12	13		
4	14	9	8	—		16	21		4	14	9		—		16	21			
1 ^a	5	19	12	22	13	—	10	17	1 ^a	5	19	12		13	—	10	17		
6	15	11	12	16		—	13		6	15	11		16		—	13			
7	16	10	13	21		13	—		7	16	10		21		13	—			
2 ^a	8	13	16	14	17		18	14	—	2 ^a	8	13	16		17		18	14	—

Se selecciona el máximo elemento que pertenece a las filas marcadas y no pertenecen a las columnas eliminadas.

El máximo elemento es el 19, que se encuentra en la casilla (5, 1), se elimina la columna 1 y se marca la fila 1.

	1	2	3	4	5	6	7	8		1	2	3	4	5	6	7	8	
1	—	20		14		15	16		4 ^a	1	—	20		14		15	16	
2	20	—		9		11	10		2	—		9		11	10			
3 ^a	3	18	16	—	8		12	13	3 ^a	3	16	—	8		12	13		
4	14	9		—		16	21		4	9		—		16	21			
1 ^a	5	19	12		13	—	10	17	1 ^a	5	12		13	—	10	17		
6	15	11		16		—	13		6	11		16		—	13			
7	16	10		21		13	—		7	10		21		13	—			
2 ^a	8	13	16		17		18	14	—	2 ^a	8	16		17		18	14	—

Se selecciona el máximo elemento que pertenece a las filas marcadas y no pertenecen a las columnas eliminadas.



El máximo elemento es el 20, que se encuentra en la casilla (1, 2), se elimina la columna 2 y se marca la fila 2.

	1	2	3	4	5	6	7	8		1	2	3	4	5	6	7	8
4 ^a 1	—	20		14		15	16		4 ^a 1	—		14		15	16		
2	—		9		11	10			5 ^a 2	—		9		11	10		
3 ^a 3	16	—	8		12	13			3 ^a 3	—		8		12	13		
4	9		—		16	21			4			—		16	21		
1 ^a 5	12		13	—	10	17			1 ^a 5			13	—	10	17		
6	11		16		—	13			6			16	—	—	13		
7	10		21		13	—			7			21		13	—		
2 ^a 8	16		17		18	14	—		2 ^a 8			17		18	14	—	

Se selecciona el máximo elemento que pertenece a las filas marcadas y no pertenecen a las columnas eliminadas.

El máximo elemento es el 18, que se encuentra en la casilla (8, 6), se elimina la columna 6 y se marca la fila 6.

	1	2	3	4	5	6	7	8		1	2	3	4	5	6	7	8
4 ^a 1	—		14		15	16			4 ^a 1	—		14		16			
5 ^a 2	—		9		11	10			5 ^a 2	—		9		10			
3 ^a 3	—		8		12	13			3 ^a 3	—		8		13			
4	—		—		16	21			4			—		21			
1 ^a 5			13	—	10	17			1 ^a 5			13	—	17			
6			16		—	13			6 ^a 6			16		13			
7			21		13	—			7			21		—			
2 ^a 8			17		18	14	—		2 ^a 8			17		14	—		

Se selecciona el máximo elemento que pertenece a las filas marcadas y no pertenecen a las columnas eliminadas.



El máximo elemento es el 17, que se encuentra en la casilla (8, 4), se elimina la columna 4 y se marca la fila 4.

	1	2	3	4	5	6	7	8		1	2	3	4	5	6	7	8
4 ^a 1	—			14		16			4 ^a 1	—				16			
5 ^a 2		—		9		10			5 ^a 2		—			10			
3 ^a 3			—	8		13			3 ^a 3			—		13			
4				—		21			7 ^a 4				—	21			
1 ^a 5				13	—	17			1 ^a 5				—	17			
6 ^a 6				16		13			6 ^a 6					13			
7				21		—			2 ^a 8					—			
2 ^a 8				17		14	—		2 ^a 8					14	—		

Se selecciona el máximo elemento que pertenece a las filas marcadas y no pertenecen a las columnas eliminadas.

El máximo elemento es el 21, que se encuentra en la casilla (4, 7), se elimina la columna 7 y se marca la fila 7.

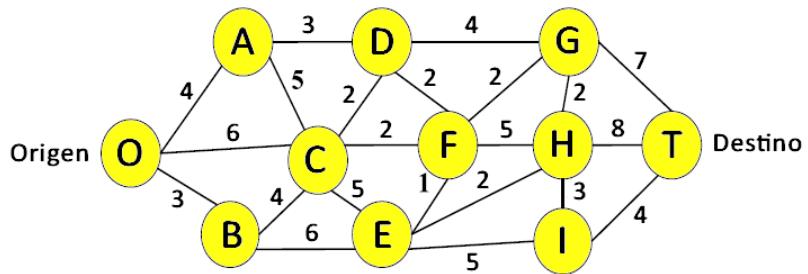
	1	2	3	4	5	6	7	8		1	2	3	4	5	6	7	8
4 ^a 1	—					16			4 ^a 1	—							
5 ^a 2		—				10			5 ^a 2		—						
3 ^a 3			—			13			3 ^a 3			—					
7 ^a 4				—		21			7 ^a 4				—				
1 ^a 5					—	17			1 ^a 5				—				
6 ^a 6						13			6 ^a 6								
7						—			8 ^a 7						—		
2 ^a 8						14	—		2 ^a 8						—		

El algoritmo ha finalizado al marcar todas las filas.

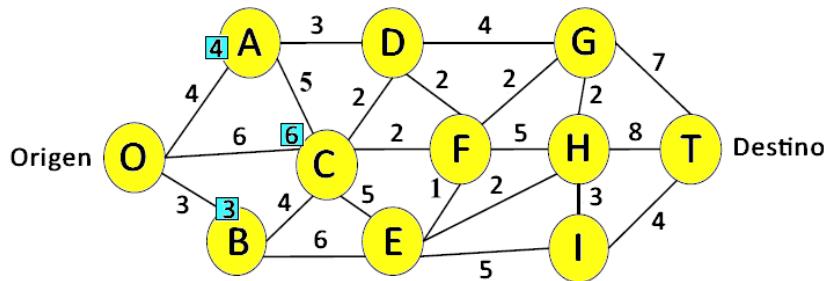
	1	2	3	4	5	6	7	8	
Longitud máxima del árbol:	1	—	20	18	14	19	15	16	13
19 + 20 + 22 + 17 + 18 + 21 + 24 = 141	2	20	—	16	9	12	11	10	16
El coste máximo de la distribución:	3	18	16	—	8	22	12	13	14
141 x 100 = 14.100 euros.	4	14	9	8	—	13	16	21	17
	5	19	12	22	13	—	10	17	24
	6	15	11	12	16	10	—	13	18
	7	16	10	13	21	17	13	—	14
	8	13	16	14	17	24	18	14	—



DIJKSTRA: Encontrar la ruta más corta de la red adjunta. Los números representan las correspondientes distancias entre nodos.

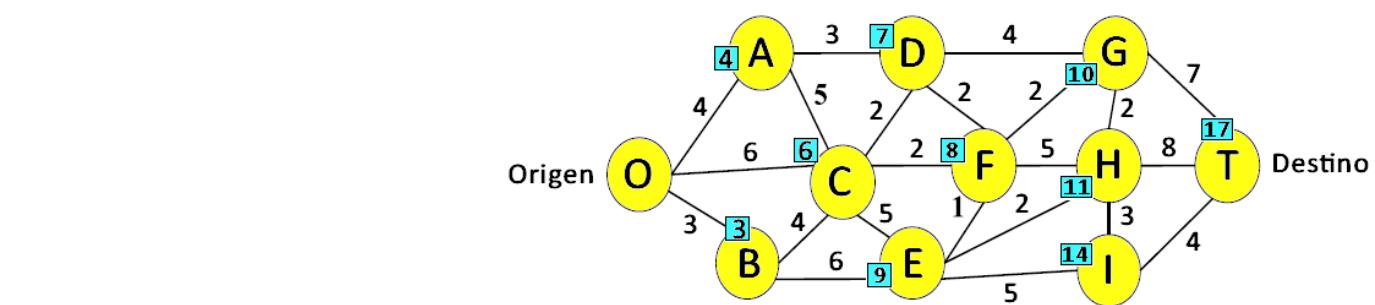
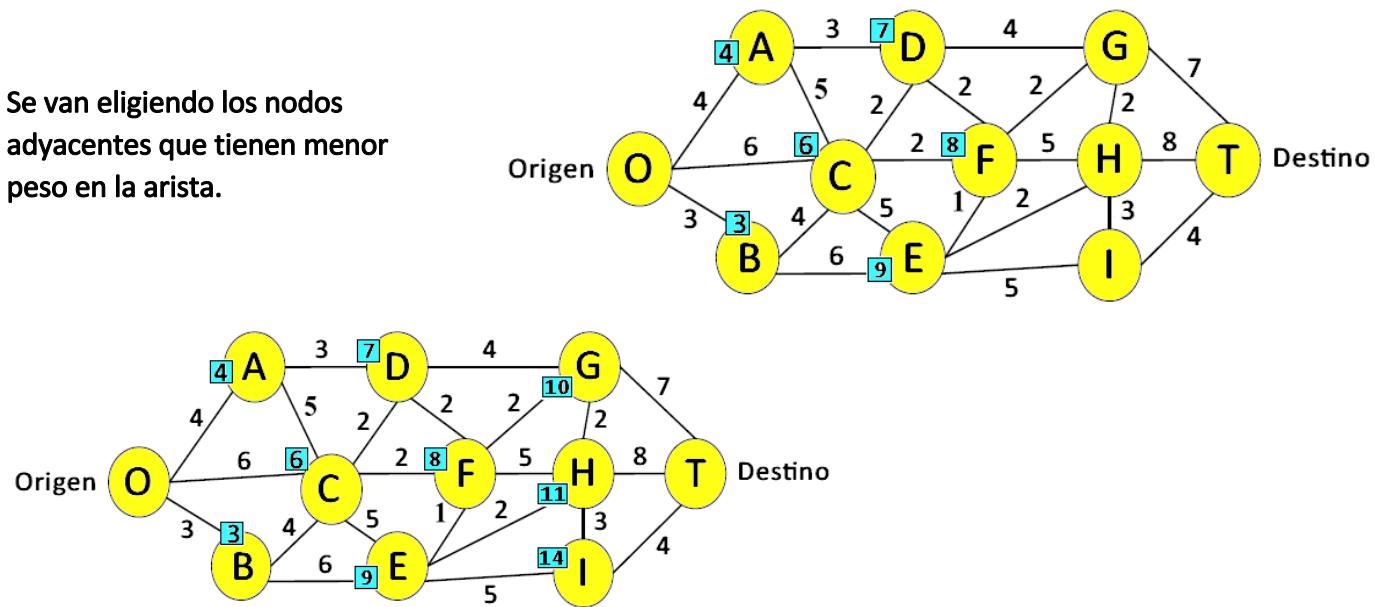


Solución:



El algoritmo de Dijkstra construye un árbol de caminos mínimos desde el vértice O hasta los restantes vértices del grafo.

Se van eligiendo los nodos adyacentes que tienen menor peso en la arista.




DIJKSTRA - RUTA MÁS CORTA: WinQSB / Network Modeling - Shortest Path Problem

NET Problem Specification

Problem Type	Objective Criterion	
<input type="radio"/> Network Flow <input type="radio"/> Transportation Problem <input type="radio"/> Assignment Problem <input checked="" type="radio"/> Shortest Path Problem <input type="radio"/> Maximal Flow Problem <input type="radio"/> Minimal Spanning Tree <input type="radio"/> Traveling Salesman Problem	<input checked="" type="radio"/> Minimization <input type="radio"/> Maximization	
Data Entry Format		
<input checked="" type="radio"/> Spreadsheet Matrix Form <input type="radio"/> Graphic Model Form <input type="checkbox"/> Symmetric Arc Coefficients <small>(i.e., both ways same cost)</small>		
Problem Title	DIJKSTRA	
Number of Nodes	11	
OK	Cancel	Help

Network Modeling

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

Toolbar icons: File, Edit, Format, Solve and Analyze, Results, Utilities, Window, WinQSB, Help.

Shortest Path Problem DIJKSTRA

From \ To	O	A	B	C	D	E	F	G	H	I	T
O		4	3	6							
A	4			5	3						
B	3			4		6					
C	6	5	4		2	5	2				
D		3		2			2	4			
E		6		5			1		2	5	
F				2	2	1		2	5		
G					4		2		2		7
H						2	5	2		3	8
I				5					3		4
T								7	8	4	

Network Modeling

File Format Results Utilities Window Help

Toolbar icons: File, Format, Results, Utilities, Window, Help.

Solution for Shortest Path Problem DIJKSTRA

	From	To	Distance/Cost	Cumulative Distance/Cost
1	O	C	6	6
2	C	F	2	8
3	F	G	2	10
4	G	T	7	17
	From O	To T	=	17
	From O	To A	=	4
	From O	To B	=	3
	From O	To C	=	6
	From O	To D	=	7
	From O	To E	=	9
	From O	To F	=	8
	From O	To G	=	10
	From O	To H	=	11
	From O	To I	=	14

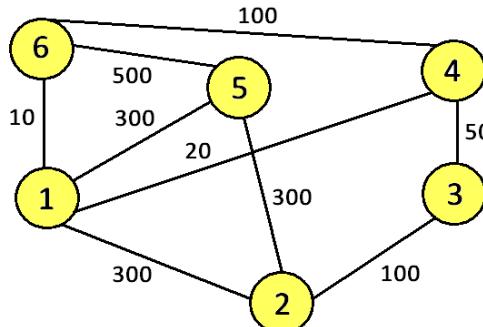




En el diagrama se muestran los posibles trayectos desde Plaza Castilla (1) hasta la UAM (6), encima de cada arista se representan las frecuencias diarias en ambos sentidos. Se asume que una frecuencia diaria equivale a 50 personas. ¿Cuál es el flujo máximo?

FLUJO
MÁXIMO

- 1 - Plaza Castilla (inicio)
- 2 - Nuevos Ministerios
- 3 - Pinar de Chamartín
- 4 - Alcobendas
- 5 - Chamartín
- 6 - UAM (final)

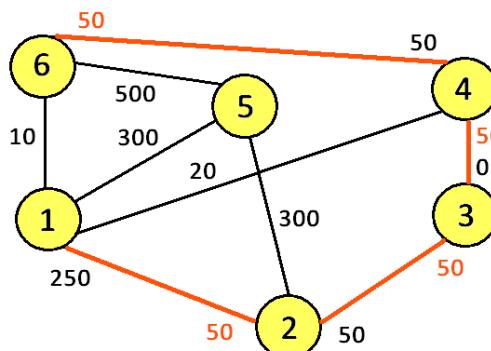

Solución:

El flujo máximo que puede pasar desde el origen (Plaza Castilla) hasta el destino (UAM) es la suma de las capacidades $\sum k$.

- Ruta 1 - 2 - 3 - 4 - 5 : Plaza Castilla - Nuevos Ministerios - Pinar de Chamartín - Alcobendas - UAM

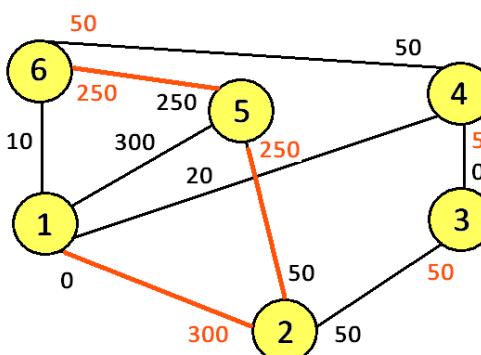
$$k_1 = \min(300, 100, 50, 100) = 50$$

Las nuevas capacidades vienen dadas por la expresión: $C_{ij,ji} = (C_i - k, C_j + k)$



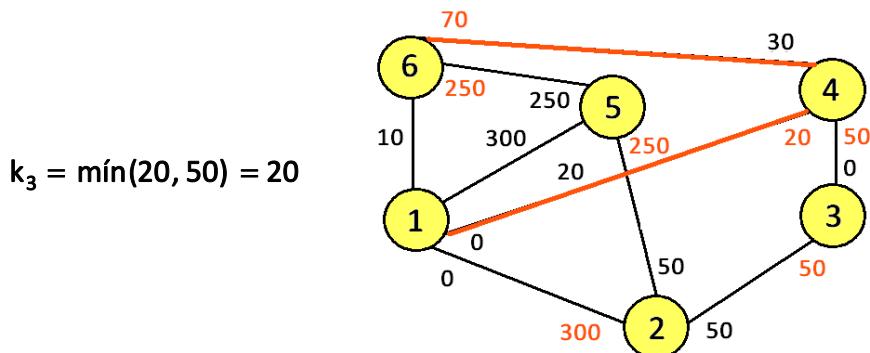
- Ruta 1 - 2 - 5 - 6 : Plaza Castilla - Nuevos Ministerios - Chamartín - UAM

$$k_2 = \min(250, 300, 500) = 250$$

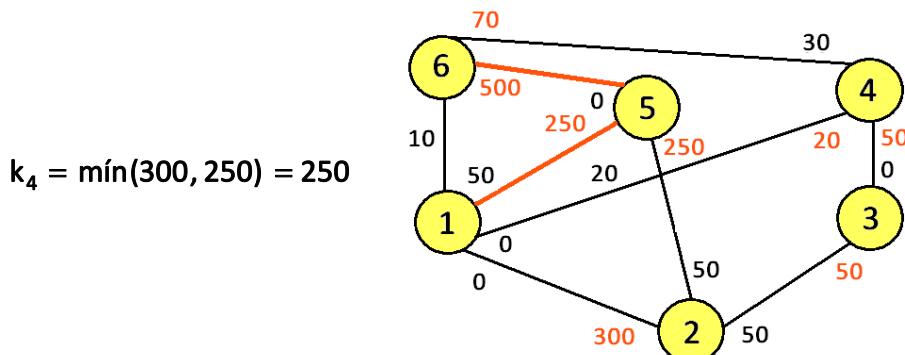




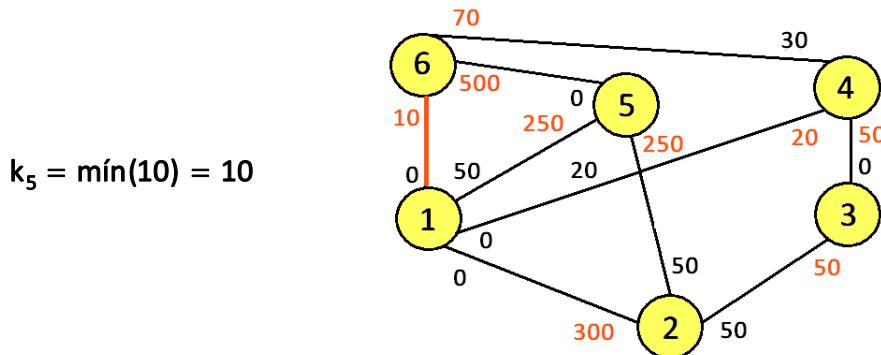
- Ruta 1 - 4 - 6 : Plaza Castilla - Alcobendas - UAM



- Ruta 1 - 5 - 6 : Plaza Castilla - Chamartín - UAM



- Ruta 1 - 6 : Plaza Castilla - UAM (con limitaciones y fila de espera)



Ha finalizado el algoritmo puesto que no hay otras alternativas de viaje que tengan capacidad. Todas las capacidades salientes desde Plaza Castilla (1) son 0, excepto de 1 - 5 con 50. Si se inicia la ruta la capacidad de 3 - 4 es 0, no pudiendo continuar.

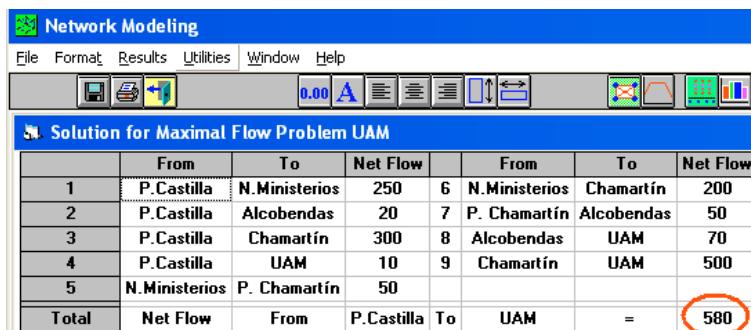
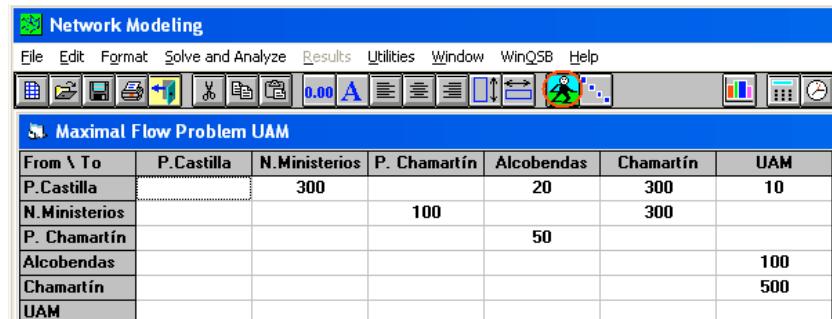
Flujo máximo: $\sum_{i=1}^5 k_i = 50 + 250 + 20 + 250 + 10 = 580$

Número de usuarios diarios: $580 \times 50 = 29.000$


WinQSB / Net Problem Specification - Maximal Flow Problem

NET Problem Specification

Problem Type	Objective Criterion	
<input type="radio"/> Network Flow <input type="radio"/> Transportation Problem <input type="radio"/> Assignment Problem <input type="radio"/> Shortest Path Problem <input checked="" type="radio"/> Maximal Flow Problem <input type="radio"/> Minimal Spanning Tree <input type="radio"/> Traveling Salesman Problem	<input type="radio"/> Minimization <input checked="" type="radio"/> Maximization	
Data Entry Format		
<input checked="" type="radio"/> Spreadsheet Matrix Form <input type="radio"/> Graphic Model Form <input type="checkbox"/> Symmetric Arc Coefficients <small>(i.e., both ways same cost)</small>		
Problem Title	UAM	
Number of Nodes	6	
OK	Cancel	Help

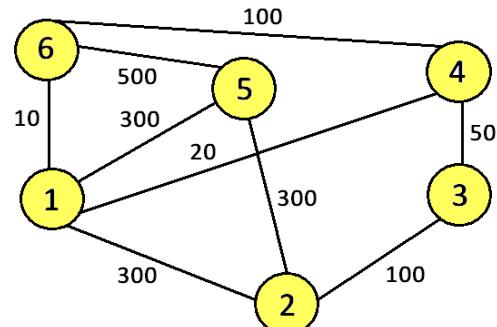


PROGRAMACIÓN LINEAL

Los números asignados a cada uno de los arcos representan los flujos máximos o capacidades correspondientes a cada arco.

$x_{ij} \equiv$ Unidades que fluyen desde el nodo i al nodo j.

- 1 - Plaza Castilla (origen)
- 2 - Nuevos Ministerios
- 3 - Pinar de Chamartín
- 4 - Alcobendas
- 5 - Chamartín
- 6 - UAM (destino)



Función Objetivo: Maximizar las unidades que salen del nodo de origen (1) a los nodos que están conectados (2, 4, 5 y 6) o alternativamente maximizar las unidades que llegan al nodo de destino (6) desde los nodos que conectan a él (1, 4 y 5).

Alternativas: Maximizar $z = x_{16} + x_{46} + x_{56}$ o bien Maximizar $z = x_{12} + x_{14} + x_{15} + x_{16}$

Restricciones:

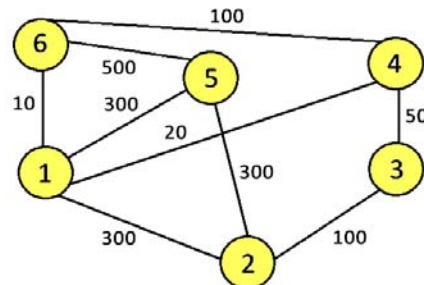
- Flujo Máximo: La cantidad de unidades que sale de cada nodo de origen a un nodo de destino no puede superar la capacidad del arco. Por ejemplo, del nodo 1 al nodo 2 sólo se pueden enviar 300 unidades.

$$\begin{cases} x_{12} \leq 300 & x_{14} \leq 20 & x_{15} \leq 300 & x_{16} \leq 10 & x_{23} \leq 100 \\ x_{25} \leq 300 & x_{34} \leq 50 & x_{46} \leq 100 & x_{52} \leq 300 & x_{56} \leq 500 \end{cases}$$



- Balance de Flujo en los Nodos: Las unidades que entran a un nodo debe de ser igual a las unidades que salen. Por ejemplo, el número de unidades que se envían del nodo 1 al nodo 4 debe ser igual a las que salen del nodo 4 (se envían al nodo 3 y al nodo 6).

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Nodo 2: } x_{12} + x_{52} = x_{23} \\ \text{Nodo 3: } x_{23} = x_{34} \\ \text{Nodo 4: } x_{14} + x_{34} = x_{46} \\ \text{Nodo 5: } x_{15} + x_{25} = x_{56} \\ \text{Nodo 6: } x_{16} + x_{56} = x_{64} \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_{12} + x_{52} - x_{23} = 0 \\ x_{23} - x_{34} = 0 \\ x_{14} + x_{34} - x_{46} = 0 \\ x_{15} + x_{25} - x_{56} = 0 \\ x_{16} + x_{56} - x_{64} = 0 \end{array} \right.$$



- No Negatividad e Integralidad: Las variables de decisión tienen la condición de no negatividad ($x_{ij} \geq 0$), adicionalmente se exige que éstas adopten valores enteros. Si se omite esta condición podría dar un problema de Programación Lineal.

Max. Cx $\Delta X = b$

FLUJO MÁXIMO: PROGRAMACIÓN LINEAL

LP-ILP Problem Specification

Problem Title:	UAM
Number of Variables:	11
Number of Constraints:	5
Objective Criterion	<input checked="" type="radio"/> Maximization <input type="radio"/> Minimization
Default Variable Type	<input type="radio"/> Nonnegative continuous <input checked="" type="radio"/> Nonnegative integer <input type="radio"/> Binary (0,1) <input type="radio"/> Unsigned/unrestricted
Data Entry Format	<input checked="" type="radio"/> Spreadsheet Matrix Form <input type="radio"/> Normal Model Form
<input type="button" value="OK"/> <input type="button" value="Cancel"/> <input type="button" value="Help"/>	

Linear and Integer Programming

File	Edit	Format	Solve and Analyze	Results	Utilities	Window	WinQSB	Help					
0.00	A												
UAM													
Variable -->	X12	X14	X15	X16	X23	X25	X34	X46	X52	X56	X64	Direction	R. H. S.
Maximize					1			1		1			
N.	1					-1				1		=	0
P.						1		-1				=	0
Alcobendas		1					1	-1				=	0
Chamartín			1				1			-1		=	0
UAM				1						1	-1	=	0
LowerBound	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
UpperBound	300	20	300	10	100	300	50	100	300	500	M		
VariableType	Integer	Integer	Integer	Integer	Integer	Integer	Integer	Integer	Integer	Integer	Integer		



Linear and Integer Programming

File Format Results Utilities Window Help

	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(i)	Total Contribution
1	X12	50,0000	0	0
2	X14	20,0000	0	0
3	X15	300,0000	0	0
4	X16	10,0000	1,0000	10,0000
5	X23	50,0000	0	0
6	X25	200,0000	0	0
7	X34	50,0000	0	0
8	X46	70,0000	1,0000	70,0000
9	X52	0	0	0
10	X56	500,0000	1,0000	500,0000
11	X64	510,0000	0	0
	Objective Function	(Max.) =	580,0000	

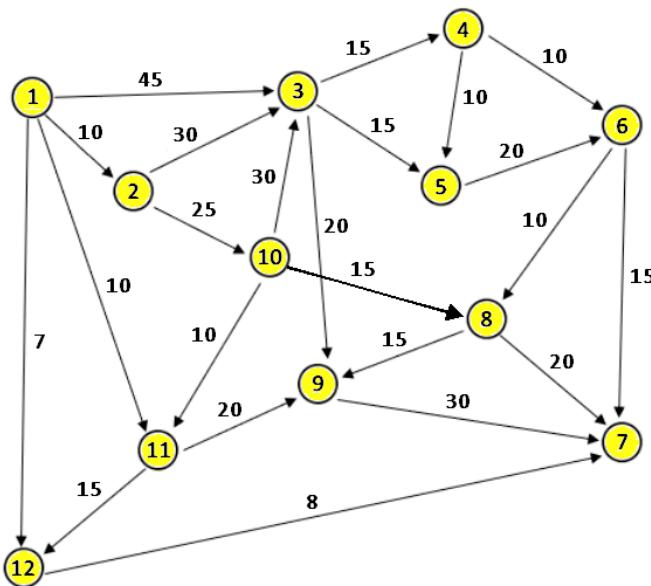


FLUJO MÁXIMO: La empresa INTEREUROPA estima el beneficio máximo en función del número máximo de trayectos en tren que pueden ofertar entre Madrid (1) y Berlín (7). En las aristas del grafo se muestra el número de trayectos disponibles entre una ciudad y otra durante la primera quincena de junio.

Se simplifican los trayectos en el grafo que se adjunta.



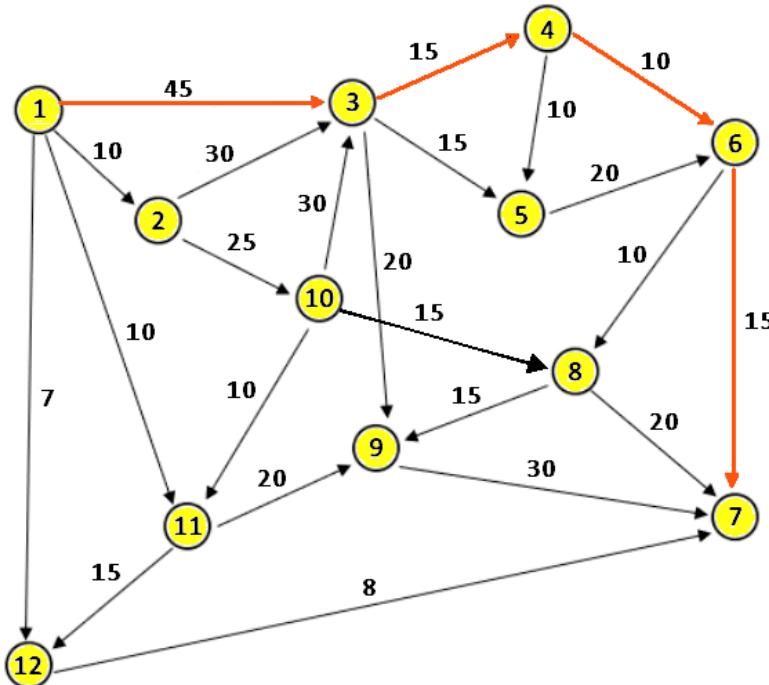
- 1 - Madrid
- 2 - Barcelona
- 3 - París
- 4 - Londres
- 5 - Bruselas
- 6 - Amsterdam
- 7 - Berlín
- 8 - Colonia
- 9 - Frankfurt
- 10 - Lyon
- 11 - Milán
- 12 - Roma



Solución:

Para determinar el flujo máximo de la red se aplica el algoritmo de Ford-Fulkerson, ya que todos las aristas tienen valor positivo. El flujo máximo que puede pasar desde Madrid a Berlín será la suma de las capacidades $\sum k$.

$G = (V, E)$ donde cada arco (i, j) perteneciente a E el número de arcos del grafo; tiene una capacidad no negativa. Se distinguen dos nodos: La fuente o nodo (Madrid) y el sumidero o nodo (Berlín).


1 ITERACIÓN : Camino 1 - 3 - 4 - 6 - 7 (Madrid - París - Londres - Amsterdam - Berlín)


$k_1 = \min(45, 15, 10, 15) = 10$

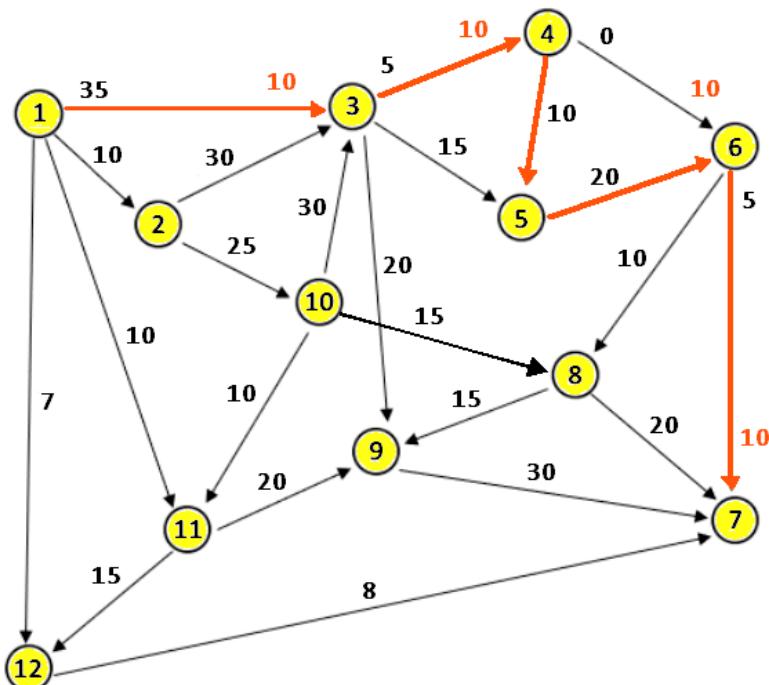
$C_{13,31} = (45 - 10, 0 + 10) = (35, 10)$

$C_{34,43} = (15 - 10, 0 + 10) = (5, 10)$

$C_{46,64} = (10 - 10, 0 + 10) = (0, 10)$

$C_{67,76} = (15 - 10, 0 + 10) = (5, 10)$

$\text{Flujo máximo} = 0 + 10 = 10$

2 ITERACIÓN : Camino: 1 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7 (Madrid - París - Londres - Bruselas - Amsterdam - Berlín)


$k_2 = \min(35, 5, 10, 20, 5) = 5$

$C_{13,31} = (35 - 5, 10 + 5) = (30, 15)$

$C_{34,43} = (5 - 5, 10 + 5) = (0, 15)$

$C_{45,54} = (10 - 5, 0 + 5) = (5, 5)$

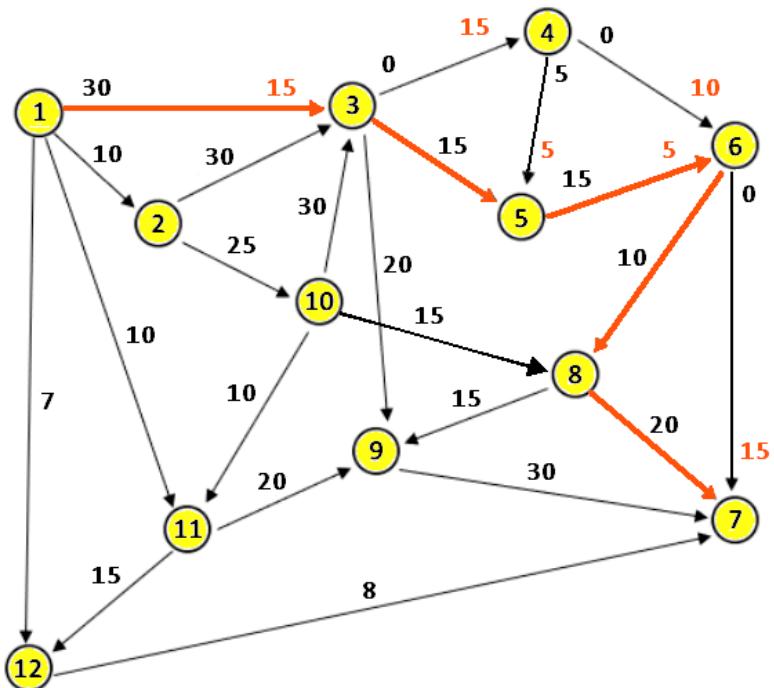
$C_{56,65} = (20 - 5, 0 + 5) = (15, 5)$

$C_{67,76} = (5 - 5, 10 + 5) = (0, 15)$

$\text{Flujo máximo} = 10 + 5 = 15$



3 ITERACIÓN : Camino: 1 - 3 - 5 - 6 - 8 - 7 (Madrid - París - Bruselas - Amsterdam - Colonia - Berlín)



$$k_3 = \min(30, 15, 15, 10, 20) = 10$$

$$C_{13,31} = (30 - 10, 15 + 10) = (20, 25)$$

$$C_{35,53} = (15 - 10, 0 + 10) = (5, 10)$$

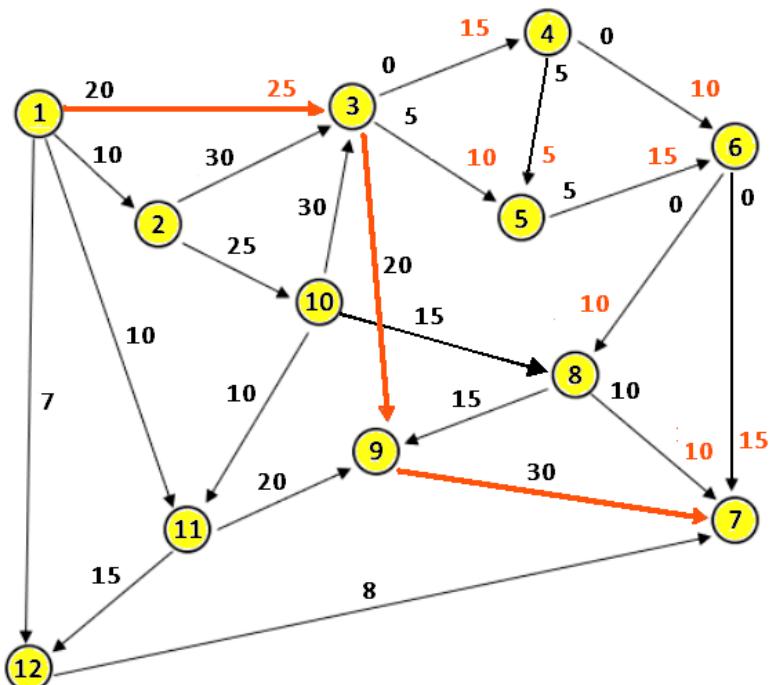
$$C_{56,65} = (15 - 10, 5 + 10) = (5, 15)$$

$$C_{68,86} = (10 - 10, 0 + 10) = (0, 10)$$

$$C_{87,78} = (20 - 10, 0 + 10) = (10, 10)$$

$$\text{Flujo máximo} = 15 + 10 = 25$$

4 ITERACIÓN : Camino: 1 - 3 - 9 - 7 (Madrid - París - Frankfurt - Berlín)



$$k_4 = \min(20, 20, 30) = 20$$

$$C_{13,31} = (20 - 20, 25 + 20) = (0, 45)$$

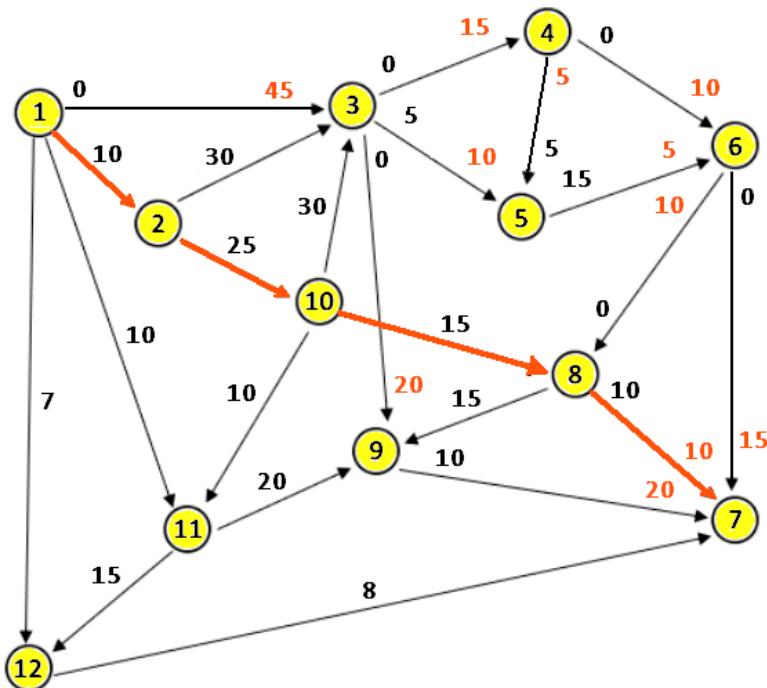
$$C_{39,93} = (20 - 20, 0 + 20) = (0, 20)$$

$$C_{97,79} = (30 - 20, 0 + 20) = (10, 20)$$

$$\text{Flujo máximo} = 25 + 20 = 45$$



5 ITERACIÓN : Camino: 1 - 2 - 10 - 8 - 7 (Madrid - Barcelona - Lyon - Colonia - Berlín)



$$k_5 = \min(10, 25, 15, 10) = 10$$

$$C_{12,21} = (10 - 10, 0 + 10) = (0, 10)$$

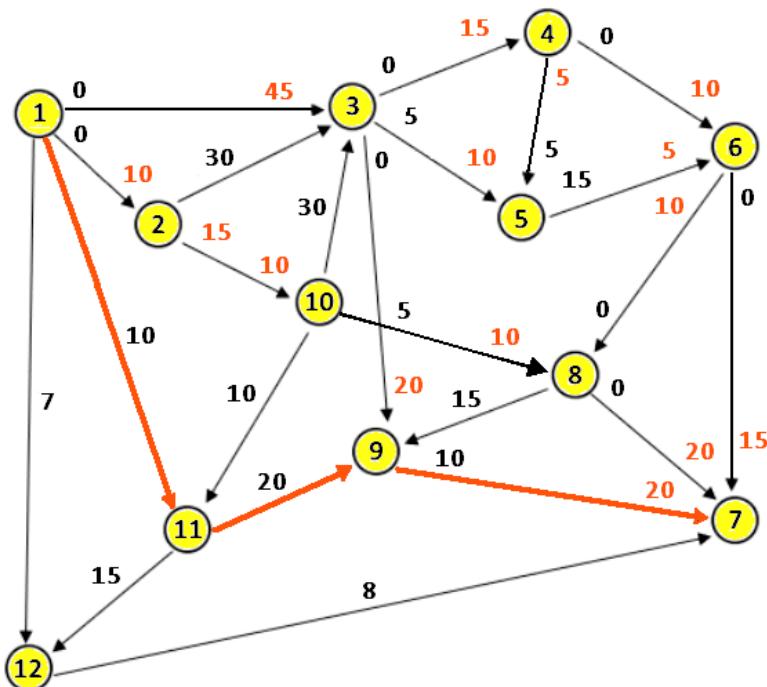
$$C_{2-10,10-2} = (25 - 10, 0 + 10) = (15, 10)$$

$$C_{10-8,8-10} = (15 - 10, 0 + 10) = (5, 10)$$

$$C_{87,78} = (10 - 10, 10 + 10) = (0, 20)$$

$$\text{Flujo máximo} = 45 + 10 = 55$$

6 ITERACIÓN : Camino: 1 - 11 - 9 - 7 (Madrid - Milán - Frankfurt - Berlín)



$$k_6 = \min(10, 20, 10) = 10$$

$$C_{1-11,11-1} = (10 - 10, 0 + 10) = (0, 10)$$

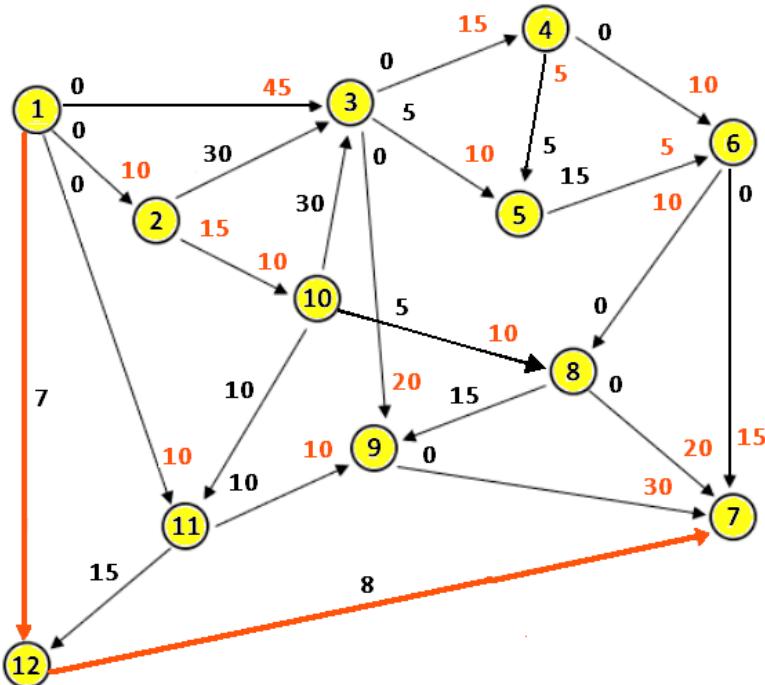
$$C_{11-9,9-11} = (20 - 10, 0 + 10) = (10, 10)$$

$$C_{97,79} = (10 - 10, 20 + 10) = (0, 30)$$

$$\text{Flujo máximo} = 55 + 10 = 65$$



7 ITERACIÓN : Camino: 1 - 12 - 7 (Madrid - Roma - Berlín)



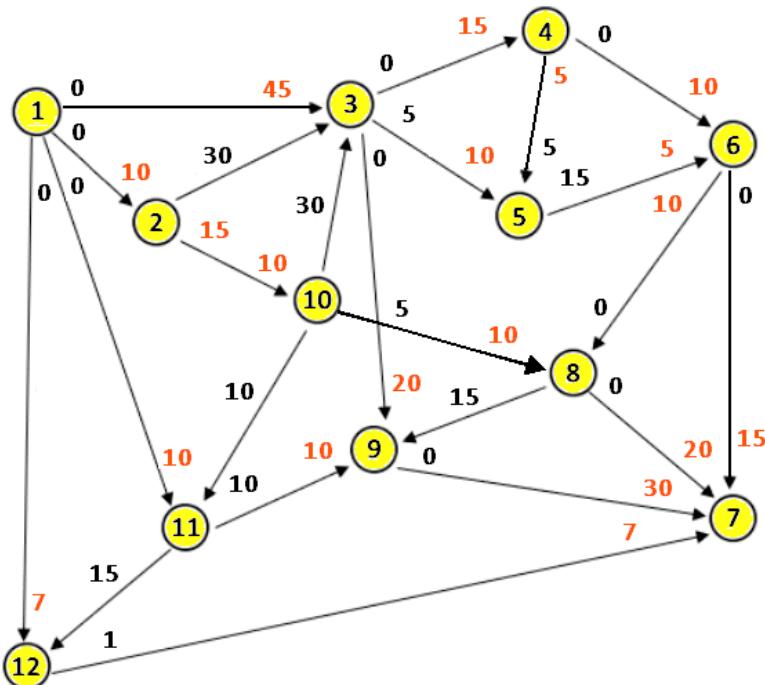
$$k_7 = \min(7, 8) = 7$$

$$C_{1-12, 12-1} = (7 - 7, 0 + 7) = (0, 7)$$

$$C_{12-7, 7-12} = (8 - 7, 0 + 7) = (1, 7)$$

$$\text{Flujo máximo} = 65 + 7 = 72$$

Finalmente, el Flujo máximo:



El algoritmo ha finalizado, desde Madrid (1) todos los trenes salen con capacidad cero, no se pueden econcontrar otros caminos que puedan modificar el flujo máximo obtenido.

El flujo máximo es el sumatorio de las capacidades mínimas de las iteraciones

$$\text{realizadas: Flujo Máximo} = \sum_{i=1}^7 k_i = 72$$


Max.
Cx
 $\Delta X = b$

FLUJO MÁXIMO: PROGRAMACIÓN LINEAL

NET Problem Specification

Problem Type	Objective Criterion
<input type="radio"/> Network Flow <input type="radio"/> Transportation Problem <input type="radio"/> Assignment Problem <input type="radio"/> Shortest Path Problem <input checked="" type="radio"/> Maximal Flow Problem <input type="radio"/> Minimal Spanning Tree <input type="radio"/> Traveling Salesman Problem	<input type="radio"/> Minimization <input checked="" type="radio"/> Maximization
Data Entry Format	
<input checked="" type="radio"/> Spreadsheet Matrix Form <input type="radio"/> Graphic Model Form <input type="checkbox"/> Symmetric Arc Coefficients <small>(i.e., both ways same cost)</small>	
Problem Title INTEREUROPA	
Number of Nodes 12	
OK	Cancel
Help	

Network Modeling

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

Toolbar icons: File, Edit, Format, Solve and Analyze, Results, Utilities, Window, WinQSB, Help.

Maximal Flow Problem INTEREUROPA

From \ To	(1) Madrid	(2) Barcelona	(3) París	(4) Londres	(5) Bruselas	(6) Amsterdam	(7) Berlín	(8) Colonia	(9) Frankfurt	(10) Lyon	(11) Milán	(12) Roma
(1) Madrid		10	45								10	7
(2) Barcelona			30								25	
(3) París				15	15						20	
(4) Londres					10	10						
(5) Bruselas						20						
(6) Amsterdam							15	10				
(7) Berlín								20				
(8) Colonia								15	10			
(9) Frankfurt									30			
(10) Lyon										15		10
(11) Milán										20		
(12) Roma											8	15

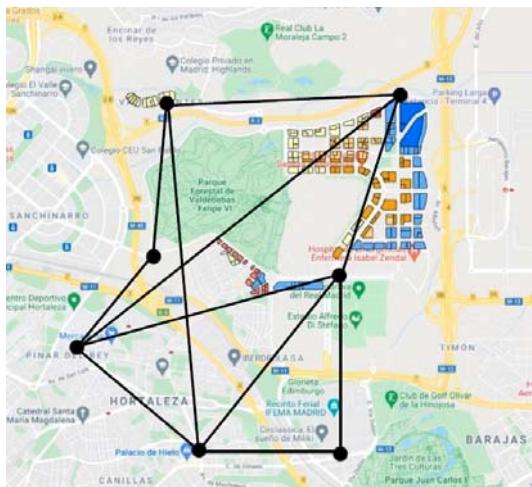
Network Modeling

File Format Results Utilities Window Help

Toolbar icons: File, Format, Results, Utilities, Window, Help.

Solution for Maximal Flow Problem INTEREUROPA

	From	To	Net Flow		From	To	Net Flow
1	(1) Madrid	(2) Barcelona	10	10	(5) Bruselas	(6) Amsterdam	15
2	(1) Madrid	(3) París	45	11	(6) Amsterdam	(7) Berlín	15
3	(1) Madrid	(11) Milán	10	12	(6) Amsterdam	(8) Colonia	10
4	(1) Madrid	(12) Roma	7	13	(8) Colonia	(7) Berlín	20
5	(2) Barcelona	(10) Lyon	10	14	(9) Frankfurt	(7) Berlín	29
6	(3) París	(4) Londres	10	15	(10) Lyon	(8) Colonia	10
7	(3) París	(5) Bruselas	15	16	(11) Milán	(9) Frankfurt	9
8	(3) París	(9) Frankfurt	20	17	(11) Milán	(12) Roma	1
9	(4) Londres	(6) Amsterdam	10	18	(12) Roma	(7) Berlín	8
Total	Net Flow	From	(1) Madrid	To	(7) Berlín	=	72

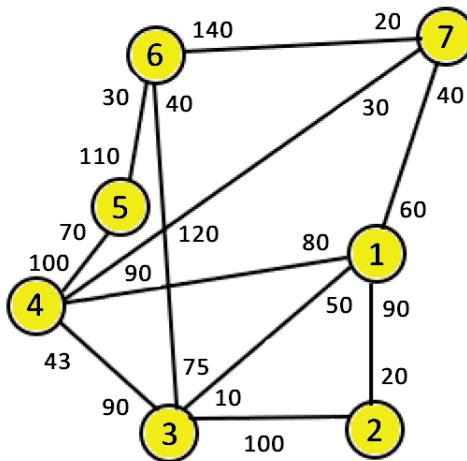


PROYECTO METRO VALDEBEBAS: Se trata de una zona de nueva construcción, por lo que los medios de transporte se encuentran en proceso de crecimiento. Este es un tema frecuente entre las quejas que podrían asociarse a este lugar. Por ello, se ha elaborado un imaginario mapa de metro, que conectaría la zona urbana con otros barrios de alrededor como Pinar del Rey y Valdeltasfuentes. Se aprovecha la estación del Cercanías ya existente en Valdebebas, así como otros puntos de la nueva línea en el IFEMA (Palacio de Hielo y el Parque Forestal).

La afluencia de personas que puede soportar cada transbordo se determina en función del tamaño de las estaciones, la demanda del servicio y las conexiones con otros medios de transporte.

Para presentar el proyecto, el Ayuntamiento de Madrid exige calcular el flujo máximo que soportaría la red.

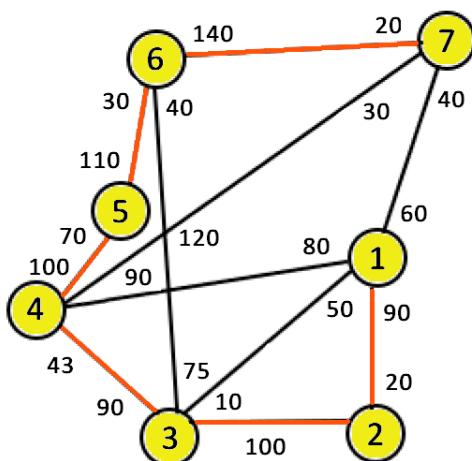
1. Cercanías. (s, inicio).
2. IFEMA.
3. Palacio de Hielo.
4. Pinar del Rey.
5. Parque Forestal de Valdebebas.
6. Valdeltasfuentes.
7. Urbanismo de Valdebebas. (t, final).



Solución:

Se obtiene el Flujo Máximo con el algoritmo de Ford-Fulkerson

Camino: 1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7

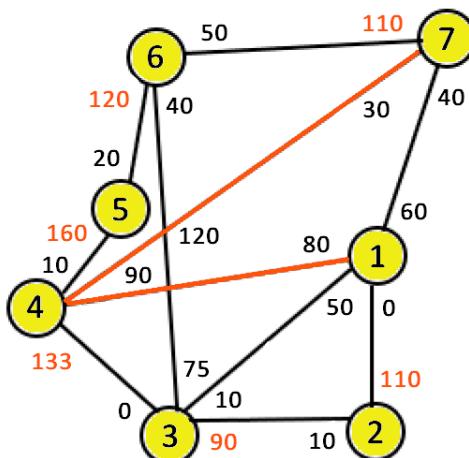


$$\begin{aligned}
 k_1 &= \min(90, 100, 90, 100, 110, 140) = 90 \\
 C_{67,76} &= (140 - 90, 20 + 90) = (50, 110) \\
 C_{56,65} &= (110 - 90, 30 + 90) = (20, 120) \\
 C_{45,54} &= (100 - 90, 70 + 90) = (10, 160) \\
 C_{34,43} &= (90 - 90, 43 + 90) = (0, 133) \\
 C_{23,32} &= (100 - 90, 0 + 90) = (10, 90) \\
 C_{12,21} &= (90 - 90, 20 + 90) = (0, 110)
 \end{aligned}$$

→ Red actualizada



Camino: 1 - 4 - 7



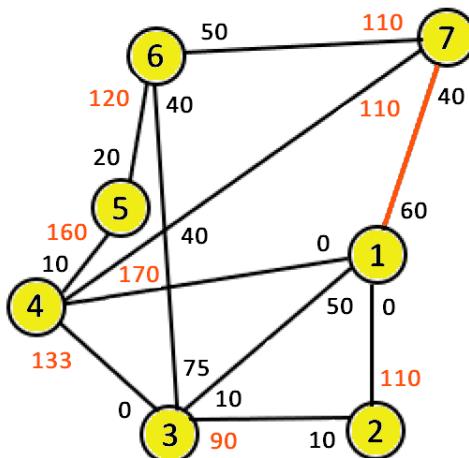
$$k_2 = \min(80, 120) = 80$$

$$C_{47,74} = (120 - 80, 30 + 80) = (40, 110)$$

$$C_{14,41} = (80 - 80, 90 + 80) = (0, 170)$$

→ Red actualizada

Camino: 1 - 7

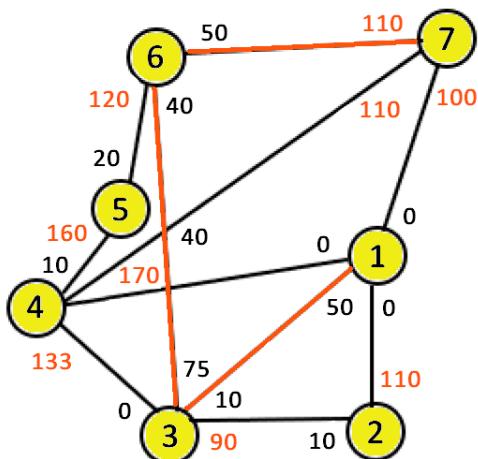


$$k_3 = \min(60) = 60$$

$$C_{17,71} = (60 - 60, 40 + 60) = (0, 100)$$

→ Red actualizada

Camino: 1 - 3 - 6 - 7



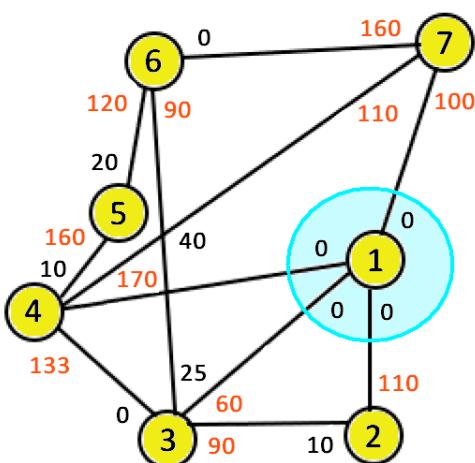
$$k_4 = \min(50, 75, 50) = 50$$

$$C_{67,76} = (50 - 50, 110 + 50) = (0, 160)$$

$$C_{36,63} = (75 - 50, 40 + 50) = (25, 90)$$

$$C_{13,31} = (50 - 50, 10 + 50) = (0, 60)$$

→ Red actualizada



El algoritmo ha finalizado porque todas las aristas que conectan con el nodo de origen (1) se encuentran a 0.

El Flujo Máximo es el sumatorio de los flujos máximos obtenidos en los distintos caminos:

$$\text{Flujo Máximo} = \sum_{i=1}^4 k_i = 280$$



FLUJO MÁXIMO: WinQSB / Network Modeling - Maximal Flow Problem

NET Problem Specification

Problem Type	Objective Criterion	
<input type="radio"/> Network Flow <input type="radio"/> Transportation Problem <input type="radio"/> Assignment Problem <input type="radio"/> Shortest Path Problem <input checked="" type="radio"/> Maximal Flow Problem <input type="radio"/> Minimal Spanning Tree <input type="radio"/> Traveling Salesman Problem	<input type="radio"/> Minimization <input checked="" type="radio"/> Maximization	
Data Entry Format		
<input checked="" type="radio"/> Spreadsheet Matrix Form <input type="radio"/> Graphic Model Form <input type="checkbox"/> Symmetric Arc Coefficients <small>(i.e., both ways same cost)</small>		
Problem Title	VALDEBEBAS	
Number of Nodes	7	
OK	Cancel	Help

Network Modeling

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

Maximal Flow Problem VALDEBEBAS

From \ To	IFEMA	P.Hielo	Pinar Rey	P. Forestal	Valdelasfuentes	U. Valdebebas
Cercanías	90	50	80			60
IFEMA		100				
P.Hielo			90		75	
Pinar Rey				100		120
P. Forestal					110	
Valdelasfuentes						140
U. Valdebebas						



Network Modeling							
File Format Results Utilities Window Help							
5. Solution for Maximal Flow Problem VALDEBEBAS							
	From	To	Net Flow		From	To	Net Flow
1	Cercanías	IFEMA	90	7	P.Hielo	Valdelasfuentes	75
2	Cercanías	P.Hielo	50	8	Pinar Rey	P. Forestal	25
3	Cercanías	Pinar Rey	80	9	Pinar Rey	U. Valdebebas	120
4	Cercanías	U. Valdebebas	60	10	P. Forestal	Valdelasfuentes	25
5	IFEMA	P.Hielo	90	11	Valdelasfuentes	U. Valdebebas	100
6	P.Hielo	Pinar Rey	65				
Total	Net Flow	From	Cercanías	To	U. Valdebebas	=	280



Una compañía aérea experimenta retrasos en su flota de largo radio y desea determinar si estos se producen por aglomeraciones de pasajeros al acceder a la aeronave.

Para ello se pide analizar el embarque de un vuelo, que se realiza por dos puertas H y Q.

Los aviones A330 de la compañía cuentan con tres puertas de acceso para la conexión de pasarelas, una delantera (F), una central (C) y una trasera (T).

Se deben considerar las condiciones:

- La puerta de embarque H permite el acceso a las pasarelas F y C.
- La puerta de embarque Q permite el acceso a las pasarelas C y T.
- Desde la pasarela F es recomendable que accedan los pasajeros de las clases P y R.
- Desde la pasarela C accede cualquier pasajero.
- Desde la pasarela T es recomendable que accedan los pasajeros de las clases R y E.
- Algunos pasajeros de la clase R pasan antes por la E.

La autoridad aeroportuaria establece que la capacidad máxima admisible de las puertas es:

- 140 pasajeros para la puerta H
- 180 pasajeros para la puerta Q

Para el vuelo analizado, los pasajeros embarcados son los siguientes:

- 50 Pasajeros de la clase P
- 70 Pasajeros de la clase R
- 180 Pasajeros de la clase E

Matriz de tiempo promedio de espera por pasajero (en minutos) por tramo del embarque:

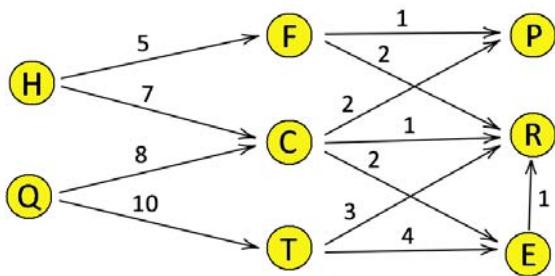
	H	Q	F	C	T	P	R	E
H	0		5	7				
Q		0		8	10			
F	5		0			1	2	
C	7	8		0		2	1	2
T		10			0		3	4
P			1	2		0		
R			2	1	3		0	1
E				2	4		1	0

Calcular el tiempo mínimo de embarque por pasajero desde que accede por la puerta hasta que se sienta y las distribuciones de pasajeros óptimas en los accesos a la aeronave.

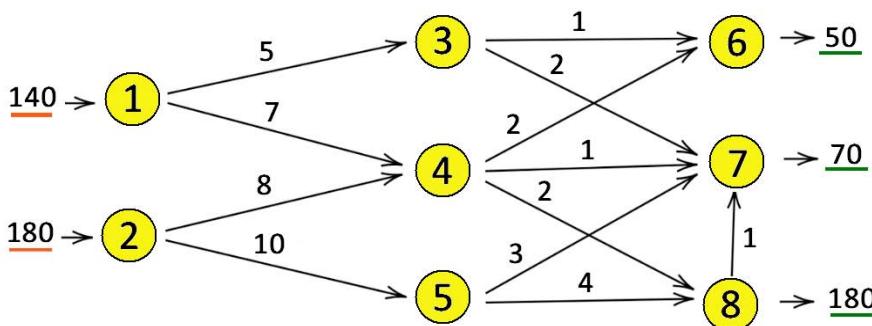
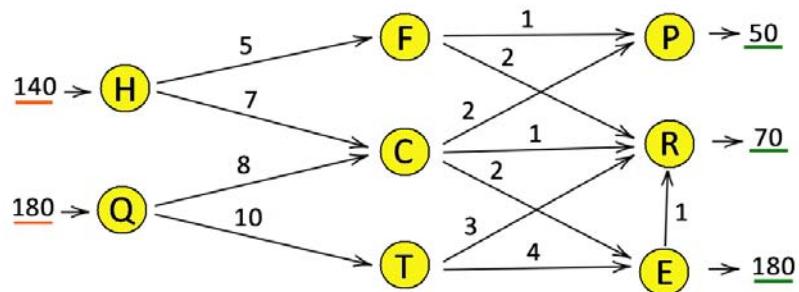
Solución:



Planteamiento gráfico:



Reflejo de costes:



PROGRAMACIÓN LINEAL

Los números asignados a cada uno de los arcos representan el tiempo promedio de espera (minutos).

$x_{ij} \equiv$ Tiempo promedio de espera
de la pasarela i a la pasarela j

FUNCIÓN OBJETIVO: Resolución del tiempo mínimo de embarque.

$$\text{Minimizar } z = 5x_{13} + 7x_{14} + 8x_{24} + 10x_{25} + 1x_{36} + 2x_{37} + 2x_{46} + 1x_{47} + 2x_{48} + 3x_{57} + 4x_{58} + 1x_{87}$$

- Restricciones:

Oferta: $\begin{cases} x_{13} + x_{14} \leq 140 \\ x_{24} + x_{25} \leq 180 \end{cases}$

Demanda: $\begin{cases} x_{37} + x_{47} + x_{57} + x_{87} = 70 \\ x_{36} + x_{46} = 50 \end{cases}$

Balanceo para nodos únicamente transitorios: $\begin{cases} x_{13} - x_{36} - x_{37} = 0 \\ x_{14} + x_{24} - x_{46} - x_{47} - x_{48} = 0 \\ x_{25} - x_{57} - x_{58} = 0 \end{cases}$

Balanceo para nodos transitorios con requerimientos: $x_{58} + x_{57} - x_{87} = 180$

- No Negatividad e Integralidad: Las variables de decisión tienen la condición de no negatividad ($x_{ij} \geq 0$), adicionalmente se exige que éstas adopten valores enteros. Si se omite esta condición podría dar un problema de Programación Lineal.


Max.
CX
AX=b
TIEMPO MÍNIMO EMBARQUE: PROGRAMACIÓN LINEAL

LP-ILP Problem Specification

Problem Title: TIEMPO EMBARQUE

Number of Variables: 12 Number of Constraints: 8

Objective Criterion

- Maximization
- Minimization

Data Entry Format

- Spreadsheet Matrix Form
- Normal Model Form

Default Variable Type

- Nonnegative continuous
- Nonnegative integer
- Binary (0,1)
- Unsigned/unrestricted

OK Cancel Help

LP-ILP Problem Specification

Problem Title: TIEMPO EMBARQUE

Number of Variables: 12 Number of Constraints: 8

Objective Criterion

- Maximization
- Minimization

Data Entry Format

- Spreadsheet Matrix Form
- Normal Model Form

Default Variable Type

- Nonnegative continuous
- Nonnegative integer
- Binary (0,1)
- Unsigned/unrestricted

OK Cancel Help

Linear and Integer Programming

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

Binary

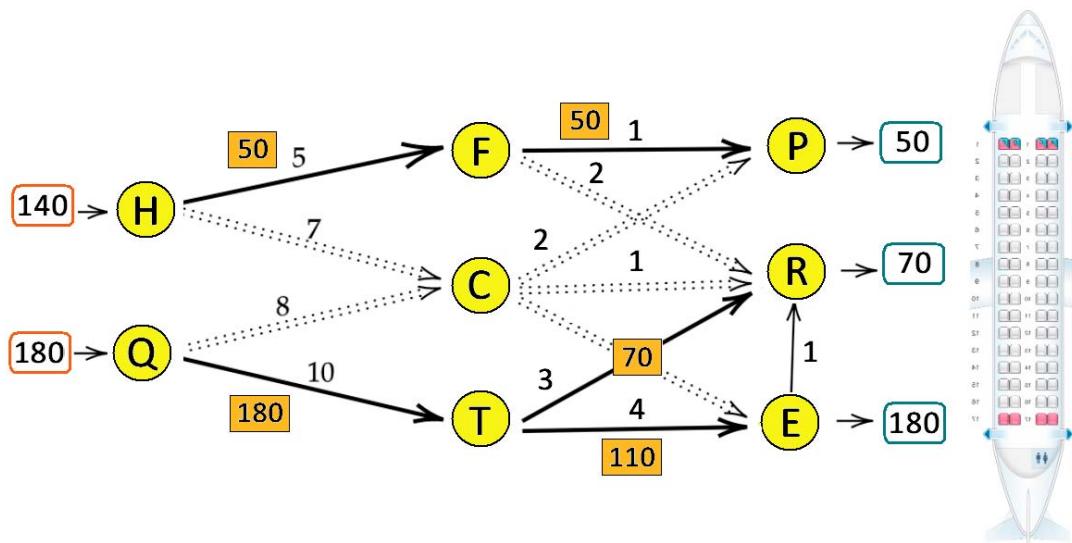
	OBJ/Constraint/VariableType/Bound
Minimize	$5X24+7X14+8X24+10X25+1X36+2X37+2X46+1X47+2X48+3X57+4X58+1X87$
C1	$X13 +X14 \leq 140$
C2	$X24+X25 \leq 180$
C3	$X37+X47 +X57 +X87 = 70$
C4	$X36 +X46 = 50$
C5	$X13 -X36 -X37 = 0$
C6	$X14 +X24 -X46 -X47 -X48 = 0$
C7	$X25 -X57 -X58 = 0$
C8	$X58 +X57 - X87 = 180$
Integer:	
Binary:	
Unrestricted:	
X13	$\geq 0, \leq M$
X14	$\geq 0, \leq M$
X24	$\geq 0, \leq M$
X25	$\geq 0, \leq M$
X36	$\geq 0, \leq M$
X37	$\geq 0, \leq M$
X46	$\geq 0, \leq M$
X47	$\geq 0, \leq M$
X48	$\geq 0, \leq M$
X57	$\geq 0, \leq M$
X58	$\geq 0, \leq M$
X87	$\geq 0, \leq M$



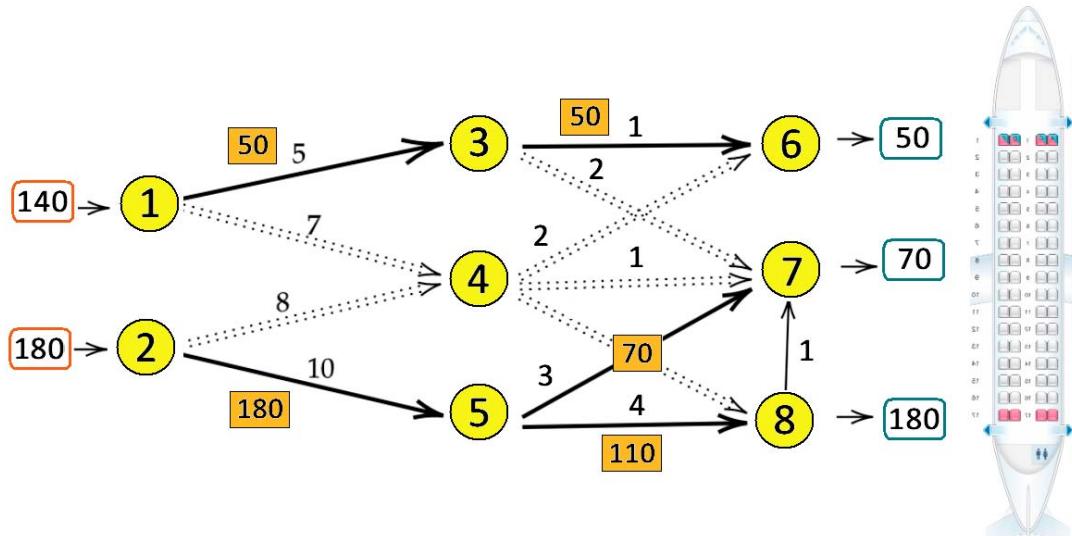
TIEMPO EMBARQUE														
Variable ->	X13	X14	X24	X25	X36	X37	X46	X47	X48	X57	X58	X87	Direction	R. H. S.
Minimize		7	13	10	1	2	2	1	2	3	4	1		
C1	1	1											\leq	140
C2			1	1									\leq	180
C3						1		1			1		=	70
C4					1		1						=	50
C5	1				-1	-1							=	0
C6		1	1				-1	-1	-1				=	0
C7				1						-1	-1		=	0
C8										1	1	-1	=	180
LowerBound	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
UpperBound	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M		
VariableType	Integer													

Combined Report for TIEMPO EMBARQUE								
	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(i)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(i)	Allowable Max. c(i)
1	X13	50	0	0	0	basic	-3	8
2	X14	0	7	0	0	basic	-1	13
3	X24	0	13	0	6	at bound	7	M
4	X25	180	10	1800	0	basic	-6	M
5	X36	50	1	50	0	basic	-M	9
6	X37	0	2	0	3	at bound	-1	M
7	X46	0	2	0	8	at bound	-6	M
8	X47	0	1	0	9	at bound	-8	M
9	X48	0	2	0	9	at bound	-7	M
10	X57	70	3	210	0	basic	-M	6
11	X58	110	4	440	0	basic	1	M
12	X87	0	1	0	16	at bound	-15	M
	Objective Function	(Min.) =	2500					
	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
1	C1	50	\leq	140	90	0	50	M
2	C2	180	\leq	180	0	0	180	M
3	C3	70	=	70	0	-1	0	180
4	C4	50	=	50	0	1	0	140
5	C5	0	=	0	0	0	-50	90
6	C6	0	=	0	0	7	0	90
7	C7	0	=	0	0	10	-180	0
8	C8	180	=	180	0	14	70	180

- a) El tiempo óptimo de minimización en el embarque es de 2500 minutos para el total de pasajeros. Este será el tiempo mínimo alcanzable por la compañía.



b) Si el total de pasajeros es de $P + R + E = 50 + 70 + 110 = 230$, el tiempo de embarque por pasajero será de $2500 / 230 = 10,87$ minutos por pasajero. Entendiendo por tiempo de embarque, desde que el pasajero cruza la puerta hasta que se sienta en su plaza asignada.



c) Los pasajeros de las plazas delanteras tendrán preferencia puesto que trazando el camino asignado $X_{13} - X_{36}$ demoran un tiempo de embarque de 6 minutos.

d) La distribución óptima que minimiza el tiempo de embarque será la siguiente:

Por la puerta H deben embarcar únicamente los 50 pasajeros de la clase P que accederán a la aeronave mediante la pasarela delantera F (3).

Por la puerta Q embarcarán los 180 pasajeros de las clases R y E. Además, solo se habilitará la pasarela trasera T(5).

Una vez dentro del avión, accederán primero los 70 pasajeros de la clase R por el pasillo T, R y después, los 110 pasajeros de la clase E.

Los datos esbozan que posiblemente, el acceso por la pasarela central sea el que más problemas ocasiona ya que al tener conexión con todas las clases genera un mayor porcentaje de aglomeraciones hasta que cada pasajero ocupe su asiento.



La aerolínea deberá equilibrar mejor las entradas, suprimiendo la premisa de que por la pasarela C(4) puedan acceder pasajeros de todas las clases.



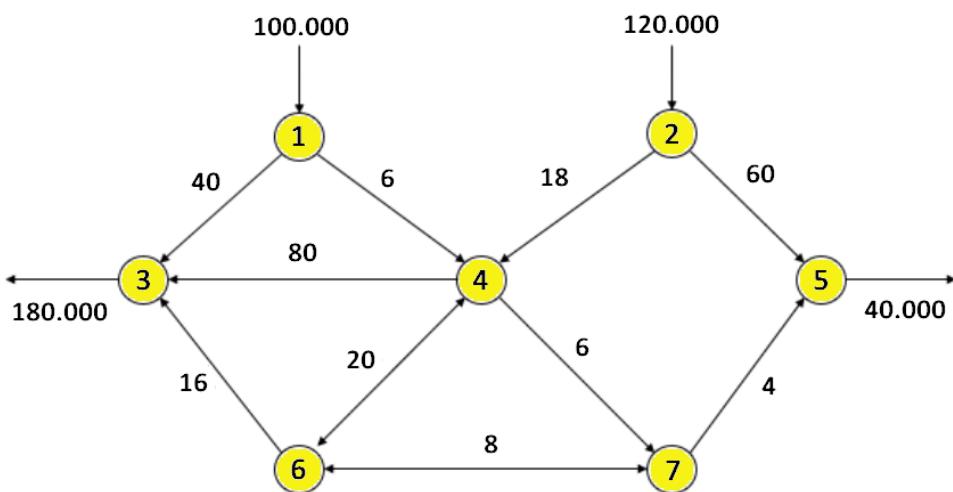
TRANSBORDO



Una compañía se encarga de la producción de un artículo en dos departamentos distintos (Departamento 1 y Departamento 2).

Cada departamento puede enviar lo que produce a tres centros de logística que están repartidos a lo largo de todo el país (Centro 3, Centro 4 y Centro 5).

Éstos, a su vez, pueden enviar muestra de sus productos a dos de sus representantes (Representante 6 y Representante 7) para que los prueben y, los cuales, remitirán los productos a los centros de logística para vender los productos, de manera que quedan representados en el siguiente grafo:



El Departamento 1 tiene capacidad para producir 100.000 unidades de producto, mientras que el Departamento 2 tiene capacidad para producir 120.000. Se pide plantear el modelo de Programación Lineal para calcular el tiempo mínimo total de producción y calcular su coste mediante WinQSB.

Solución:

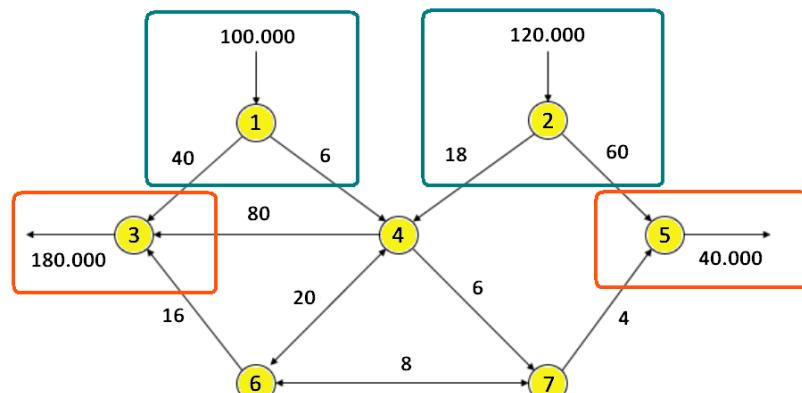
FUNCIÓN OBJETIVO: Resolución del tiempo mínimo total de producción y coste.

$$z = 40x_{13} + 6x_{14} + 80x_{43} + 20x_{46} + 20x_{64} + 16x_{63} + 8x_{67} + 8x_{76} + 6x_{47} + 4x_{75} + 18x_{24} + 60x_{25}$$

- Restricciones:

Oferta: $\begin{cases} x_{13} + x_{14} = 100.000 \\ x_{24} + x_{25} = 120.000 \end{cases}$

Demanda: $\begin{cases} x_{13} + x_{43} + x_{63} = 180.000 \\ x_{25} + x_{75} = 40.000 \end{cases}$



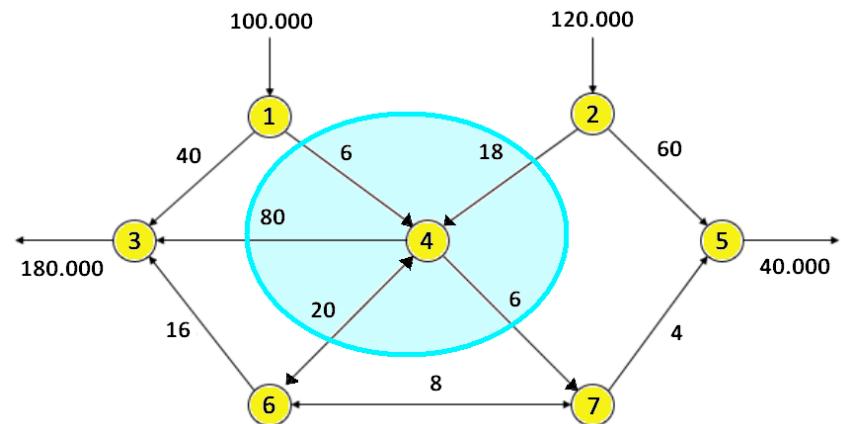


Restricciones de balanceo para nodos transitorios con requerimientos: Consolidan que todas las unidades que llegan (oferta) sean iguales a la suma de todas las unidades que salen más los requerimientos del nodo (demanda). Nodos intermedios (4, 6 y 7)

Nodo 4:

$$x_{14} + x_{24} + x_{64} = x_{43} + x_{46} + x_{67} \rightarrow$$

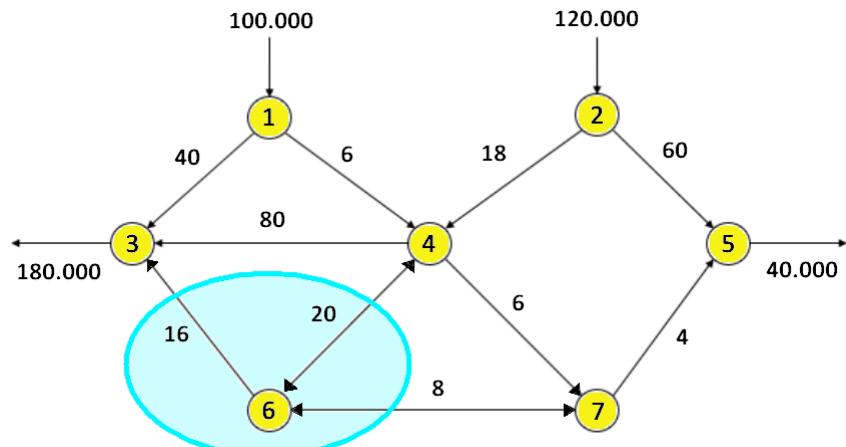
$$x_{14} + x_{24} + x_{64} - x_{43} - x_{46} - x_{67} = 0$$



Nodo 6:

$$x_{46} + x_{76} = x_{64} + x_{67} + x_{63} \rightarrow$$

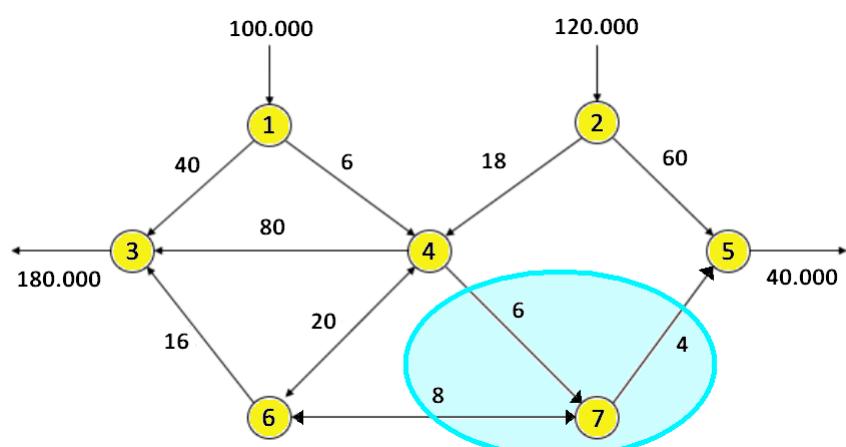
$$x_{46} + x_{76} - x_{64} - x_{67} - x_{63} = 0$$



Nodo 7:

$$x_{47} + x_{67} = x_{75} + x_{76} \rightarrow$$

$$x_{47} + x_{67} - x_{75} - x_{76} = 0$$




Max.
CX
AX=b
TIEMPO MÍNIMO PRODUCCIÓN: PROGRAMACIÓN LINEAL

LP-ILP Problem Specification

Problem Title: TIEMPO PRODUCCIÓN

Number of Variables: 12 Number of Constraints: 7

Objective Criterion

- Maximization
- Minimization

Data Entry Format

- Spreadsheet Matrix Form
- Normal Model Form

Default Variable Type

- Nonnegative continuous
- Nonnegative integer
- Binary (0,1)
- Unsigned/unrestricted

OK Cancel Help

LP-ILP Problem Specification

Problem Title: TIEMPO PRODUCCIÓN

Number of Variables: 12 Number of Constraints: 7

Objective Criterion

- Maximization
- Minimization

Data Entry Format

- Spreadsheet Matrix Form
- Normal Model Form

Default Variable Type

- Nonnegative continuous
- Nonnegative integer
- Binary (0,1)
- Unsigned/unrestricted

OK Cancel Help

Linear and Integer Programming

TIEMPO PRODUCCIÓN

Minimize	$40X_{13}+6X_{14}+80X_{43}+20X_{46}+20X_{64}+16X_{63}+8X_{67}+8X_{76}+6X_{47}+4X_{75}+18X_{24}+60X_{25}$
C1	$X_{13}+X_{14}=100000$
C2	$X_{24}+X_{25} = 120000$
C3	$X_{13}+X_{43}+X_{63} = 180000$
C4	$X_{25}+X_{75} = 40000$
C5	$X_{14}+X_{24}+X_{64}-X_{43}-X_{46}-X_{47} = 0$
C6	$X_{46}+X_{76}-X_{64}-X_{67}-X_{63} = 0$
C7	$X_{47} + X_{67} - X_{76} - X_{75} = 0$
Integer:	$X_{13}, X_{14}, X_{24}, X_{25}, X_{43}, X_{46}, X_{47}, X_{63}, X_{64}, X_{67}, X_{75}, X_{76}$
Binary:	
Unrestricted:	
X13	$>=0, <=M$
X14	$>=0, <=M$
X24	$>=0, <=M$
X25	$>=0, <=M$
X43	$>=0, <=M$
X46	$>=0, <=M$
X47	$>=0, <=M$
X63	$>=0, <=M$
X64	$>=0, <=M$
X67	$>=0, <=M$
X75	$>=0, <=M$
X76	$>=0, <=M$



Variable -->	X13	X14	X24	X25	X43	X46	X47	X63	X64	X67	X75	X76	Direction	R. H. S.
Minimize	40	6	18	60	80	20	6	16	20	8	4	8		
C1	1	1											=	100000
C2			1	1									=	120000
C3	1				1			1					=	180000
C4				1							1		=	40000
C5		1	1		-1	-1	-1		1				=	0
C6						1		-1	-1	-1		1	=	0
C7							1			1	-1	-1	=	0
LowerBound	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
UpperBound	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M		
VariableType	Integer													

	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c[i]	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c[i]	Allowable Max. c[i]
1	X13	0	40	0	4	at bound	36	M
2	X14	100000	6	600000	0	basic	-M	10
3	X24	120000	18	2160000	0	basic	6	50
4	X25	0	60	0	32	at bound	28	M
5	X43	0	80	0	50	at bound	30	M
6	X46	0	20	0	6	at bound	14	M
7	X47	220000	6	1320000	0	basic	-28	10
8	X63	180000	16	2880000	0	basic	-M	20
9	X64	0	20	0	34	at bound	-14	M
10	X67	0	8	0	16	at bound	-8	M
11	X75	40000	4	160000	0	basic	-M	36
12	X76	180000	8	1440000	0	basic	-8	12
	Objective Function	(Min.) =	8560000					
	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
1	C1	100000	=	100000	0	-12	100000	220000
2	C2	120000	=	120000	0	0	120000	M
3	C3	180000	=	180000	0	48	60000	180000
4	C4	40000	=	40000	0	28	0	40000
5	C5	0	=	0	0	18	-120000	0
6	C6	0	=	0	0	32	-120000	0
7	C7	0	=	0	0	24	-120000	0

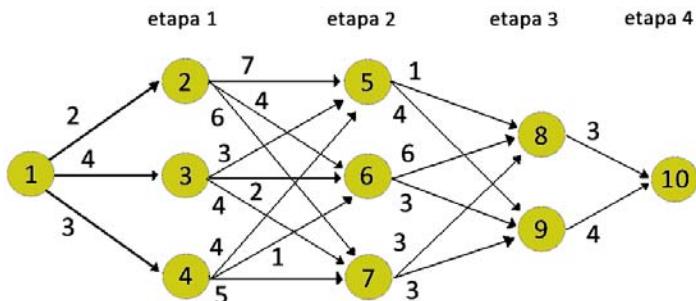
Coste mínimo de 8.560.000 unidades monetarias.





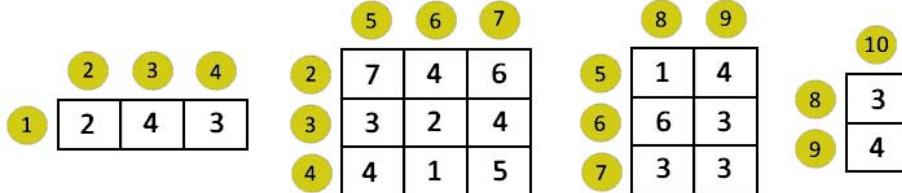
PROGRAMACIÓN DINÁMICA

En el grafo se representan las posibles rutas de ir de la Ciudad 1 hasta la Ciudad 10. Cada nodo representa a una Ciudad y los arcos el costo o distancia de ir e un nodo a otro. Se supone que los desplazamientos tienen la misma duración. Calcular la solución óptima.



Solución:

Gastos transición:

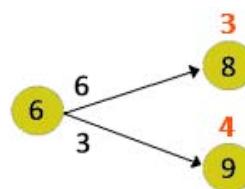


Los cálculos se realizan por etapas hacia atrás (de derecha a izquierda).

Cuando solo hay una etapa por recorrer ($n = 4$), la ruta de ahí en adelante esta perfectamente determinada por su estado actual (sea 8 o 9) y la ruta para esta última jornada es 10.

La solución es 3 o 4

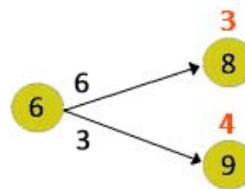
Cuando se tienen dos etapas por recorrer ($n = 3$) se procede de la siguiente manera: Suponiendo que se encuentra en el estado **6** se puede ir al estado **8** o al estado **9**, a un coste de 6 o 3.



Si se elige el estado **8** llegar ahí es 3, por tanto el coste de la decisión es $6+3=9$. Si se elige el estado **9** el coste total es $3 + 4 = 7$, que es menor. Se escoge el estado **9**: $f_3^*(6) = 7$

Se trabaja de forma similar con los otros dos estados posibles, cuando quedan dos jornadas por viajar, los resultados son: $f_3^*(5) = 4$ $f_3^*(6) = 7$ $f_3^*(7) = 6$

Cuando se tienen dos etapas por recorrer ($n = 3$) se procede de la siguiente manera: Suponiendo que se encuentra en el estado **6** se puede ir al estado **8** o al estado **9**, a un coste de 6 o 3.



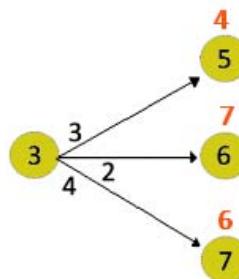
Si se elige el estado **8** llegar ahí es 3, por tanto el coste de la decisión es $6+3=9$. Si se elige el estado **9** el coste total es $3 + 4 = 7$, que es menor. Se escoge el estado **9**: $f_3^*(6) = 7$



Se trabaja de forma similar con los otros dos estados posibles, cuando quedan dos jornadas por viajar, los resultados son: $f_3^*(5) = 4$ $f_3^*(6) = 7$ $f_3^*(7) = 6$

La solución para el problema de tres etapas por recorrer ($n = 2$) se obtiene de forma parecida.

Si el agente se encuentra en el estado **[3]** deberá ir al estado **[5]**, **[6]** y **[7]** con un coste inmediato de 3, 2 y 4, respectivamente.



Se calcula el coste adicional mínimo hasta llegar a su destino:

$$f_2(3,5) = c_{3,5} + f_3^*(5) = 3 + 4 = 7$$

$$f_2(3,6) = c_{3,6} + f_3^*(6) = 2 + 7 = 9 \quad \min(7, 9, 10) = 7 \rightarrow f_2^*(3) = 7$$

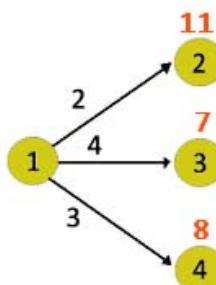
$$f_2(3,7) = c_{3,7} + f_3^*(7) = 4 + 6 = 10$$

Se procede de forma similar con los otros dos estados posibles, los resultados son:

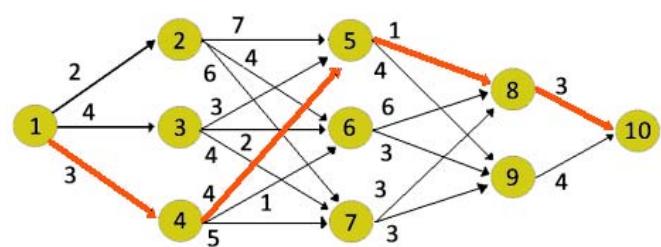
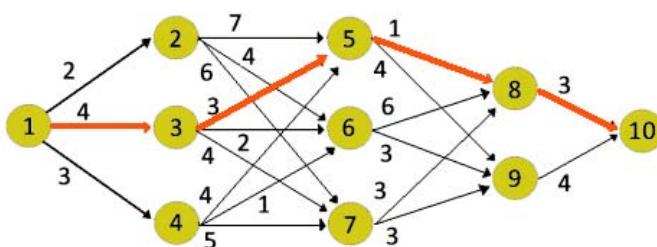
$$f_2^*(2) = 11 \quad f_2^*(3) = 7 \quad f_2^*(4) = 8$$

Finalmente, se obtienen los resultados:

$$\begin{cases} f_1(1,2) = c_{1,2} + f_2^*(2) = 2 + 11 = 13 \\ f_1(1,3) = c_{1,3} + f_2^*(3) = 4 + 7 = 11 \\ f_1(1,4) = c_{1,4} + f_2^*(4) = 3 + 8 = 11 \end{cases}$$



Hay dos caminos óptimos con un coste total de 11:





Dynamic Programming

DP Problem Specification

Problem Type
<input checked="" type="radio"/> Stagecoach (Shortest Route) Problem
<input type="radio"/> Knapsack Problem
<input type="radio"/> Production and Inventory Scheduling
Problem Title CIUDADES
Number of Nodes 10
OK Cancel Help

Winqsb incorpora tres modelos diferentes:

- Stagecoach Problem (Problema Diligencia)
- Knapsack Problem (Problema Mochila)
- Production and Inventory Scheduling
(programación de producción e inventario)

Dynamic Programming

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

0.00 A

From \ To	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		2	4	3						
2					7	4	6			
3					3	2	4			
4					4	1	5			
5			3	4				1	4	
6								6	3	
7								3	3	
8										3
9										4
10										

Select Start and End Nodes

Click to select a start node	Click to select an end node
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
1	10
Solve	Solve and Display Steps
Cancel	Help



Dynamic Programming

File Format Results Utilities Window Help

0.00 A When If

Solution for CIUDADES: Stagecoach-Shortest Route Problem

Stage	From Input State	To Output State	Distance	Cumulative Distance	Distance to 10
1	1	3	4	4	11
2	3	5	3	7	7
3	5	8	1	8	4
4	8	10	3	11	3
	From 1	To 10	Min. Distance	= 11	CPU = 0,00

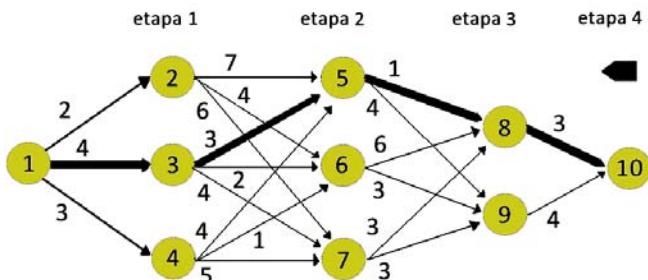
Dynamic Programming

File Format Results Utilities Window Help

0.00 A When If

Solution Steps for CIUDADES: Stagecoach-Shortest Route Problem

	Stage	From Input State	To Output State	Distance	Distance to 10	Status
1	1	1	3	4	11	Optimal
2	2	2	5	7	11	
3	2	3	5	3	7	Optimal
4	2	4	5	4	8	
5	3	5	8	1	4	Optimal
6	3	6	9	3	7	
7	3	7	8	3	6	
8	4	8	10	3	3	Optimal
9	4	9	10	4	4	
	From 1	To 10	Minimum	Distance =	11	CPU = 0,00



Para tomar decisiones en cada una de las etapas se comienza de izquierda a derecha (hacia atrás) en el análisis recursivo de cada una de las etapas, tomando el menor valor.

$$\text{Distancia mínima} = 4 + 3 + 1 + 3 = 11$$



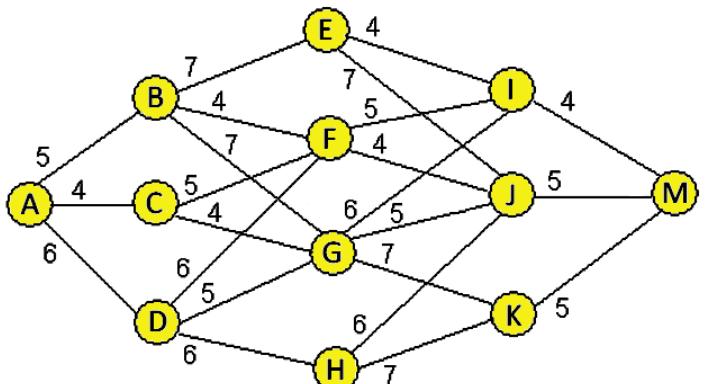
PÓLIZAS DE SEGURO: PROBLEMA DE LA DILIGENCIA

Se ofrecen pólizas de seguro de vida a los pasajeros.

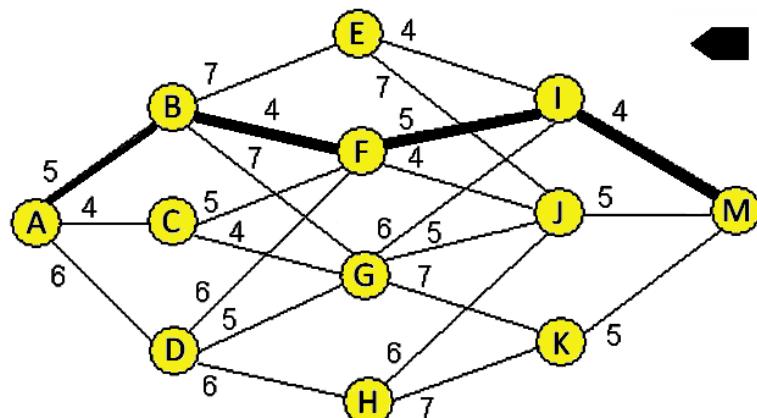
El costo de la póliza de cualquier jornada está basado en una evaluación de la seguridad del recorrido, la ruta más segura debe ser aquella cuya póliza de seguro tenga el menor costo total.

En cada arco, del estado i al estado j, se denota el costo de la póliza de viaje.

¿Cuál es la ruta que minimiza el costo total de A hasta M?



Solución:



El problema de tomar decisiones se resuelve en cada una de las etapas hacia atrás, eligiendo el menor valor.

$$\text{Coste mínimo} = 5 + 4 + 5 + 4 = 18$$



Dynamic Programming

DP Problem Specification

Problem Type
<input checked="" type="radio"/> Stagecoach (Shortest Route) Problem
<input type="radio"/> Knapsack Problem
<input type="radio"/> Production and Inventory Scheduling
Problem Title SEGURO
Number of Nodes 10
OK Cancel Help

- Stagecoach Problem (Problema Diligencia)



Dynamic Programming

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

0.00 A

SEGURO: Stagecoach-Shortest Route Problem

From \ To	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	M
A		5	4	6								
B					7	4	7					
C						5	4					
D						6	5	6				
E									4	7		
F									5	4		
G									6	5	7	
H									6	7		
I												4
J												5
K												5
M												

Select Start and End Nodes

Click to select a start node

A
B
C
D
E
F
G
H
I
J
K
M

Click to select an end node

A
B
C
D
E
F
G
H
I
J
K
M

A M

Solve Solve and Display Steps

Cancel Help

Dynamic Programming

File Format Results Utilities Window Help

0.00 A

Solution for SEGURO: Stagecoach-Shortest Route Problem

Stage	From Input State	To Output State	Distance	Cumulative Distance	Distance to M
1	A	B	5	5	18
2	B	F	4	9	13
3	F	I	5	14	9
4	I	M	4	18	4
	From A	To M	Min. Distance	= 18	CPU = 0,00



Dynamic Programming

File Format Results Utilities Window Help

0,00 A

Solution Steps for SEGURO: Stagecoach-Shortest Route Problem

	Stage	From Input State	To Output State	Distance	Distance to M	Status
1	1	A	B	5	18	Optimal
2	2	B	F	4	13	Optimal
3	2	C	F	5	14	
4	2	D	F	6	15	
5	3	E	I	4	8	
6	3	F	I	5	9	Optimal
7	3	G	I	6	10	
8	3	H	J	6	11	
9	4	I	M	4	4	Optimal
10	4	J	M	5	5	
11	4	K	M	5	5	
	From A	To M	Minimum	Distance =	18	CPU = 0,00



PROBLEMA DE LA MOCHILA: PROGRAMACIÓN DINÁMICA - PROGRAMACIÓN LINEAL



La carga de un avión se distribuye con el propósito de maximizar el ingreso total. Se consideran 5 elementos y solo se necesita uno de cada uno. La compañía gana 4.000 euros por elemento más una bonificación por elemento.

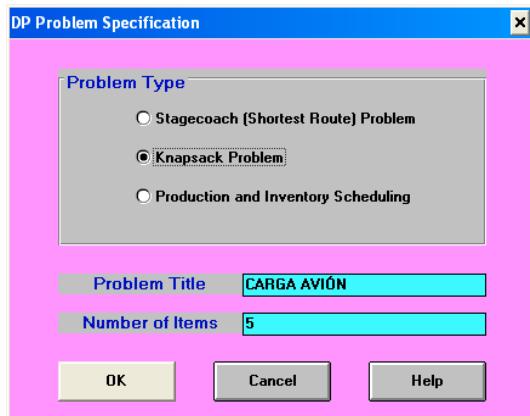
El avión puede transportar 1400 kg, con un volumen máximo de 100 metros cúbicos.

Elemento	Peso (kg)	Volumen (m ³)	Bonificación
1	600	30	900
2	650	40	800
3	450	35	1100
4	520	25	1000
5	300	30	700

Atendiendo a las especificaciones de la tabla, ¿cuál es el máximo ingreso que puede obtenerse?, ¿cuántos elementos deben transportarse?

Solución:

PROGRAMACIÓN DINÁMICA: WinQSB / Dynamic Programming / Knapsack Problem



Se introducen los datos atendiendo al ingreso que puede obtenerse.

Item (Stage)	Item Identification	Units Available	Unit Capacity Required	Return Function [X: Item ID] (e.g., 50X, 3X+100, 2.15X^2+5)
1	A	1	600	4900A
2	B	1	650	4800B
3	C	1	450	5100C
4	D	1	520	5000D
5	E	1	300	4700E
Knapsack	Capacity =	1400		



Dynamic Programming

File Format Results Utilities Window Help

0.00 A

Stage	Item Name	Decision Quantity (X)	Return Function	Total Item Return Value	Capacity Left
1	A	0	4900A	0	1400
2	B	0	4800B	0	1400
3	C	1	5100C	5100	950
4	D	1	5000D	5000	430
5	E	1	4700E	4700	130
	Total	Return	Value =	14800	CPU = 0.48

La solución indica que se deben transportar los ítems 3, 4 y 5 con un retorno total de 14.800 euros.

CPU: Tiempo aproximado de procesamiento.

Considerando el volumen de carga, el nuevo modelo:

Dynamic Programming

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

0.00 A

Item (Stage)	Item Identification	Units Available	Unit Capacity Required	Return Function (X: Item ID) (e.g., 50X, 3X+100, 2.15X^2+5)
1	A	1	30	4900A
2	B	1	40	4800B
3	C	1	35	5100C
4	D	1	25	5000D
5	E	1	30	4700E
Knapsack	Capacity =	100		

Dynamic Programming

File Format Results Utilities Window Help

0.00 A

Solution for CARGA AVIÓN: Knapsack Problem

03-19-2022 Stage	Item Name	Decision Quantity (X)	Return Function	Total Item Return Value	Capacity Left
1	A	1	4900A	4900	70
2	B	0	4800B	0	70
3	C	1	5100C	5100	35
4	D	1	5000D	5000	10
5	E	0	4700E	0	10
	Total	Return	Value =	15000	CPU = 0.12

La solución indica que se deben transportar los ítems 1, 3 y 4 con un retorno total de 15.000 euros.



PROGRAMACIÓN LINEAL: Se puede resolver como un problema de programación lineal entera binaria.

La compañía gana 4.000 euros por elemento más una bonificación por elemento.

$$\text{Maximizar } z = 4900x_1 + 4800x_2 + 5100x_3 + 5000x_4 + 4700x_5$$

$$\text{Restricciones: } 600x_1 + 650x_2 + 450x_3 + 520x_4 + 300x_5 \leq 1400 \text{ kg} \quad x_i \geq 0 \text{ entero}$$

Max. Cx $Ax \leq b$

WinQSB / Linear and Integer Programming / Nonnegative Interger

LP-ILP Problem Specification

Problem Title:	CARGA AVIÓN		
Number of Variables:	5	Number of Constraints:	1
Objective Criterion	<input checked="" type="radio"/> Maximization <input type="radio"/> Minimization		
	<input type="radio"/> Nonnegative continuous <input type="radio"/> Nonnegative integer <input checked="" type="radio"/> Binary [0,1] <input type="radio"/> Unsigned/unrestricted		
Data Entry Format	<input checked="" type="radio"/> Spreadsheet Matrix Form <input type="radio"/> Normal Model Form		
<input type="button" value="OK"/> <input type="button" value="Cancel"/> <input type="button" value="Help"/>			

Elemento	Peso (kg)	Volumen (m ³)	Bonificación
1	600	30	900
2	650	40	800
3	450	35	1100
4	520	25	1000
5	300	30	700

Linear and Integer Programming

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

CARGA AVIÓN

Variable -->	X1	X2	X3	X4	X5	Direction	R. H. S.
Maximize	4900	4800	5100	5000	4700		
C1	600	650	450	520	300	<=	1400
LowerBound	0	0	0	0	0		
UpperBound	1	1	1	1	1		
VariableType	Binary	Binary	Binary	Binary	Binary		

Linear and Integer Programming

File Format Results Utilities Window Help

Combined Report for CARGA AVIÓN

Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(i)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status
X1	0	4900	0	4900	at bound
X2	0	4800	0	4800	at bound
X3	1	5100	5100	0	basic
X4	1	5000	5000	0	basic
X5	1	4700	4700	0	basic
Objective Function	(Max.) =	14800			
Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price
C1	1270	<=	1400	130	0



Análogamente para el volumen:

El avión tiene un volumen máximo de 100 metros cúbicos.

$$\text{Maximizar } z = 4900x_1 + 4800x_2 + 5100x_3 + 5000x_4 + 4700x_5$$

$$\text{Restricciones: } 30x_1 + 40x_2 + 35x_3 + 25x_4 + 30x_5 \leq 100 \text{ m}^3 \quad x_i \geq 0 \text{ entero}$$

Variable -->	X1	X2	X3	X4	X5	Direction	R. H. S.
Maximize	4900	4800	5100	5000	4700		
C1	30	40	35	25	30	<=	100
LowerBound	0	0	0	0	0		
UpperBound	1	1	1	1	1		
VariableType	Binary	Binary	Binary	Binary	Binary		

Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status
1 X1	1	4900	4900	0	basic
2 X2	0	4800	0	4800	at bound
3 X3	1	5100	5100	5100	at bound
4 X4	1	5000	5000	0	basic
5 X5	0	4700	0	4700	at bound

Objective Function	(Max.) =
	15000

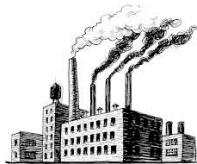
Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price
1 C1	90	<=	100	10	0

La Programación Dinámica, no tiene una técnica específica que se aplique a todos los problemas para resolverlos como es el caso de la Programación Lineal.



La Programación Dinámica permite descomponer un modelo matemático muy grande, en problemas más pequeños de fácil resolución, que al resolver cada uno de ellos se obtiene la solución apropiada al problema mayor del cual fueron generados los más pequeños.





Una compañía tiene una fábrica en cada una de las provincias que proveen a almacenes ubicados en cuatro lugares diferentes. La capacidad de producción de las fábricas es de 70, 90 y 115 unidades diarias respectivamente, mientras que la capacidad de los almacenes es de 50, 60, 70 y 95 unidades.

El coste en euros de envío de cada una de las fábricas a cada uno de los almacenes se adjunta en la tabla:

Almacén Origen	A1	A2	A3	A4
Fábrica 1	17	20	13	12
Fábrica 2	15	21	26	25
Fábrica 3	15	14	15	17

- a) Obtener una solución fácible básica inicial utilizando el método de la Esquina Noroeste (NWC)
- b) Obtener una solución óptima por el método MODI (Costes Ficticios)

Solución:

- a) Los datos del problema se trasladan a la tabla:

Almacén Origen	A1	A2	A3	A4	Oferta
Fábrica 1	17	20	13	12	70
Fábrica 2	15	21	26	25	90
Fábrica 3	15	14	15	17	115
Demandas	50	60	70	95	

La matriz es balanceada, las unidades que se ofertan coinciden con las unidades que se demandan.

$$\text{Matriz coste inicial: } c_{ij} = \begin{pmatrix} 17 & 20 & 13 & 12 \\ 15 & 21 & 26 & 25 \\ 15 & 14 & 15 & 17 \end{pmatrix}$$

El primer paso es seleccionar la demanda a la esquina más al noroeste, de manera que no sobrepase a la oferta. En caso contrario se asigna la mayor cantidad ofertada.

Almacén Origen	A1		A2	A3	A4	Oferta
Fábrica 1	50	17	20	13	12	$70 - 50 = 20$
Fábrica 2	15		21	26	25	90
Fábrica 3	15		14	15	17	115
Demandas	$50 - 50 = 0$		60	70	95	



El Almacén A1 ha quedado vacío por lo que se procede a eliminar la columna A1, continúa el proceso. Posteriormente, se selecciona la demanda a la esquina más al noroeste, de manera que no sobrepase a la oferta.

Almacén Origen	A1		A2		A3		A4	Oferta
Fábrica 1	50	17	20	20	13	12	20 - 20 = 0	
Fábrica 2	15		21		26	25	90	
Fábrica 3	15		14		15	17	115	
Demandas	0		60 - 20 = 40		70	95		

La Fábrica 1 ha quedado vacía por lo que se procede a eliminar la fila, reiterando el proceso de asignación.

Almacén Origen	A1		A2		A3		A4	Oferta
Fábrica 1	50	17	20	20	13	12	0	
Fábrica 2	15		40	21	26	25	90 - 40 = 50	
Fábrica 3	15		14		15	17	115	
Demandas	0		40 - 40 = 0		70	95		

Se suben 40 unidades a la esquina más al noroeste, quedando la demanda del Almacén A2 vacío, se elimina la columna A2, y se repite el proceso.

Almacén Origen	A1		A2		A3		A4	Oferta
Fábrica 1	50	17	20	20	13	12	0	
Fábrica 2	15		40	21	50	26	25	50 - 50 = 0
Fábrica 3	15		14		15	17	115	
Demandas	0		0		70 - 50 = 20	95		

La Fábrica 2 ha quedado vacía por lo que se procede a eliminar la fila, reiterando el proceso de asignación.

Almacén Origen	A1		A2		A3		A4	Oferta
Fábrica 1	50	17	20	20	13	12	0	
Fábrica 2	15		40	21	50	26	25	0
Fábrica 3	15		14		15	17	115	
Demandas	0		0		20	95		

Finalmente, se asignan 20 unidades a la celda C_{33} y 95 unidades a la celda C_{34} .



Almacén Origen	A1		A2		A3		A4		Oferta
Fábrica 1	50	17	20	20	13		12		0
Fábrica 2	15		40	21	50	26	25		0
Fábrica 3	15		14		20	15	95	17	0
Demandas	0		0		0		0		0

Coste mínimo en euros: $z = 50 \times 17 + 20 \times 20 + 40 \times 21 + 50 \times 26 + 20 \times 15 + 95 \times 17 = 5305$ euros

Adviértase que el método de la Esquina Noroeste ignora los costos y considera todas las restricciones. Es útil en problemas con innumerables origines y destinos en los que importa satisfacer las restricciones, siendo el algoritmo de transporte menor probable para ofrecer una buena solución de bajo costo.

b) Para encontrar la solución óptima se utiliza el método MODI

1 Iteración: Se calcula la matriz de costes reducidos ($c_{ij} - z_{ij}$)

PASO 1: Se considera la solución inicial encontrada por el método Esquina N.O.

Almacén Origen	A1		A2		A3		A4		Oferta
Fábrica 1	50	17	20	20	13		12		70
Fábrica 2	15		40	21	50	26	25		90
Fábrica 3	15		14		20	15	95	17	115
Demandas	50		60		70		95		

Coste mínimo: $z = 50 \times 17 + 20 \times 20 + 40 \times 21 + 50 \times 26 + 20 \times 15 + 95 \times 17 = 5305$ euros

PASO 2: Se considera la matriz z_{ij} de los costes de la variable solución:

17	20		
	40	50	
		15	17

$$z_{ij} = \begin{pmatrix} 17 & 20 & z_{13} & z_{14} \\ z_{21} & 21 & 26 & z_{24} \\ z_{31} & z_{32} & 15 & 17 \end{pmatrix}$$

PASO 3: Se elaboran un conjunto de números u_i y v_j de modo que la suma sea igual a los valores de la matriz z_{ij} de los costes de la variable solución.



v_j	v_1	v_2	v_3	v_4
u_i				
u_1	17	20		
u_2		21	26	
u_3			15	17

Ecuaciones de las celdas básicas:

$$\begin{array}{ll} u_1 + v_1 = 17 & u_2 + v_3 = 26 \\ u_1 + v_2 = 20 & u_3 + v_3 = 15 \\ u_2 + v_2 = 21 & u_3 + v_4 = 17 \end{array}$$

Haciendo $v_1 = 0$ se tiene:

$$\begin{array}{lll} u_1 = 17 & v_2 = 20 - u_1 = 20 - 17 = 3 & u_2 = 21 - v_2 = 21 - 3 = 18 \\ v_3 = 26 - u_2 = 8 & u_3 = 15 - v_3 = 15 - 8 = 7 & v_4 = 17 - u_3 = 17 - 7 = 10 \end{array}$$

Se completan las celdas vacías de la tabla anterior con la suma de los u_i y v_j calculados, resultando la matriz z_{ij}

v_j	0	3	8	10
u_i				
17	17	20	25	27
18	18	21	26	28
7	7	10	15	17

Matriz coste variable solución:

$$z_{ij} = \begin{pmatrix} 17 & 20 & 25 & 27 \\ 18 & 21 & 26 & 28 \\ 7 & 10 & 15 & 17 \end{pmatrix}$$

$$\text{Matriz coste inicial: } c_{ij} = \begin{pmatrix} 17 & 20 & 13 & 12 \\ 15 & 21 & 26 & 25 \\ 15 & 14 & 15 & 17 \end{pmatrix}$$

Matriz de costes reducidos ($c_{ij} - z_{ij}$):

$$c_{ij} - z_{ij} = \begin{pmatrix} 17 & 20 & 13 & 12 \\ 15 & 21 & 26 & 25 \\ 15 & 14 & 15 & 17 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 17 & 20 & 25 & 27 \\ 18 & 21 & 26 & 28 \\ 7 & 10 & 15 & 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -12 & -15 \\ -3 & 0 & 0 & -3 \\ 8 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se observa que la matriz de costes reducidos tiene ceros en los elementos correspondientes a las variables que están en la solución. La presencia de elementos negativos indica que no se ha conseguido la solución óptima.

Se selecciona la casilla $z_{14} = -15$ por tener el coste de entrada más pequeño, por consiguiente debe entrar a la base la variable x_{14} con el valor más pequeño de los que están en las casillas con signos menos. Desde esta variable se traza la trayectoria (± 20)



Almacén	A1	A2	A3	A4	Oferta
Fábrica 1	50	0		20	70
Fábrica 2		40 + 20 = 60	50 - 20 = 30		90
Fábrica 3			20 + 20 = 40	95 - 20 = 75	115
Demanda	50	60	70	95	

Coste de la nueva solución: $z_1 = 5305 - 15 \times 20 = 5005$ euros

Adviértase que el coste también se puede calcular:

Almacén	A1		A2		A3		A4	
Origen								
Fábrica 1	50	17					20	12
Fábrica 2			60	21	30	26		
Fábrica 3					40	15	75	17

$$z_1 = 50 \times 17 + 20 \times 12 + 60 \times 21 + 30 \times 26 + 40 \times 15 + 75 \times 17 = 5005 \text{ euros}$$

Al tener elementos negativos la matriz de costes reducidos ($c_{ij} - z_{ij}$) la solución se puede mejorar y continúa el proceso de iteración.

2 Iteración: Se calcula la matriz de costes reducidos ($c_{ij} - z_{ij}$)

PASO 2: Se considera la matriz z_{ij} de los costes de la primera iteración:

17			12
	21	26	
		15	17

$$z_{ij} = \begin{pmatrix} 17 & z_{12} & z_{13} & 12 \\ z_{21} & 21 & 26 & z_{24} \\ z_{31} & z_{32} & 15 & 17 \end{pmatrix}$$

PASO 3: Se elaboran un conjunto de números u_i y v_j de modo que la suma sea igual a los valores de la matriz z_{ij} de los costes de la variable solución.



v_j	v_1	v_2	v_3	v_4
u_i				
u_1	17			12
u_2		21	26	
u_3			15	17

Ecuaciones de las celdas básicas:

$$\begin{array}{ll} u_1 + v_1 = 17 & u_2 + v_3 = 26 \\ u_1 + v_2 = 20 & u_3 + v_3 = 15 \\ u_2 + v_2 = 21 & u_3 + v_4 = 17 \end{array}$$

Haciendo $v_1 = 0$ se tiene:

$$\begin{array}{lll} u_1 = 17 & v_4 = 12 - u_1 = 12 - 17 = -5 & u_3 = 17 - v_4 = 17 + 5 = 22 \\ v_3 = 15 - u_3 = 15 - 22 = -7 & u_2 = 26 - v_3 = 26 + 7 = 33 & v_2 = 21 - u_2 = 21 - 33 = -12 \end{array}$$

Se completan las celdas vacías de la tabla anterior con la suma de los u_i y v_j calculados, resultando la matriz z_{ij}

v_j	0	-12	-7	-5
u_i				
17	17	5	10	12
33	33	21	26	28
22	22	10	15	17

$$\text{Matriz coste inicial: } c_{ij} = \begin{pmatrix} 17 & 20 & 13 & 12 \\ 15 & 21 & 26 & 25 \\ 15 & 14 & 15 & 17 \end{pmatrix}$$

Matriz de costes reducidos ($c_{ij} - z_{ij}$):

$$c_{ij} - z_{ij} = \begin{pmatrix} 17 & 20 & 13 & 12 \\ 15 & 21 & 26 & 25 \\ 15 & 14 & 15 & 17 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 17 & 5 & 10 & 12 \\ 33 & 21 & 26 & 28 \\ 22 & 10 & 15 & 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 15 & 3 & 0 \\ -18 & 0 & 0 & -3 \\ -7 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se observa que la matriz de costes reducidos tiene ceros en los elementos correspondientes a las variables que están en la solución. La presencia de elementos negativos indica que no se ha conseguido la solución óptima.

Se selecciona la casilla $z_{21} = -18$ por tener el coste de entrada más pequeño, por consiguiente debe entrar a la base la variable x_{21} con el valor más pequeño de los que están en las casillas con signos menos. Desde esta variable se traza la trayectoria (± 30)

Matriz coste variable solución:

$$z_{ij} = \begin{pmatrix} 17 & 5 & 10 & 12 \\ 33 & 21 & 26 & 28 \\ 22 & 10 & 15 & 17 \end{pmatrix}$$



Almacén	A1	A2	A3	A4	Oferta
Fábrica 1	50 - 30 = 20			20 + 30 = 50	70
Fábrica 2	30	60	30 - 30 = 0		90
Fábrica 3			40 + 30 = 70	75 - 30 = 45	115
Demanda	50	60	70	95	

Coste de la nueva solución: $z_2 = 5005 - 18 \times 30 = 4465$ euros

Adviértase que el coste también se puede calcular:

Almacén Origen	A1		A2		A3		A4		Oferta
Fábrica 1	20	17	20		13		50	12	70
Fábrica 2	30	15	60	21	26		25		90
Fábrica 3	15		14		70	15	45	17	115
Demanda	50		60		70		95		

$$z_2 = 20 \times 17 + 50 \times 12 + 30 \times 15 + 60 \times 21 + 70 \times 15 + 45 \times 17 = 4465 \text{ euros}$$

Al tener elementos negativos la matriz de costes reducidos ($c_{ij} - z_{ij}$) la solución se puede mejorar y continúa el proceso de iteración.

3 Iteración: Se calcula la matriz de costes reducidos ($c_{ij} - z_{ij}$)

PASO 2: Se considera la matriz z_{ij} de los costes de la segunda iteración:

17			12
15	21		
		15	17

$$z_{ij} = \begin{pmatrix} 17 & z_{12} & z_{13} & 12 \\ 15 & 21 & z_{23} & z_{24} \\ z_{31} & z_{32} & 15 & 17 \end{pmatrix}$$

PASO 3: Se elaboran un conjunto de números u_i y v_j de modo que la suma sea igual a los valores de la matriz z_{ij} de los costes de la variable solución.



v_j	v_1	v_2	v_3	v_4
u_i				
u_1	17			12
u_2	15	21		
u_3			15	17

Ecuaciones de las celdas básicas:

$$u_1 + v_1 = 17 \quad u_2 + v_2 = 21$$

$$u_1 + v_4 = 12 \quad u_3 + v_3 = 15$$

$$u_2 + v_1 = 15 \quad u_3 + v_4 = 17$$

Haciendo $v_1 = 0$ se tiene:

$$u_1 = 17$$

$$v_4 = 12 - u_1 = 12 - 17 = -5$$

$$u_3 = 17 - v_4 = 17 + 5 = 22$$

$$v_3 = 15 - u_3 = 15 - 22 = -7$$

$$u_2 = 15 - v_1 = 15 - 0 = 15$$

$$v_2 = 21 - u_2 = 21 - 15 = 6$$

Se completan las celdas vacías de la tabla anterior con la suma de los u_i y v_j calculados, resultando la matriz z_{ij}

v_j	0	6	-7	-5
u_i				
17	17	23	10	12
15	15	21	8	10
22	22	28	15	17

Matriz coste variable solución:

$$z_{ij} = \begin{pmatrix} 17 & 23 & 10 & 12 \\ 15 & 21 & 8 & 10 \\ 22 & 28 & 15 & 17 \end{pmatrix}$$

$$\text{Matriz coste inicial: } c_{ij} = \begin{pmatrix} 17 & 20 & 13 & 12 \\ 15 & 21 & 26 & 25 \\ 15 & 14 & 15 & 17 \end{pmatrix}$$

Matriz de costes reducidos ($c_{ij} - z_{ij}$):

$$c_{ij} - z_{ij} = \begin{pmatrix} 17 & 20 & 13 & 12 \\ 15 & 21 & 26 & 25 \\ 15 & 14 & 15 & 17 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 17 & 23 & 10 & 12 \\ 15 & 21 & 8 & 10 \\ 22 & 28 & 15 & 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & 15 \\ -7 & -14 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se observa que la matriz de costes reducidos tiene ceros en los elementos correspondientes a las variables que están en la solución. La presencia de elementos negativos indica que no se ha conseguido la solución óptima.

Se selecciona la casilla $z_{32} = -14$ por tener el coste de entrada más pequeño, por consiguiente debe entrar a la base la variable x_{32} con el valor más pequeño de los que están en las casillas con signos menos. Desde esta variable se traza la trayectoria (± 20)



Almacén	A1	A2	A3	A4	Oferta
Fábrica 1	20-20=0			50+20=70	70
Fábrica 2	30+20=50	60-20=40			90
Fábrica 3		20	70	45 -20=25	115
Demanda	50	60	70	95	

Coste de la nueva solución: $z_3 = 4465 - 20 \times 14 = 4185$ euros

Adviértase que el coste también se puede calcular:

Almacén Origen	A1	A2	A3	A4	Oferta
Fábrica 1	17	20	13	70	70
Fábrica 2	50	15	40	21	90
Fábrica 3	15	20	14	70	115
Demanda	50	60	70	95	

$$z_3 = 70 \times 12 + 50 \times 15 + 40 \times 21 + 20 \times 14 + 70 \times 15 + 25 \times 17 = 4185 \text{ euros}$$

Al tener elementos negativos la matriz de costes reducidos ($c_{ij} - z_{ij}$) la solución se puede mejorar y continúa el proceso de iteración.

4 Iteración: Se calcula la matriz de costes reducidos ($c_{ij} - z_{ij}$)

PASO 2: Se considera la matriz z_{ij} de los costes de la tercera iteración:

			12
15	21		
	14	15	17

$$z_{ij} = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} & 12 \\ 15 & 21 & z_{23} & z_{24} \\ z_{31} & 14 & 15 & 17 \end{pmatrix}$$

PASO 3: Se elaboran un conjunto de números u_i y v_j de modo que la suma sea igual a los valores de la matriz z_{ij} de los costes de la variable solución.



v_j	v_1	v_2	v_3	v_4
u_i				
u_1				12
u_2	15	21		
u_3		14	15	17

Haciendo $v_1 = 0$ se tiene:

$$\begin{array}{lll} u_2 = 15 - v_1 = 15 - 0 = 15 & v_2 = 21 - u_2 = 21 - 15 = 6 & u_3 = 14 - v_2 = 14 - 6 = 8 \\ v_3 = 15 - u_3 = 15 - 8 = 7 & v_4 = 17 - u_3 = 17 - 8 = 9 & u_1 = 12 - v_4 = 12 - 9 = 3 \end{array}$$

Se completan las celdas vacías de la tabla anterior con la suma de los u_i y v_j calculados, resultando la matriz z_{ij}

v_j	0	6	7	9
u_i	3	9	10	12
3	15	21	22	24
15	8	14	15	17

$$\text{Matriz coste inicial: } c_{ij} = \begin{pmatrix} 17 & 20 & 13 & 12 \\ 15 & 21 & 26 & 25 \\ 15 & 14 & 15 & 17 \end{pmatrix}$$

Matriz de costes reducidos ($c_{ij} - z_{ij}$):

$$c_{ij} - z_{ij} = \begin{pmatrix} 17 & 20 & 13 & 12 \\ 15 & 21 & 26 & 25 \\ 15 & 14 & 15 & 17 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 9 & 10 & 12 \\ 15 & 21 & 22 & 24 \\ 8 & 14 & 15 & 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 11 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 7 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La solución es óptima al ser todos los elementos $(c_{ij} - z_{ij}) \geq 0$, el algoritmo Modi ha finalizado.

Solución óptima: $z_4 = 4185$ euros

Ecuaciones de las celdas básicas:

$$\begin{array}{ll} u_1 + v_4 = 12 & u_3 + v_2 = 14 \\ u_2 + v_1 = 15 & u_3 + v_3 = 15 \\ u_2 + v_2 = 21 & u_3 + v_4 = 17 \end{array}$$

Matriz coste variable solución:

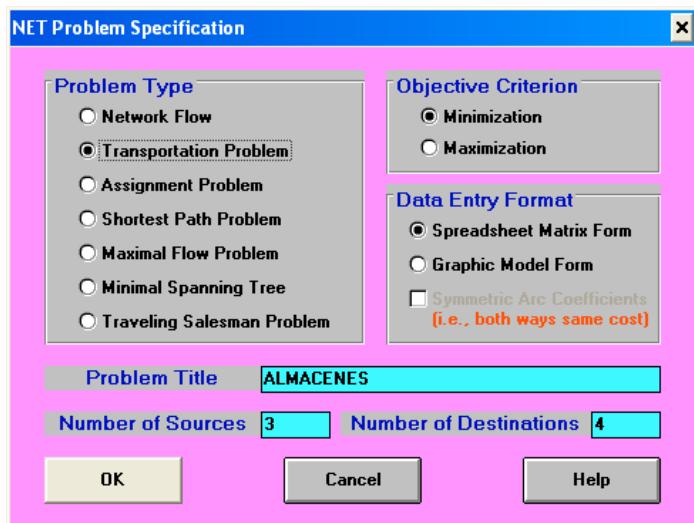
$$z_{ij} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 10 & 12 \\ 15 & 21 & 22 & 24 \\ 8 & 14 & 15 & 17 \end{pmatrix}$$



MÉTODOS HEURÍSTICOS: ESQUINA NOROESTE (NWC)



WinQSB / Net Problem Specification - Transportation Problem



Network Modeling

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

ALMACENES: Minimization (Transportation Problem)

From \ To	Almacen 1	Almacen 2	Almacen 3	Almacen 4	Supply
Fabrica 1	17	20	13	12	70
Fabrica 2	15	21	26	25	90
Fabrica 3	15	14	15	17	115
Demand	50	60	70	95	

Network Modeling

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Iteraciones

ALMACENES

Solve the Problem
Solve and Display Steps - Network
Solve and Display Steps - Tableau
Select Initial Solution Method
Perform What If Analysis
Perform Parametric Analysis

Transportation Simplex Initial Solution Method

Row Minimum (RM)
Modified Row Minimum (MRM)
Column Minimum (CM)
Modified Column Minimum (MCM)
Northwest Corner Method (NWC)
Matrix Minimum (MM)
Vogel's Approximation Method (VAM)
Russell's Approximation Method (RAM)

OK
Solve
Cancel
Help

	Almacen 1	Almacen 2	Almacen 3	Almacen 4	Supply	Dual P(i)
Fabrica 1	17 50	20 20*	13	12	70	0
Fabrica 2	15	21 40	26 50	25	90	1
Fabrica 3	15	14	15 20	17 95	115	-10
Demand	50	60	70	95		
Dual P(j)	17	20	25	27		
	Objective Value = 5305 (Minimization)					

** Entering: Fabrica 1 to Almacen 4 * Leaving: Fabrica 1 to Almacen 2

Pulsando en las Iteraciones se van obteniendo todos los pasos vistos con el algoritmo MODI



Network Modeling

File Iteration Utilities Window Help

Transportation Tableau for ALMACENES - Iteration 4 (Final) **Solution for ALMACENES: Minimization (Transportation Problem)**

From \ To	Almacen 1	Almacen 2	Almacen 3	Almacen 4	
Fabrica 1	17	20	13	12	70
Fabrica 2	15	21	26	25	50
Fabrica 3	15	14	15	17	20
			70	25	
	Objective Value = 4185 (Minimization)				

	From	To	Shipment	Unit Cost	Total Cost	Reduced Cost
1	Fabrica 1	Almacen 4	70	12	840	0
2	Fabrica 2	Almacen 1	50	15	750	0
3	Fabrica 2	Almacen 2	40	21	840	0
4	Fabrica 3	Almacen 2	20	14	280	0
5	Fabrica 3	Almacen 3	70	15	1050	0
6	Fabrica 3	Almacen 4	25	17	425	0
	Total	Objective Function		Value =	4185	

PROGRAMACIÓN LINEAL: MÉTODO DEL SIMPLEX

Almacén Origen	A1	A2	A3	A4	Oferta
Fábrica 1	17 x_1	20 x_2	13 x_3	12 x_4	70
Fábrica 2	15 x_5	21 x_6	26 x_7	25 x_8	90
Fábrica 3	15 x_9	14 x_{10}	15 x_{11}	17 x_{12}	115
Demandas	50	60	70	95	

Miimizar:
$$z = (17x_1 + 20x_2 + 13x_3 + 12x_4) + (15x_5 + 21x_6 + 26x_7 + 25x_8) + (15x_9 + 14x_{10} + 15x_{11} + 17x_{12})$$
 (12 variables)

restricciones:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 70 \\ x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 90 \\ x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} = 115 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + x_5 + x_9 = 50 \\ x_2 + x_6 + x_{10} = 60 \\ x_3 + x_7 + x_{11} = 70 \\ x_4 + x_8 + x_{12} = 95 \end{cases}$$
 (7 restricciones)

Max.
CX
AX=b WinQSB / Linear and Integer Programming

LP-ILP Problem Specification

Problem Title: ALMACENES

Number of Variables: 12 Number of Constraints: 7

Objective Criterion

Maximization Minimization

Data Entry Format

Spreadsheet Matrix Form Normal Model Form

Default Variable Type

Nonnegative continuous Nonnegative integer Binary (0,1) Unsigned/unrestricted

OK Cancel Help



Linear and Integer Programming

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

ALAMCENES

OBJ/Constraint/Bound	
Minimize	$17X_1 + 20X_2 + 13X_3 + 12X_4 + 15X_5 + 21X_6 + 26X_7 + 25X_8 + 15X_9 + 14X_{10} + 15X_{11} + 17X_{12}$
C1	$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 70$
C2	$X_5 + X_6 + X_7 + X_8 = 90$
C3	$X_9 + X_{10} + X_{11} + X_{12} = 115$
C4	$X_1 + X_5 + X_9 = 50$
C5	$X_2 + X_6 + X_{10} = 60$
C6	$X_3 + X_7 + X_{11} = 70$
C7	$X_4 + X_8 + X_{12} = 95$
Integer:	$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8, X_9, X_{10}, X_{11}, X_{12}$
Binary:	
Unrestricted:	
X1	$\geq 0, \leq M$
X2	$\geq 0, \leq M$
X3	$\geq 0, \leq M$
X4	$\geq 0, \leq M$
X5	$\geq 0, \leq M$
X6	$\geq 0, \leq M$
X7	$\geq 0, \leq M$
X8	$\geq 0, \leq M$
X9	$\geq 0, \leq M$
X10	$\geq 0, \leq M$
X11	$\geq 0, \leq M$
X12	$\geq 0, \leq M$

Linear and Integer Programming

File Format Results Utilities Window Help

Combined Report for ALAMCENES

	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c[i]	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c[i]	Allowable Max. c[i]
1	X1	0	17	0	14	at bound	3	M
2	X2	0	20	0	11	at bound	9	M
3	X3	0	13	0	3	at bound	10	M
4	X4	70	12	840	0	basic	-M	15
5	X5	50	15	750	0	basic	-M	22
6	X6	40	21	840	0	basic	14	22
7	X7	0	26	0	4	at bound	22	M
8	X8	0	25	0	1	at bound	24	M
9	X9	0	15	0	7	at bound	8	M
10	X10	20	14	280	0	basic	13	21
11	X11	70	15	1.050	0	basic	-M	18
12	X12	25	17	425	0	basic	14	18
	Objective Function	(Min.) =	4.185					



Una empresa de mantenimiento de aeronaves cuenta con 3 hangares donde se satisface la oferta de 3 aerolíneas. Los costes unitarios de las inspecciones que se tienen que realizar en euros se adjuntan en la tabla.

	Aerolínea 1	Aerolínea 2	Aerolínea 3	Oferta
Hangar 1	160	120	80	350
Hangar 2	240	50	150	550
Hangar 3	100	200	230	400
Demanda	500	300	250	50

- a) Obtener por el método Vogel un modelo de programación que permita satisfacer las necesidades de la tres aerolíneas y minimizar el coste de las inspecciones.
- b) Plantear un programa de Programación Lineal (Simplex)

Solución:

- a) La matriz debe ser balanceada, es decir, si es igual la oferta a la demanda:

$$\text{Oferta} = 500 + 300 + 250 = 1050 \quad \text{Demanda} = 350 + 550 + 400 = 1300$$

La matriz no está balanceada por lo tanto para conseguir el equilibrio hay que ajustarla creando una demanda ficticia que sea la diferencia $1300 - 1050 = 250$, es decir, una demanda u holgura de 250

	Aerolínea 1	Aerolínea 2	Aerolínea 3	Aerolínea F	Oferta
Hangar 1	160	120	80	0	350
Hangar 2	240	50	150	0	550
Hangar 3	100	200	230	0	400
Demanda	500	300	250	250	

Se determinan las medidas de mayor penalización restando los dos costos más bajos por fila y columna (el resultado se denomina Penalización). En la fila o columna con mayor penalización se elige el menor coste para asignar la cantidad posible para cubrir la Oferta o Demanda.

	Aerolínea 1	Aerolínea 2	Aerolínea 3	Aerolínea F	Oferta	Penalizaciones
Hangar 1	160	120	80	0	350	$80 - 0 = 80$
Hangar 2	240	50	150	0	550	$50 - 0 = 50$
Hangar 3	100	200	230	0	400	$100 - 0 = 100$
Demanda	500	300	250	250		
Penalizaciones	$160 - 100 = 60$	$120 - 50 = 70$	$120 - 50 = 70$	0		

La fila o columna con mayor penalización corresponde al Hangar 3, donde el menor coste (penalización) es 100. Se elige la fila del Hangar 3 y se asigna la mayor cantidad posible de unidades para cubrir la Oferta (400).



Como la Oferta que ofrece el Hangar 3 está agotada, se suprime esta fila.

	Aerolínea 1	Aerolínea 2	Aerolínea 3	Aerolínea F	Oferta	Penalizaciones
Hangar 1	160	120	80	0	350	
Hangar 2	240	50	150	0	550	
Hangar 3	400 / 100	200	230	0	0	
Demanda	100	300	250	250		
Penalizaciones						

La Aerolínea 1 todavía demanda 100 unidades.

Se repite el proceso determinando las medidas de mayor penalización restando los dos costos más bajos por fila y columna. Se elige la mayor penalización con el menor coste para asignar la cantidad posible para cubrir la Oferta o Demanda.

	Aerolínea 1	Aerolínea 2	Aerolínea 3	Aerolínea F	Oferta	Penalizaciones
Hangar 1	160	120	80	0	350	80 - 0 = 80
Hangar 2	240	50	150	0	550	50 - 0 = 50
Hangar 3	400 / 100	200	230	0	0	
Demanda	100	300	250	250		
Penalizaciones	240 - 160 = 80	120 - 50 = 70	150 - 80 = 70	0		

Se elige arbitrariamente la columna de la Aerolínea 1 con una penalización de 80. Se asigna la mayor cantidad posible de unidades que se necesitan para cubrir la Oferta o la Demanda.

	Aerolínea 1	Aerolínea 2	Aerolínea 3	Aerolínea F	Oferta	Penalizaciones
Hangar 1	100 / 160	120	80	0	350 - 100 = 250	
Hangar 2	240	50	150	0	550	
Hangar 3	400 / 100	200	230	0	0	
Demanda	100 - 100 = 0	300	250	250		
Penalizaciones						

El Hangar 1 queda cubierto con 100 unidades, con lo que su oferta es de 250 unidades. Por otra parte, se tacha la fila de la Aerolínea 1 al quedar cubierta la Demanda.

Se repite el proceso determinando las medidas de mayor penalización restando los dos costos más bajos por fila y columna.

	Aerolínea 1	Aerolínea 2	Aerolínea 3	Aerolínea F	Oferta	Penalizaciones
Hangar 1	100 / 160	120	80	0	250	80 - 0 = 80
Hangar 2	240	50	150	0	550	50 - 0 = 50
Hangar 3	400 / 100	200	230	0	0	
Demanda	0	300	250	250		
Penalizaciones		120 - 50 = 70	150 - 80 = 70	0		



Se elige arbitrariamente la columna de la Aerolínea 2 con una penalización de 70. Se asigna la mayor cantidad posible de unidades que se necesitan para cubrir la Oferta o la Demanda.

	Aerolínea 1	Aerolínea 2	Aerolínea 3	Aerolínea F	Oferta	Penalizaciones
Hangar 1	100 / 160	120	80	0	250	
Hangar 2	240	300 / 50	150	0	550 - 300 = 250	
Hangar 3	400 / 100	200	230	0	0	
Demanda	0	300 - 300 = 0	250	250		
Penalizaciones						

La Demanda de la Aerolínea 2 queda cubierta, tachando esta columna.

Por otra parte la Oferta del Hangar 2 queda con 250 unidades.

Se repite el proceso determinando las medidas de mayor penalización restando los dos costos más bajos por fila y columna.

	Aerolínea 1	Aerolínea 2	Aerolínea 3	Aerolínea F	Oferta	Penalizaciones
Hangar 1	100 / 160	120	80	0	250	80 - 0 = 80
Hangar 2	240	300 / 50	150	0	250	150 - 0 = 150
Hangar 3	400 / 100	200	230	0	0	
Demanda	0	0	250	250		
Penalizaciones			150 - 80 = 70	0		

Se elige la columna de la Aerolínea ficticia con una penalización de 150. Se asigna la mayor cantidad posible de unidades que se necesitan para cubrir la Oferta o la Demanda.

	Aerolínea 1	Aerolínea 2	Aerolínea 3	Aerolínea F	Oferta	Penalizaciones
Hangar 1	100 / 160	120	80	0	250	
Hangar 2	240	300 / 50	150	250 / 0	250 - 250 = 0	
Hangar 3	400 / 100	200	230	0	0	
Demanda	0	0	250	250 - 250 = 0		
Penalizaciones						

El Oferta del Hangar 2 y la Demanda de la Aerolínea F quedan cubiertos, con lo que elimina fila y columna correspondientes.

	Aerolínea 1	Aerolínea 2	Aerolínea 3	Aerolínea F	Oferta	Penalizaciones
Hangar 1	100 / 160	120	80	0	250	
Hangar 2	240	300 / 50	150	250 / 0	0	
Hangar 3	400 / 100	200	230	0	0	
Demanda	0	0	250	0		
Penalizaciones						

Finalmente, se asignan 250 unidades a la Aerolínea 3.

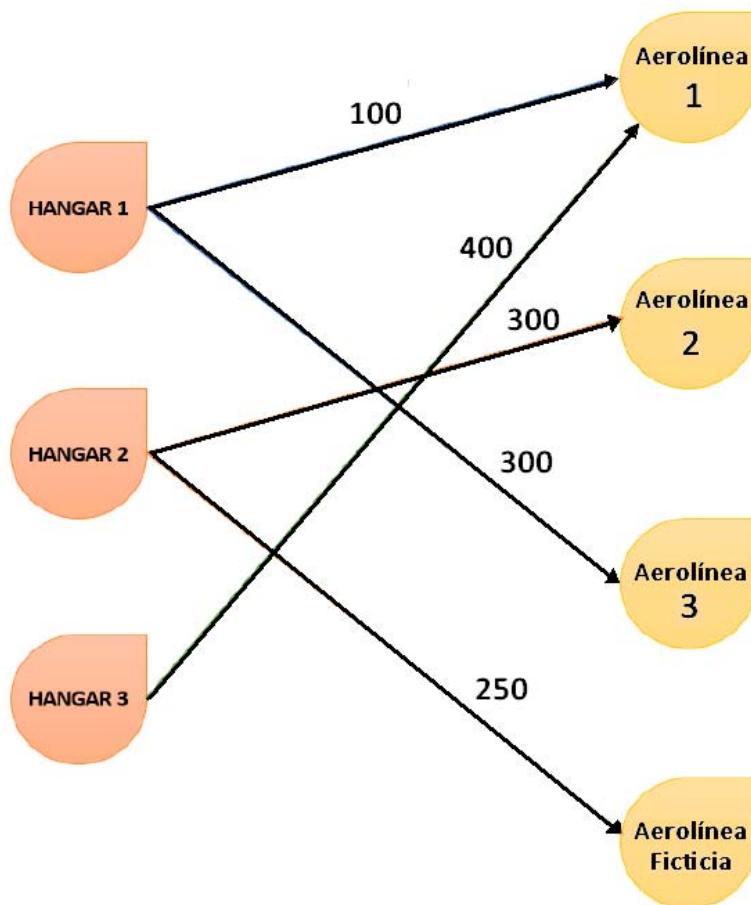


	Aerolínea 1	Aerolínea 2	Aerolínea 3	Aerolínea F	Oferta
Hangar 1	100 / 160	120	250 / 80	0	0
Hangar 2	240	300 / 50	150	250 / 0	0
Hangar 3	400 / 100	200	230	0	0
Demanda	0	0	0	0	

Plan más económico que se requiere para atender a las tres Aerolíneas:

	Aerolínea 1	Aerolínea 2	Aerolínea 3
Hangar 1	100 / 160		250 / 80
Hangar 2		300 / 50	
Hangar 3	400 / 100		

Coste Mínimo Total: $z = (100 \times 160) + (400 \times 100) + (300 \times 50) + (250 \times 80) = 91.000$ euros





WinQSB / Net Problem Specification - Maximal Flow Problem

NET Problem Specification

Problem Type	Objective Criterion
<input type="radio"/> Network Flow <input checked="" type="radio"/> Transportation Problem <input type="radio"/> Assignment Problem <input type="radio"/> Shortest Path Problem <input type="radio"/> Maximal Flow Problem <input type="radio"/> Minimal Spanning Tree <input type="radio"/> Traveling Salesman Problem	<input checked="" type="radio"/> Minimization <input type="radio"/> Maximization
Data Entry Format	
<input checked="" type="radio"/> Spreadsheet Matrix Form <input type="radio"/> Graphic Model Form <input type="checkbox"/> Symmetric Arc Coefficients (i.e., both ways same cost)	
Problem Title	MANTENIMIENTO AERONAVES
Number of Sources	3
Number of Destinations	3
<input type="button" value="OK"/> <input type="button" value="Cancel"/> <input type="button" value="Help"/>	

Network Modeling

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help																									
MANTENIMIENTO AERONAVES: Minimization (Transportation Problem)																									
<table border="1"> <thead> <tr> <th>From \ To</th> <th>Aerolínea 1</th> <th>Aerolínea 2</th> <th>Aerolínea 3</th> <th>Supply</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Hangar 1</td> <td>160</td> <td>120</td> <td>80</td> <td>350</td> </tr> <tr> <td>Hangar 2</td> <td>240</td> <td>50</td> <td>150</td> <td>550</td> </tr> <tr> <td>Hangar 3</td> <td>100</td> <td>200</td> <td>230</td> <td>400</td> </tr> <tr> <td>Demand</td> <td>500</td> <td>300</td> <td>250</td> <td></td> </tr> </tbody> </table>	From \ To	Aerolínea 1	Aerolínea 2	Aerolínea 3	Supply	Hangar 1	160	120	80	350	Hangar 2	240	50	150	550	Hangar 3	100	200	230	400	Demand	500	300	250	
From \ To	Aerolínea 1	Aerolínea 2	Aerolínea 3	Supply																					
Hangar 1	160	120	80	350																					
Hangar 2	240	50	150	550																					
Hangar 3	100	200	230	400																					
Demand	500	300	250																						

Network Modeling

File Format Results Utilities Window Help																																																	
Solution for MANTENIMIENTO AERONAVES: Minimization (Transportation Problem)																																																	
<table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>From</th> <th>To</th> <th>Shipment</th> <th>Unit Cost</th> <th>Total Cost</th> <th>Reduced Cost</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>Hangar 1</td> <td>Aerolínea 1</td> <td>100</td> <td>160</td> <td>16000</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>Hangar 1</td> <td>Aerolínea 3</td> <td>250</td> <td>80</td> <td>20000</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>Hangar 2</td> <td>Aerolínea 2</td> <td>300</td> <td>50</td> <td>15000</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>Hangar 2</td> <td>Unused Supply</td> <td>250</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>Hangar 3</td> <td>Aerolínea 1</td> <td>400</td> <td>100</td> <td>40000</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td></td> <td>Total</td> <td>Objective</td> <td>Function</td> <td>Value =</td> <td>91000</td> <td></td> </tr> </tbody> </table>		From	To	Shipment	Unit Cost	Total Cost	Reduced Cost	1	Hangar 1	Aerolínea 1	100	160	16000	0	2	Hangar 1	Aerolínea 3	250	80	20000	0	3	Hangar 2	Aerolínea 2	300	50	15000	0	4	Hangar 2	Unused Supply	250	0	0	0	5	Hangar 3	Aerolínea 1	400	100	40000	0		Total	Objective	Function	Value =	91000	
	From	To	Shipment	Unit Cost	Total Cost	Reduced Cost																																											
1	Hangar 1	Aerolínea 1	100	160	16000	0																																											
2	Hangar 1	Aerolínea 3	250	80	20000	0																																											
3	Hangar 2	Aerolínea 2	300	50	15000	0																																											
4	Hangar 2	Unused Supply	250	0	0	0																																											
5	Hangar 3	Aerolínea 1	400	100	40000	0																																											
	Total	Objective	Function	Value =	91000																																												

ENFOQUE CON PROGRAMACIÓN LINEAL

	Aerolínea 1	Aerolínea 2	Aerolínea 3	Aerolínea F	Oferta
Hangar 1	160 x_1	120 x_2	80 x_3	0 x_4	350
Hangar 2	240 x_5	50 x_6	150 x_7	0 x_8	550
Hangar 3	100 x_9	200 x_{10}	230 x_{11}	0 x_{12}	400
Demanda	500	300	250	250	

Función objetivo: $z = 160x_1 + 120x_2 + 80x_3 + 240x_5 + 50x_6 + 150x_7 + 100x_9 + 200x_{10} + 230x_{11}$

restricciones:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 350 \\ x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 550 \\ x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} = 400 \\ x_{ij} \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_5 + x_9 = 500 \\ x_2 + x_6 + x_{10} = 300 \\ x_3 + x_7 + x_{11} = 250 \\ x_4 + x_8 + x_{12} = 250 \end{cases}$$

- No Negatividad e Integralidad: Las variables de decisión tienen la condición de no negatividad ($x_{ij} \geq 0$), adicionalmente se exige que éstas adopten valores enteros. Si se omite esta condición podría dar un problema de Programación Lineal.


Max.
CX
AX=b
MANTENIMIENTO AERONAVES: PROGRAMACIÓN LINEAL

LP-ILP Problem Specification

Problem Title: MANTENIMIENTO AERONAVES

Number of Variables: 12 **Number of Constraints:** 7

Objective Criterion
 Maximization
 Minimization

Default Variable Type
 Nonnegative continuous
 Nonnegative integer
 Binary (0,1)
 Unsigned/unrestricted

Data Entry Format
 Spreadsheet Matrix Form
 Normal Model Form

OK **Cancel** **Help**

LP-ILP Problem Specification

Problem Title: MANTENIMIENTO AERONAVES

Number of Variables: 12 **Number of Constraints:** 7

Objective Criterion
 Maximization
 Minimization

Default Variable Type
 Nonnegative continuous
 Nonnegative integer
 Binary (0,1)
 Unsigned/unrestricted

Data Entry Format
 Spreadsheet Matrix Form
 Normal Model Form

OK **Cancel** **Help**

Linear and Integer Programming

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

MANTENIMIENTO AERONAVES

	OBJ/Constraint/VariableType/Bound
Minimize	$160X_1 + 120X_2 + 80X_3 + 240X_5 + 50X_6 + 150X_7 + 100X_9 + 200X_{10} + 230X_{11}$
C1	$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 350$
C2	$X_5 + X_6 + X_7 + X_8 = 550$
C3	$X_9 + X_{10} + X_{11} + X_{12} = 400$
C4	$X_1 + X_5 + X_9 = 500$
C5	$X_2 + X_6 + X_{10} = 300$
C6	$X_3 + X_7 + X_{11} = 250$
C7	$X_4 + X_8 + X_{12} = 250$
Integer:
Binary:
Unrestricted:
X1	$\geq 0, \leq M$
X2	$\geq 0, \leq M$
X3	$\geq 0, \leq M$
X4	$\geq 0, \leq M$
X5	$\geq 0, \leq M$
X6	$\geq 0, \leq M$
X7	$\geq 0, \leq M$
X8	$\geq 0, \leq M$
X9	$\geq 0, \leq M$
X10	$\geq 0, \leq M$
X11	$\geq 0, \leq M$
X12	$\geq 0, \leq M$



Linear and Integer Programming														
Variable ->	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9	X10	X11	X12	Direction	R. H. S.
Minimize	160	120	80		240	50	150		100	200	230		=	350
C1	1	1	1	1									=	550
C2					1	1	1	1					=	400
C3									1	1	1	1	=	500
C4	1				1				1				=	300
C5		1				1				1			=	250
C6			1				1				1		=	250
C7				1				1				1	=	250
LowerBound	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
UpperBound	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M		
VariableType	Integer													

Linear and Integer Programming

File Format Results Utilities Window Help

Combined Report for MANTENIMIENTO AERONAVES

	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(i)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(i)	Allowable Max. c(i)
1	X1	100	160	16000	0	basic	100	240
2	X2	0	120	0	70	at bound	50	M
3	X3	250	80	20000	0	basic	-M	150
4	X4	0	0	0	0	basic	-70	0
5	X5	0	240	0	80	at bound	160	M
6	X6	300	50	15000	0	basic	-M	120
7	X7	0	150	0	70	at bound	80	M
8	X8	250	0	0	0	basic	0	70
9	X9	400	100	40000	0	basic	-M	160
10	X10	0	200	0	210	at bound	-10	M
11	X11	0	230	0	210	at bound	20	M
12	X12	0	0	0	60	at bound	-60	M
	Objective	Function	(Min.) =	91000				
	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
1	C1	350	=	350	0	0	350	600
2	C2	550	=	550	0	0	550	M
3	C3	400	=	400	0	-60	400	500
4	C4	500	=	500	0	160	400	500
5	C5	300	=	300	0	50	0	300
6	C6	250	=	250	0	80	0	250
7	C7	250	=	250	0	0	0	250



La aerolínea Estadística Air va a sacar al mercado cuatro rutas aéreas desde Madrid, cuyos destinos son: Barcelona, Santiago, Sevilla y Málaga. Tres aviones de la compañía se van a hacer cargo de estas rutas, teniendo que hacerse cargo de dos rutas un mismo avión. El número de veces que el avión vuela a ese destino se ha estimado en función de la demanda. Además, cada avión posee unas capacidades de transporte de pasajeros diferentes.

El gestor de la compañía dispone de la capacidad de operaciones adjunta:

	Barcelona	Santiago	Sevilla	Málaga
Avión 1	6	2	5	5
Avión 2	4	6	7	2
Avión 3	6	4	3	3

- a) Establecer como llevar a cabo la asignación para maximizar el rendimiento mediante un método heurístico
- b) Formular la asignación con Programación Lineal (Simplex)

Solución:

a) Para aplicar el Método Húngaro el número de filas y el de columnas debe de ser igual. En consecuencia, hay que crear un Avión Ficticio. No obstante, la compañía aérea ha previsto que uno de los aviones se encargue de dos rutas, en este caso se crea un Avión 2 Bis, con la misma capacidad de operaciones que el Avión 2.

	Barcelona	Santiago	Sevilla	Málaga
Avión 1	6	2	5	5
Avión 2	4	6	7	2
Avión 3	6	4	3	3
Avión 2 bis	4	6	7	2

Una vez que el tabulado se encuentra balanceado hay que encargarse del criterio de optimización. El método Húngaro está diseñado para resolver ejercicios de minimización y ahora el objetivo es maximizar.

Se busca el mayor valor tabulado inicial (7) y se resta éste valor a todas las celdas.

	Barcelona	Santiago	Sevilla	Málaga
Avión 1	1	5	2	2
Avión 2	3	1	0	5
Avión 3	1	3	4	4
Avión 2 bis	3	1	0	5

A partir del nuevo tabulado se puede aplicar el algoritmo del Método Húngaro como se haría en el caso normal de minimización.

1º Se encuentra el menor elemento de cada fila y se resta en cada fila de la matriz el menor elemento encontrado en cada fila:



	Barcelona	Santiago	Sevilla	Málaga
Avión 1	0	4	1	1
Avión 2	3	1	0	5
Avión 3	0	2	3	3
Avión 2 bis	3	1	0	5

2º Se repite en la matriz el mismo proceso con las columnas y se resta en cada columna de la matriz el menor elemento encontrado en cada columna:

	Barcelona	Santiago	Sevilla	Málaga
Avión 1	0	3	1	0
Avión 2	3	0	0	4
Avión 3	0	1	3	2
Avión 2 bis	3	0	0	4

Se traza la menor cantidad de líneas que cubran todos los ceros.

	Barcelona	Santiago	Sevilla	Málaga
Avión 1	0	3	1	0
Avión 2	3	0	0	4
Avión 3	0	1	3	2
Avión 2 bis	3	0	0	4

El algoritmo Húngaro ha finalizado al ser el número de líneas igual al rango de la matriz de costo

ASIGNACIÓN DE MAXIMO RENDIMIENTO:

La matriz de máximo rendimiento se inicia por la fila que tenga menos ceros, tachando los ceros de la fila y columna donde se realizó la asignación

	Barcelona	Santiago	Sevilla	Málaga
Avión 1	0	3	1	0
Avión 2	3	0	0	4
Avión 3	0	1	3	2
Avión 2 bis	3	0	0	4

	Barcelona	Santiago	Sevilla	Málaga
Avión 1	0	3	1	0
Avión 2	3	0	0	4
Avión 3	0	1	3	2
Avión 2 bis	3	0	0	4

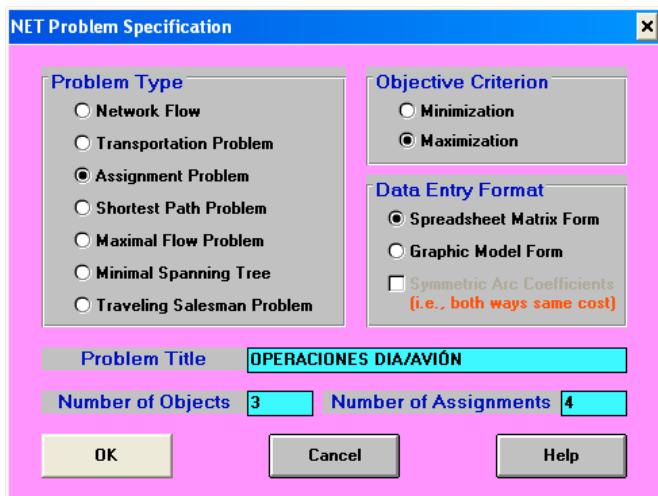


MÁXIMO RENDIMIENTO: Considerando la capacidad de la aerolínea, la cantidad máxima de operaciones que puede hacer al día será:

	Barcelona	Santiago	Sevilla	Málaga
Avión 1				0 / 5
Avión 2			0 / 7	
Avión 3	0 / 6			
Avión 2 bis		0 / 0		

Máximo rendimiento de operaciones realizadas al día: $6 + 7 + 5 = 18$

WinQSB / Network Modeling - Trasnsportation Problem



From \ To	Barcelona	Santiago	Sevilla	Málaga
Avión 1	6	2	5	5
Avión 2	4	6	7	2
Avión 3	6	4	3	1

	From	To	Assignment	Unit Profit	Total Profit	Reduced Cost
1	Avión 1	Málaga	1	5	5	0
2	Avión 2	Sevilla	1	7	7	0
3	Avión 3	Barcelona	1	6	6	0
4	Unfilled_Demand	Santiago	1	0	0	0
	Total	Objective	Function	Value =	18	



b) PROGRAMACIÓN LINEAL (Simplex)

	Barcelona	Santiago	Sevilla	Málaga
Avión 1	6 x_1	2 x_2	5 x_3	5 x_4
Avión 2	4 x_5	6 x_6	7 x_7	2 x_8
Avión 3	6 x_9	4 x_{10}	3 x_{11}	3 x_{12}
Avión 2 bis	4 x_{13}	6 x_{14}	7 x_{15}	2 x_{16}

Función objetivo (16 variables, 8 restricciones):

$$z = 6x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 5x_4 + 4x_5 + 6x_6 + 7x_7 + 2x_8 + 6x_9 + 4x_{10} + 3x_{11} + 3x_{12}$$

En las restricciones hay que considerar que un avión no puede ser asignado a más de una ciudad.

restricciones:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 1 \\ x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} = 1 \\ x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + x_5 + x_9 + x_{11} = 1 \\ x_2 + x_6 + x_{10} + x_{14} = 1 \\ x_3 + x_7 + x_{11} + x_{15} = 1 \\ x_4 + x_8 + x_{12} + x_{16} = 1 \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0$$

Max. WinQSB / Linear and Integer Programming
 CX
 Ax=b

LP-ILP Problem Specification

Problem Title:	OPERACIONES DIA/AVIÓN		
Number of Variables:	16	Number of Constraints:	8
Objective Criterion	Default Variable Type		
<input checked="" type="radio"/> Maximization	<input checked="" type="radio"/> Nonnegative continuous		
<input type="radio"/> Minimization	<input type="radio"/> Nonnegative integer		
<input type="radio"/> Spreadsheet Matrix Form	<input type="radio"/> Binary (0,1)		
<input checked="" type="radio"/> Normal Model Form	<input type="radio"/> Unsigned/unrestricted		
OK	Cancel	Help	



Linear and Integer Programming

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

0.00 A

OPERACIONES DIA/AVIÓN

Maximize	$6X1+2X2+5X3+5X4+4X5+6X6+7X7+2X8+6X9+4X10+3X11+3X12$
	OBJ/Constraint/VariableType/Bound
Maximize	$6X1+2X2+5X3+5X4+4X5+6X6+7X7+2X8+6X9+4X10+3X11+3X12$
Avión 1	$1X1+1X2+1X3+1X4=1$
Avión 2	$1X5+1X6+1X7+1X8=1$
Avión 3	$1X9+1X10+1X11+1X12=1$
Avión 2 bis	$1X13+1X14+1X15+1X16=1$
Barcelona	$1X1+1X5+1X9+1X13=1$
Santiago	$1X2+1X6+1X10+1X14=1$
Sevilla	$1X3+1X7+1X11+1X15=1$
Málaga	$1X4+1X8+1X12+1X16=1$
Integer:	
Binary:	
Unrestricted:	
X1	$>=0, <=M$
X2	$>=0, <=M$
X3	$>=0, <=M$
X4	$>=0, <=M$
X5	$>=0, <=M$
X6	$>=0, <=M$
X7	$>=0, <=M$
X8	$>=0, <=M$
X9	$>=0, <=M$
X10	$>=0, <=M$
X11	$>=0, <=M$
X12	$>=0, <=M$
X13	$>=0, <=M$
X14	$>=0, <=M$
X15	$>=0, <=M$
X16	$>=0, <=M$

Linear and Integer Programming

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

0.00 A

OPERACIONES DIA/AVIÓN

Variable ->	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9	X10	X11	X12	X13	X14	X15	X16	Direction	R. H. S.
Maximize	6	2	5	5	4	6	7	2	6	4	3	3					=	1
Avión 1	1	1	1	1													=	1
Avión 2					1	1	1										=	1
Avión 3									1	1	1	1					=	1
Avión 2 bis													1	1	1	1	=	1
Barcelona	1					1			1				1				=	1
Santiago		1					1			1			1				=	1
Sevilla			1					1			1			1			=	1
Málaga				1					1				1				=	1
LowerBound	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
UpperBound	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M		
VariableType	Continuous																	



Linear and Integer Programming

File Format Results Utilities Window Help

Combined Report for OPERACIONES DIA/AVIÓN

	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(i)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(i)	Allowable Max. c(i)
1	X1	0	6,0000	0	0	basic	4,0000	6,0000
2	X2	0	2,0000	0	-2,0000	at bound	-M	4,0000
3	X3	0	5,0000	0	0	basic	5,0000	6,0000
4	X4	1,0000	5,0000	5,0000	0	basic	4,0000	M
5	X5	0	4,0000	0	-4,0000	at bound	-M	8,0000
6	X6	0	6,0000	0	0	basic	6,0000	7,0000
7	X7	1,0000	7,0000	7,0000	0	basic	6,0000	7,0000
8	X8	0	2,0000	0	-5,0000	at bound	-M	7,0000
9	X9	1,0000	6,0000	6,0000	0	basic	6,0000	M
10	X10	0	4,0000	0	0	at bound	-M	4,0000
11	X11	0	3,0000	0	-2,0000	at bound	-M	5,0000
12	X12	0	3,0000	0	-2,0000	at bound	-M	5,0000
13	X13	0	0	0	-2,0000	at bound	-M	2,0000
14	X14	1,0000	0	0	0	basic	-1,0000	4,0000
15	X15	0	0	0	-1,0000	at bound	-M	1,0000
16	X16	0	0	0	-1,0000	at bound	-M	1,0000
	Objective	Function	(Max.) =	18,0000	(Note:	Alternate	Solution	Exists!!)
	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
1	Avión 1	1,0000	=	1,0000	0	4,0000	1,0000	2,0000
2	Avión 2	1,0000	=	1,0000	0	6,0000	1,0000	2,0000
3	Avión 3	1,0000	=	1,0000	0	4,0000	1,0000	1,0000
4	Avión 2 bis	1,0000	=	1,0000	0	0	1,0000	M
5	Barcelona	1,0000	=	1,0000	0	2,0000	1,0000	1,0000
6	Santiago	1,0000	=	1,0000	0	0	0	1,0000
7	Sevilla	1,0000	=	1,0000	0	1,0000	0	1,0000
8	Málaga	1,0000	=	1,0000	0	1,0000	0	1,0000



La compañía cafetera Alameda dispone de cuatro terrenos disponibles para comercializar su producto. Los terrenos, dependiendo de su ubicación, tienen condiciones particulares de rendimiento. Tres equipos de la compañía cafetera se ocupan del proceso, teniendo un equipo que trabajar en dos terrenos.

La información disponible de capacidad de cosecha se refleja en la tabla adjunta:

	Terreno 1	Terreno 2	Terreno 3	Terreno 4
Equipo A	13	7	12	12
Equipo B	10	13	15	7
Equipo C	13	10	8	8

Disponiendo de la capacidad de cosecha (en cientos de sacos de café) de cada uno de los equipos, realiza la asignación para maximizar el rendimiento.

Solución:

Para aplicar el Método Húngaro el número de filas y el de columnas debe de ser igual.

En consecuencia, hay que crear un Equipo Ficticio (Dummy) y asignarle un número de sacos cosechados equivalente a cero en cada uno de los terrenos.

No obstante, la empresa cafetera ha previsto que uno de los equipos se encargase de dos terrenos, en este caso se crea un Equipo B Bis, que permite prescindir del Equipo Ficticio, con la misma capacidad de cosecha que el Equipo B.

	Terreno 1	Terreno 2	Terreno 3	Terreno 4
Equipo A	13	7	12	12
Equipo B	10	13	15	7
Equipo B Bis	10	13	15	7
Equipo C	13	10	8	8

Una vez que el tabulado se encuentra balanceado hay que encargarse del criterio de optimización, el Método Húngaro está diseñado para resolver ejercicios de minimización y ahora el objetivo es maximizar. Para ello, se busca el mayor valor tabulado inicial, en este caso es 15.

	Terreno 1	Terreno 2	Terreno 3	Terreno 4
Equipo A	13	7	12	12
Equipo B	10	13	15	7
Equipo B Bis	10	13	15	7
Equipo C	13	10	8	8

Se resta a 15 el valor de cada una de las celdas.

	Terreno 1	Terreno 2	Terreno 3	Terreno 4
Equipo A	$15 - 13 = 2$	$15 - 7 = 8$	$15 - 12 = 3$	$15 - 12 = 3$
Equipo B	$15 - 10 = 5$	$15 - 13 = 2$	$15 - 15 = 0$	$15 - 7 = 8$
Equipo B Bis	$15 - 10 = 5$	$15 - 13 = 2$	$15 - 15 = 0$	$15 - 7 = 8$
Equipo C	$15 - 13 = 2$	$15 - 10 = 5$	$15 - 8 = 7$	$15 - 8 = 7$



El tabulado queda:

	Terreno 1	Terreno 2	Terreno 3	Terreno 4
Equipo A	2	8	3	3
Equipo B	5	2	0	8
Equipo B Bis	5	2	0	8
Equipo C	2	5	7	7

A partir del nuevo tabulado se puede aplicar el algoritmo del Método Húngaro como se haría en el caso normal de minimización.

PASO 1: Se encuentra el menor elemento de cada fila.

	Terreno 1	Terreno 2	Terreno 3	Terreno 4
Equipo A	2	8	3	3
Equipo B	5	2	0	8
Equipo B Bis	5	2	0	8
Equipo C	2	5	7	7

PASO 2: Se resta en cada fila de la matriz el menor elemento encontrado en cada fila.

	Terreno 1	Terreno 2	Terreno 3	Terreno 4
Equipo A	$2 - 2 = 0$	$8 - 2 = 6$	$3 - 2 = 1$	$3 - 2 = 1$
Equipo B	$5 - 0 = 5$	$2 - 0 = 2$	$0 - 0 = 0$	$8 - 0 = 8$
Equipo B Bis	$5 - 0 = 5$	$2 - 0 = 2$	$0 - 0 = 0$	$8 - 0 = 8$
Equipo C	$2 - 2 = 0$	$5 - 2 = 3$	$7 - 2 = 5$	$7 - 2 = 5$

PASO 3: Se repite en la matriz el mismo proceso con las columnas.

	Terreno 1	Terreno 2	Terreno 3	Terreno 4
Equipo A	0	6	1	1
Equipo B	5	2	0	8
Equipo B Bis	5	2	0	8
Equipo C	0	3	5	5

Se resta en cada columna de la matriz el menor elemento encontrado en cada columna.

MATRIZ DEL MÁXIMO RENDIMIENTO

	Terreno 1	Terreno 2	Terreno 3	Terreno 4
Equipo A	$0 - 0 = 0$	$6 - 2 = 4$	$1 - 0 = 1$	$1 - 1 = 0$
Equipo B	$5 - 0 = 5$	$2 - 2 = 0$	$0 - 0 = 0$	$8 - 1 = 7$
Equipo B Bis	$5 - 0 = 5$	$2 - 2 = 0$	$0 - 0 = 0$	$8 - 1 = 7$
Equipo C	$0 - 0 = 0$	$3 - 2 = 1$	$5 - 0 = 5$	$5 - 1 = 4$



PASO 4: Se traza la menor cantidad de combinaciones líneas horizontales y verticales con el objetivo de cubrir todos los 0 de la matriz de coste reducido.

	Terreno 1	Terreno 2	Terreno 3	Terreno 4
Equipo A	0	4	1	0
Equipo B	5	0	0	7
Equipo B Bis	5	0	0	7
Equipo C	0	1	5	4

El algoritmo finaliza al ser el número de líneas igual al grado de la matriz.

ASIGNACIÓN: En la matriz de costo reducido se inicia por la fila que tenga menos ceros y tachando los ceros de la fila y columna donde se realizó la asignación.

Primero: Al Equipo C se le asigna el Terreno 1 y se tacha el 0 de la columna del Terreno 1

	Terreno 1	Terreno 2	Terreno 3	Terreno 4
Equipo A	0	4	1	0
Equipo B	5	0	0	7
Equipo B Bis	5	0	0	7
Equipo C	0	1	5	4

Segundo: Al equipo A se asigna el Terreno 4.

	Terreno 1	Terreno 2	Terreno 3	Terreno 4
Equipo A	0	4	1	0
Equipo B	5	0	0	7
Equipo B Bis	5	0	0	7
Equipo C	0	1	5	4

Tercero: El equipo B se encarga del Terreno 3 y el equipo B Bis del Terreno 2.

	Terreno 1	Terreno 2	Terreno 3	Terreno 4
Equipo A	0	4	1	0
Equipo B	5	0	0	7
Equipo B Bis	5	0	0	7
Equipo C	0	1	5	4

MÁXIMO BENEFICIO: Considerando la capacidad de la cosecha, la cantidad máxima de sacos de café cosechados (en cientos) será:

	Terreno 1	Terreno 2	Terreno 3	Terreno 4
Equipo A				0 12
Equipo B			0 15	
Equipo B Bis		0 0		
Equipo C	0 13			



Máximo de sacos cosechados: $100 \times (13 + 15 + 12) = 100 \times 40 = 4.000$ sacos de café

WinQSB / Net Problem Specification - Assignment Problem

NET Problem Specification

Problem Type	Objective Criterion	
<input type="radio"/> Network Flow <input type="radio"/> Transportation Problem <input checked="" type="radio"/> Assignment Problem <input type="radio"/> Shortest Path Problem <input type="radio"/> Maximal Flow Problem <input type="radio"/> Minimal Spanning Tree <input type="radio"/> Traveling Salesman Problem	<input type="radio"/> Minimization <input checked="" type="radio"/> Maximization	
Data Entry Format		
<input checked="" type="radio"/> Spreadsheet Matrix Form <input type="radio"/> Graphic Model Form <input type="checkbox"/> Symmetric Arc Coefficients <small>(i.e., both ways same cost)</small>		
Problem Title	SACOS CAFÉ	
Number of Objects	3	
Number of Assignments	4	
OK	Cancel	Help

SACOS CAFÉ: Maximization (Assignment Problem)

From \ To	Terreno 1	Terreno 2	Terreno 3	Terreno 4
Equipo A	13	7	12	12
Equipo B	10	13	15	7
Equipo C	13	10	8	8

Solution for SACOS CAFÉ: Maximization (Assignment Problem)

1	Equipo A	Terreno 4	1	12	12	0
2	Equipo B	Terreno 3	1	15	15	0
3	Equipo C	Terreno 1	1	13	13	0
4	Unfilled_Demand	Terreno 2	1	0	0	0
Total		Objective	Function	Value =		40

Asignación óptima por el método Húngaro: [Solve and Analyze / Solve and Display Steps Tableau](#)

Hungarian Method for SACOS CAFÉ - Iteration 1

	Terreno 1	Terreno 2	Terreno 3	Terreno 4
Equipo A	0	6	1	1
Equipo B	5	2	0	8
Equipo C	0	3	5	5
Dummy	0	0	0	0


PROGRAMACIÓN LINEAL (Simplex):

Es necesario crear un Equipo Ficticio, de lo contrario el sistema es inestable.

	Terreno 1	Terreno 2	Terreno 3	Terreno 4
Equipo A	13 x_1	7 x_2	12 x_3	12 x_4
Equipo B	10 x_5	13 x_6	15 x_7	7 x_8
Equipo C	13 x_9	10 x_{10}	8 x_{11}	8 x_{12}
Equipo Ficticio	0 x_{13}	0 x_{14}	0 x_{15}	0 x_{16}

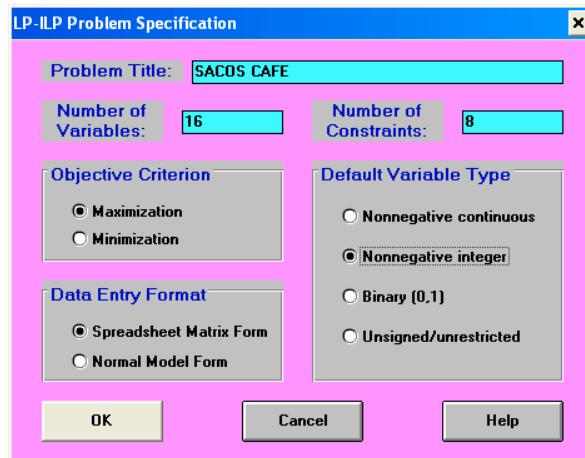
Función objetivo (16 variables, 8 constantes):

Maximizar $z = 13x_1 + 7x_2 + 12x_3 + 12x_4 + 10x_5 + 13x_6 + 15x_7 + 7x_8 + 13x_9 + 10x_{10} + 8x_{11} + 8x_{12}$

restricciones:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 1 \\ x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} = 1 \\ x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + x_5 + x_9 + x_{13} = 1 \\ x_2 + x_6 + x_{10} + x_{14} = 1 \\ x_3 + x_7 + x_{11} + x_{15} = 1 \\ x_4 + x_8 + x_{12} + x_{16} = 1 \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0$$

**Max.
Cx
Ax=b** WinQSB / Linear and Integer Programming


Linear and Integer Programming																								
File	Edit	Format	Solve and Analyze	Results	Utilities	Window	WinQSB	Help																
SACOS CAFE																								
Variable -->	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9	X10	X11	X12	X13	X14	X15	X16	Direction	R. H. S.						
Maximize	13	7	12	12	10	13	15	7	13	10	8	8					=	1						
C1	1	1	1	1													=	1						
C2					1	1	1	1									=	1						
C3									1	1	1	1					=	1						
C4													1	1	1	1	=	1						
C5	1				1				1			1					=	1						
C6		1				1				1			1				=	1						
C7			1				1				1				1		=	1						
C8				1				1				1				1	=	1						
LowerBound	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0								
UpperBound	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M								
VariableType	Integer	Integer	Integer	Integer	Integer	Integer	Integer	Integer	Integer	Integer	Integer	Integer	Integer	Integer	Integer	Integer								



Linear and Integer Programming

File Format Results Utilities Window Help

0.00 A

Combined Report for SACOS CAFE

	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(i)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(i)	Allowable Max. c(i)
1	X1	0	13,0000	0	0	basic	10,0000	13,0000
2	X2	0	7,0000	0	-3,0000	at bound	-M	10,0000
3	X3	0	12,0000	0	0	basic	12,0000	14,0000
4	X4	1,0000	12,0000	12,0000	0	basic	10,0000	M
5	X5	0	10,0000	0	-6,0000	at bound	-M	16,0000
6	X6	0	13,0000	0	0	basic	13,0000	15,0000
7	X7	1,0000	15,0000	15,0000	0	basic	13,0000	15,0000
8	X8	0	7,0000	0	-8,0000	at bound	-M	15,0000
9	X9	1,0000	13,0000	13,0000	0	basic	13,0000	M
10	X10	0	10,0000	0	0	at bound	-M	10,0000
11	X11	0	8,0000	0	-4,0000	at bound	-M	12,0000
12	X12	0	8,0000	0	-4,0000	at bound	-M	12,0000
13	X13	0	0	0	-3,0000	at bound	-M	3,0000
14	X14	1,0000	0	0	0	basic	-2,0000	10,0000
15	X15	0	0	0	-2,0000	at bound	-M	2,0000
16	X16	0	0	0	-2,0000	at bound	-M	2,0000
	Objective Function	(Max.) =	40,0000					







Un proyecto consta de las siguientes actividades, con tiempos en días:

Actividades	Precedentes	Tiempo optimista (a)	Tiempo más probable (m)	Tiempo pesimista (b)
A	-----	1	1	1
B	-----	1	2	3
C	-----	2	3	4
D	A	2	4	6
E	A	1	3	5
F	C	1	2	3
G	C	0	1	2
H	D	5	7	9
I	D	6	8	10
J	B, E, F	5	7	15
K	B, E, F	6	7	8
L	G	3	5	7
M	H	1	1	1
N	I, J	1	2	3
O	K, L	2	3	4
P	M, N	3	4	5
Q	O, P	1	2	3

Se desea conocer:

- El menor número de semanas en las que se puede terminar el proyecto. ¿Qué actividades se pueden retrasar dos días sin que se vea afectada la duración del proyecto?
- ¿Cómo se ve afectada la duración total del proyecto si la actividad J se retrasa dos días?. ¿Cómo se ve afectada la duración total del proyecto si la actividad M se retrasa 4 días y la actividad J se retrasa un día?
- ¿Cuál es la probabilidad de terminar el proyecto antes de 22 días? ¿Qué plazos de ejecución tienen un 90% de probabilidad de cumplirse?

Solución:

Para conocer el menor número de semanas que puede durar el proyecto hay que calcular el camino crítico.

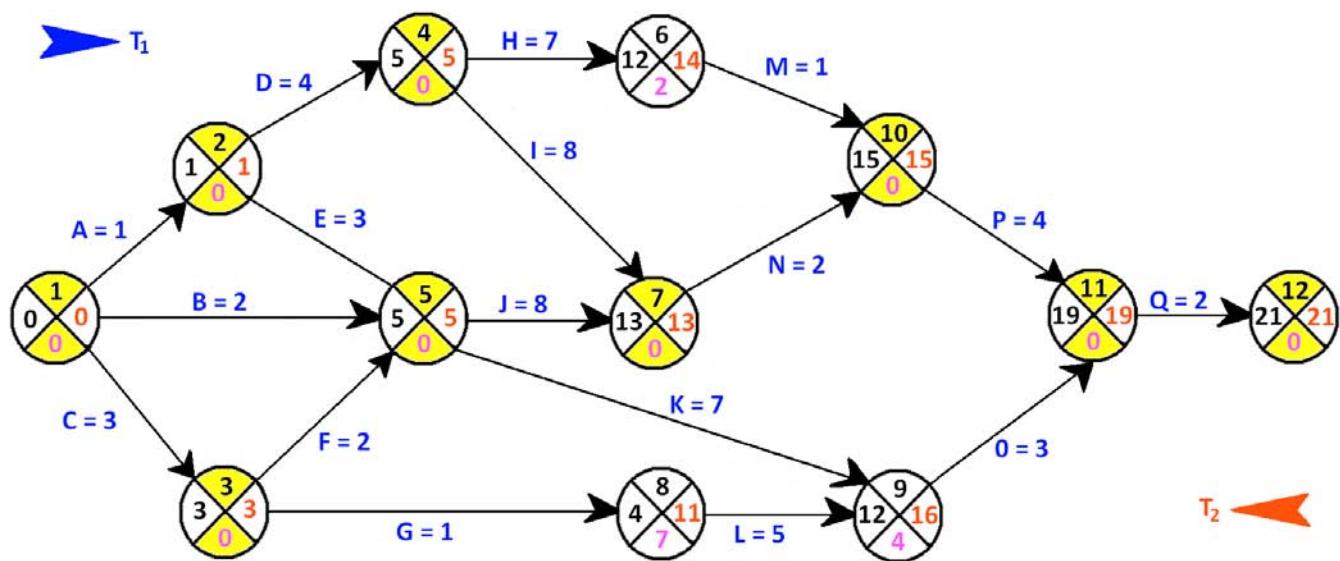
Se calcula el tiempo esperado (tiempo Pert) de cada actividad $t_e(A) = \frac{a + 4m + b}{6}$ y su varianza

$$\sigma_A^2 = \frac{(b - a)^2}{36}$$

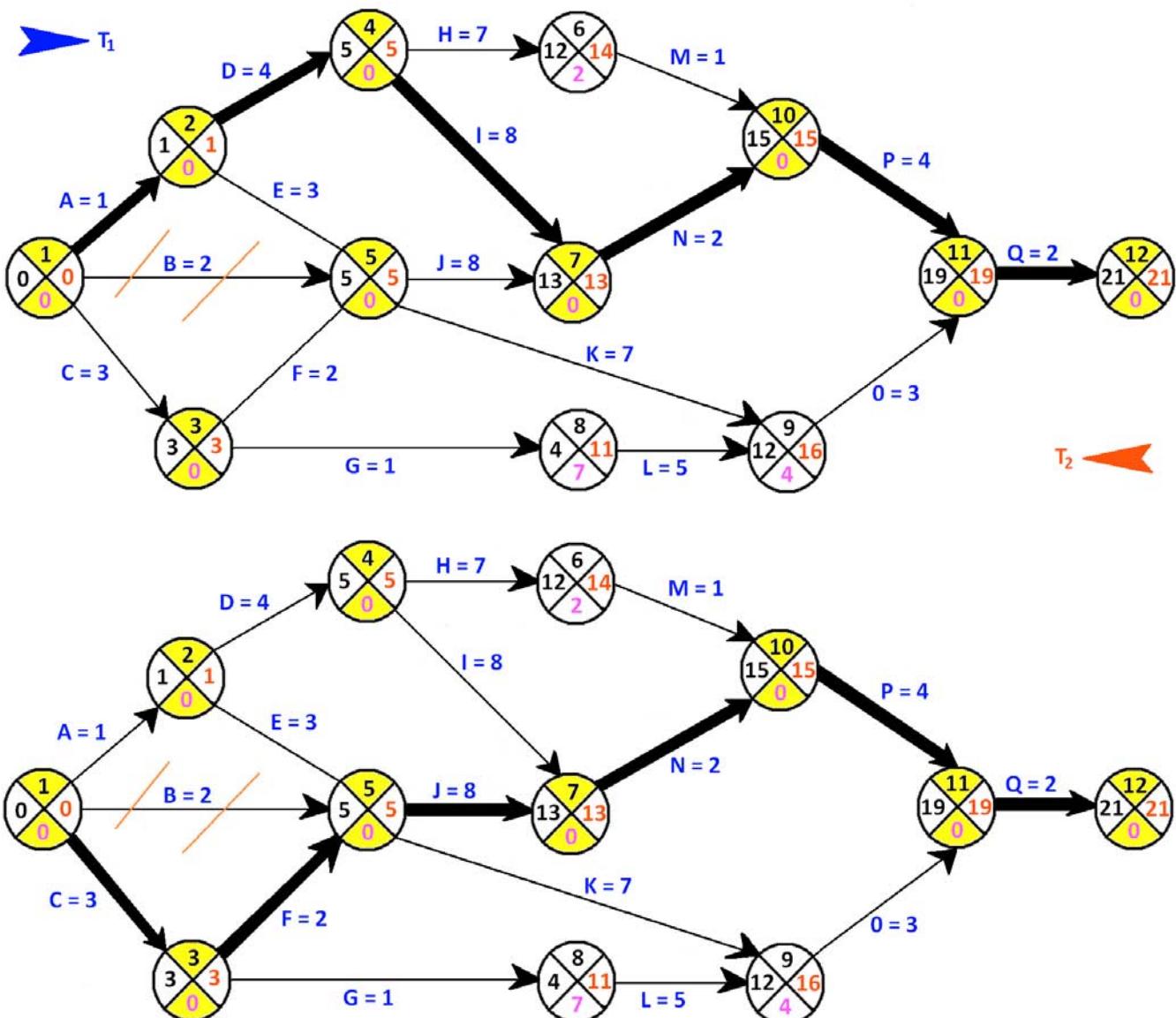


Actividad	Precedente	Tiempo optimista a	Tiempo más probable m	Tiempo pesimista b	Tiempo Pert t _e	Varianza σ ² _{actividad}
A	-----	1	1	1	1	0
B	-----	1	2	3	2	4/36
C	-----	2	3	4	3	4/36
D	A	2	4	6	4	16/36
E	A	1	3	5	3	16/36
F	C	1	2	3	2	4/36
G	C	0	1	2	1	4/36
H	D	5	7	9	7	16/36
I	D	6	8	10	8	16/36
J	B, E, F	5	7	15	8	100/36
K	B, E, F	6	7	8	7	4/36
L	G	3	5	7	5	16/36
M	H	1	1	1	1	0
N	I, J	1	2	3	2	4/36
O	K, L	2	3	4	3	4/36
P	M, N	3	4	5	4	4/36
Q	O, P	1	2	3	2	4/36

El grafo Pert determinando los tiempos más tempranos (early) y tardíos (last) y holgura de cada actividad:



El camino crítico esta formado por las actividades críticas en las que el tiempo *early* y *last* son iguales (situaciones críticas, con holgura cero), aquellas que no admiten retraso en su ejecución ya que esto implicaría un retraso general del proyecto.



En el proyecto existen dos caminos críticos formados por las actividades:

Camino 1: A , D , I , N , P , Q Camino 2: C , F , J , N , P , Q

Cuando existen dos o más caminos críticos se debe utilizar la distribución con tiempos de finalización con mayor varianza (el que comete mayor error).

La duración del proyecto en ambos caminos críticos es de $\mu_{\text{Proyecto}} = 21$ días, la varianza de los caminos será:

$$\sigma_{\text{Camino 1}}^2 = \sigma_A^2 + \sigma_D^2 + \sigma_I^2 + \sigma_N^2 + \sigma_P^2 + \sigma_Q^2 = 0 + \frac{16}{36} + \frac{16}{36} + \frac{4}{36} + \frac{4}{36} + \frac{4}{36} = \frac{44}{36} \text{ días}^2$$

$$\sigma_{\text{Camino 2}}^2 = \sigma_C^2 + \sigma_F^2 + \sigma_J^2 + \sigma_N^2 + \sigma_P^2 + \sigma_Q^2 = \frac{4}{36} + \frac{4}{36} + \frac{100}{36} + \frac{4}{36} + \frac{4}{36} + \frac{4}{36} = \frac{120}{36} \text{ días}^2$$

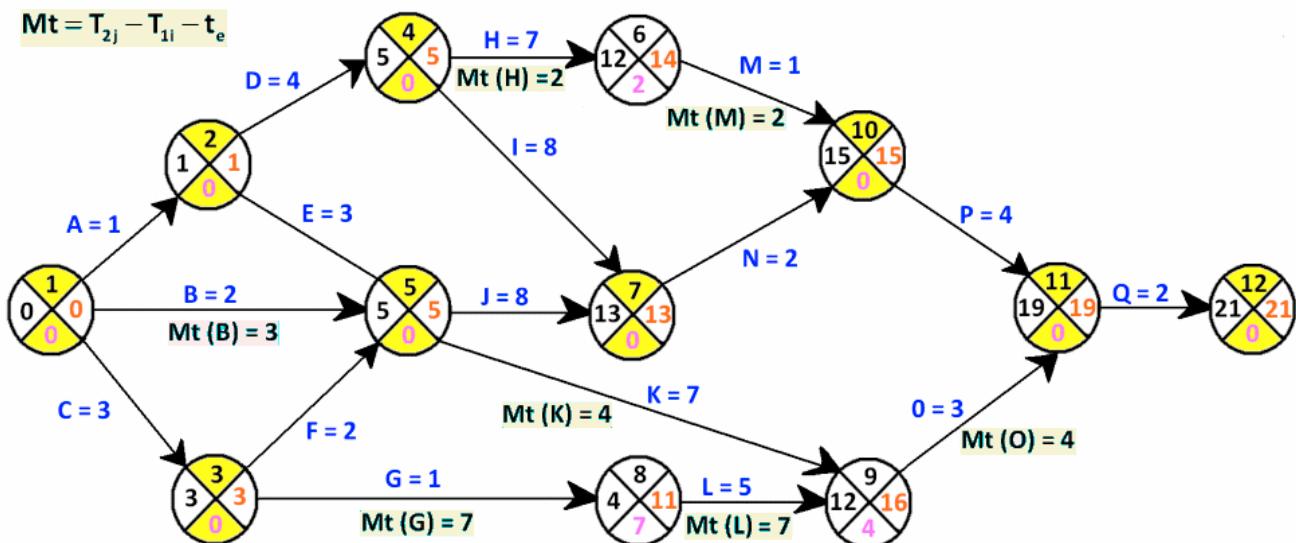
$$\sigma_{\text{Proyecto}} = \sqrt{\frac{120}{36}} = 1,83 \text{ días}$$



La distribución del tiempo de finalización del proyecto, de acuerdo con el Teorema Central del Límite (TCL), sigue una distribución normal $N(21, 1,83)$

Las actividades que se pueden retrasar dos semanas sin que se vea afectada la duración del proyecto serán aquellas cuya margen total sea igual o mayor que 2, es decir, las actividades que

$Mt = T_{2j} - T_{1i} - t_e \geq 2$ Actividades con Holgura mayor o igual que 2 días.



Las actividades que se pueden retrasar 2 días son: B, G, H, K, L, M, O

b) Siendo J una actividad crítica la duración del proyecto se retrasaría en 2 días, con lo que duración del proyecto sería de 23 días y el camino crítico C, F, J, N, P, Q dejaría de ser crítico.

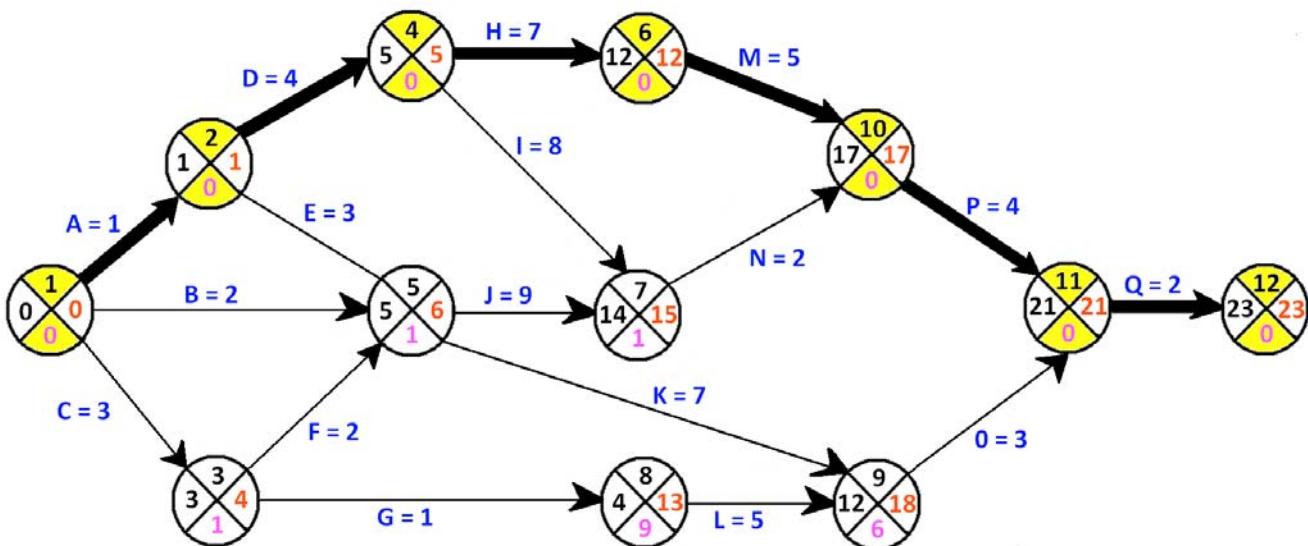
Si la actividad M se retrasa en 4 días, como su margen total es de 2 semanas, retrasaría el proyecto en 2 días, con lo que el camino crítico sería de 23 días.

Si la actividad crítica J se retrasa en 1 semana, el proyecto también se retrasaría 1 día siendo el retraso menor que el provocado por la actividad M.

En consecuencia, el proyecto en general se retrasa 2 días y pasa a tener una duración de 23 días.

Ambos caminos (Camino 1 y Camino 2) dejan de ser críticos, apareciendo un nuevo camino crítico:

A, D, H, M, P, Q



c) La distribución del tiempo de finalización del proyecto sigue una distribución normal $N(21, 1,83)$

La probabilidad de finalizar el proyecto en 22 días:

$$P(X \leq 22) = P\left[\frac{X-21}{1,83} \leq \frac{22-21}{1,83}\right] = P(z \leq 0,54) = 0,7054 \text{ (70,54%)}$$

Los plazos de ejecución que tienen un 90% de probabilidad de cumplirse son:

$$P(X \leq k) = P\left[\frac{X-21}{1,83} \leq \frac{k-21}{1,83}\right] = P\left[z \leq \frac{k-21}{1,83}\right] = 0,9 \Leftrightarrow \frac{k-21}{1,83} = 1,28$$

$$k = 21 + 1,83 \times 1,28 = 23,34 \text{, entre 23 y 24 días}$$



WinQSB / PERT- CPM / Problem Specification

Problem Specification

Problem Title: PROYECTO	
Number of Activities: 17	
Time Unit: días	
Problem Type: <input type="radio"/> Deterministic CPM <input checked="" type="radio"/> Probabilistic PERT	Select CPM Data Field: <input checked="" type="checkbox"/> Normal Time <input type="checkbox"/> Crash Time <input type="checkbox"/> Normal Cost <input type="checkbox"/> Crash Cost <input type="checkbox"/> Actual Cost <input type="checkbox"/> Percent Complete
Data Entry Format: <input checked="" type="radio"/> Spreadsheet <input type="radio"/> Graphic Model	Activity Time Distribution: 3-Time estimate Choose Activity Time Distribution
<input type="button" value="OK"/> <input type="button" value="Cancel"/> <input type="button" value="Help"/>	



PERT/CPM

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

PROYECTO

Activity Number	Activity Name	Immediate Predecessor (list number/name, separated by ',')	Optimistic time (a)	Most likely time (m)	Pessimistic time (b)
1	A		1	1	1
2	B		1	2	3
3	C		2	3	4
4	D	A	2	4	6
5	E	A	1	3	5
6	F	C	1	2	3
7	G	C	0	1	2
8	H	D	5	7	9
9	I	D	6	8	10
10	J	B,E,F	5	7	15
11	K	B,E,F	6	7	8
12	L	G	3	5	7
13	M	H	1	1	1
14	N	I,J	1	2	3
15	O	K,L	2	3	4
16	P	M,N	3	4	5
17	Q	O,P	1	2	3

a)

Activity Analysis for PROYECTO

	Activity Name	On Critical Path	Activity Mean Time	Earliest Start	Earliest Finish	Latest Start	Latest Finish	Slack (LS-ES)	Activity Time Distribution	Standard Deviation
1	A	Yes	1	0	1	0	1	0	3-Time estimate	0
2	B	no	2	0	2	3	5	3	3-Time estimate	0,3333
3	C	Yes	3	0	3	0	3	0	3-Time estimate	0,3333
4	D	Yes	4	1	5	1	5	0	3-Time estimate	0,6667
5	E	no	3	1	4	2	5	1	3-Time estimate	0,6667
6	F	Yes	2	3	5	3	5	0	3-Time estimate	0,3333
7	G	no	1	3	4	10	11	7	3-Time estimate	0,3333
8	H	no	7	5	12	7	14	2	3-Time estimate	0,6667
9	I	Yes	8	5	13	5	13	0	3-Time estimate	0,6667
10	J	Yes	8	5	13	5	13	0	3-Time estimate	1,6667
11	K	no	7	5	12	9	16	4	3-Time estimate	0,3333
12	L	no	5	4	9	11	16	7	3-Time estimate	0,6667
13	M	no	1	12	13	14	15	2	3-Time estimate	0
14	N	Yes	2	13	15	13	15	0	3-Time estimate	0,3333
15	O	no	3	12	15	16	19	4	3-Time estimate	0,3333
16	P	Yes	4	15	19	15	19	0	3-Time estimate	0,3333
17	Q	Yes	2	19	21	19	21	0	3-Time estimate	0,3333
	Project	Completion	Time	=	21	días				
	Number of	Critical	Path(s)	=	2					

Activity Mean Time: Tiempo Pert

Project Completion Time: Tiempo de terminación del proyecto en 21 días



Number of Critical Path(s): 2 rutas críticas

Results / Show Critical Path

Hay dos rutas críticas:

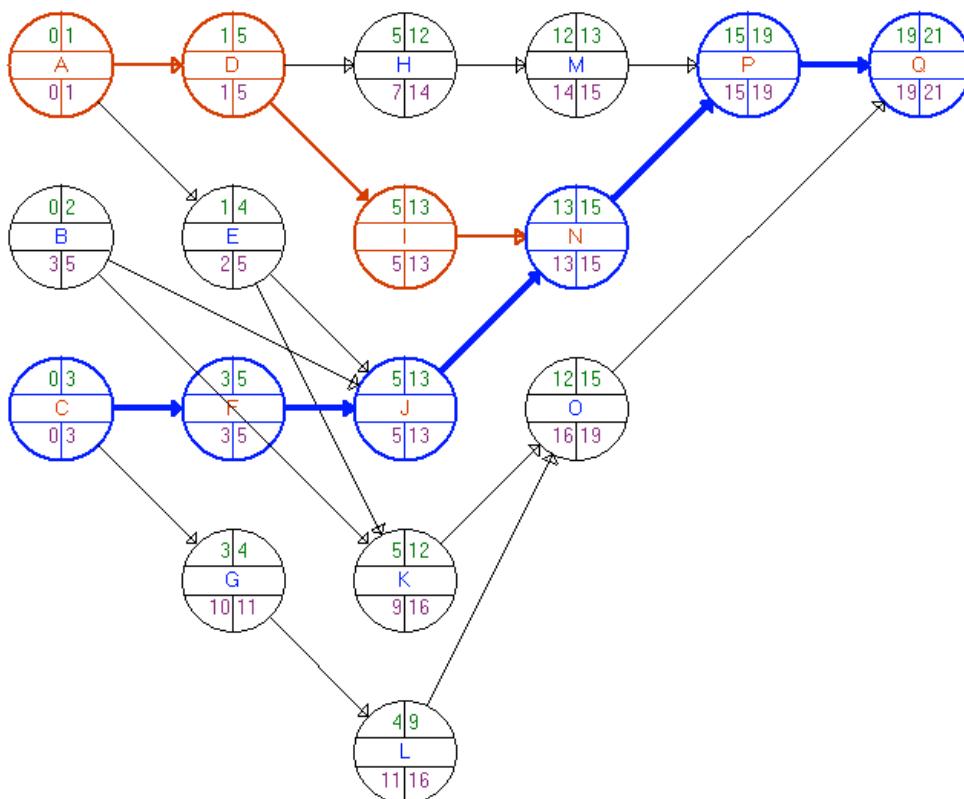
$$C_1 \equiv A - D - I - N - P - Q$$

$$C_2 \equiv C - F - J - N - P - Q$$

Se elige la ruta crítica con mayor desviación típica: $\sigma_2 = 1,83$

Critical Path(s) for PROYECTO		
	Critical Path 1	Critical Path 2
1	A	C
2	D	F
3	I	J
4	N	N
5	P	P
6	Q	Q
Completion Time	21	21
Std. Dev.	1,11	1,83

Después de personalizar el gráfico: Format / Switch Graphic Model - Results / Graphic Activity Analysis





b) Las actividades que se pueden retrasar 2 días sin afectar a la duración total del proyecto son aquellas que tienen una holgura $H \geq 2$. Actividades: B, G, H, K, L, M, Q

Si la actividad J se retrasa 2 días.

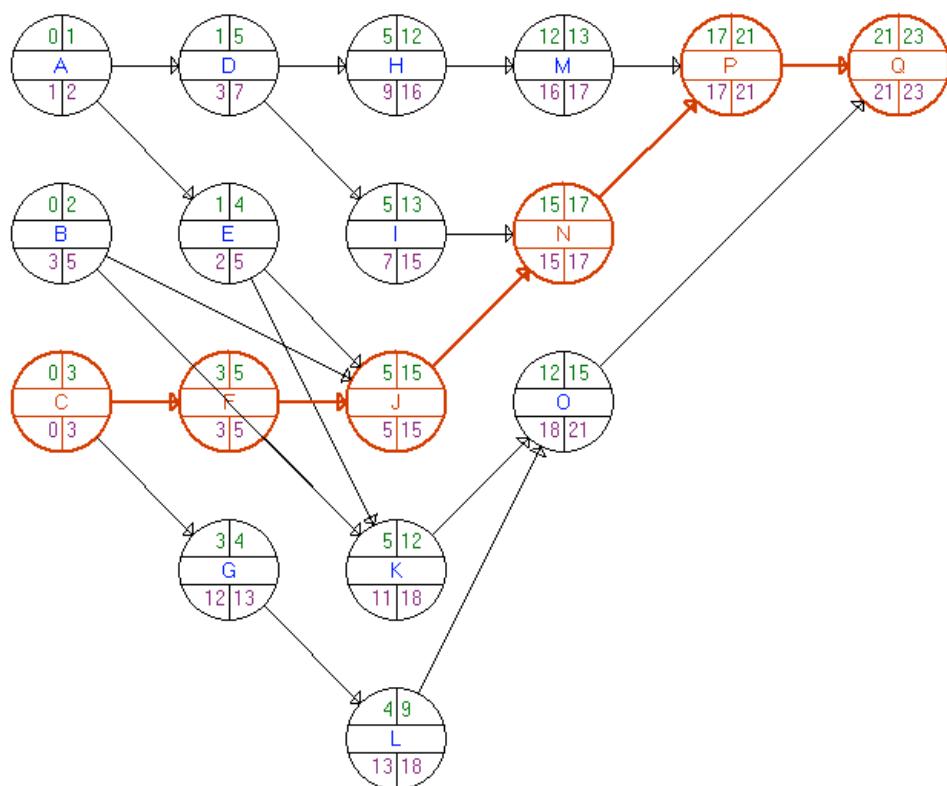
PERT/CPM					
File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help					
PROYECTO					
Activity Number	Activity Name	Immediate Predecessor (list number/name, separated by ',')	Optimistic time (a)	Most likely time (m)	Pessimistic time (b)
1	A		1	1	1
2	B		1	2	3
3	C		2	3	4
4	D	A	2	4	6
5	E	A	1	3	5
6	F	C	1	2	3
7	G	C	0	1	2
8	H	D	5	7	9
9	I	D	6	8	10
10	J	B,E,F	7	9	17
11	K	B,E,F	6	7	8
12	L	G	3	5	7
13	M	H	1	1	1
14	N	I,J	1	2	3
15	O	K,L	2	3	4
16	P	M,N	3	4	5
17	Q	O,P	1	2	3

Activity Analysis for PROYECTO											
	Activity Name	On Critical Path	Activity Mean Time	Earliest Start	Earliest Finish	Latest Start	Latest Finish	Slack (LS-ES)	Activity Time Distribution	Standard Deviation	
1	A	no	1	0	1	1	2	1	3-Time estimate	0	
2	B	no	2	0	2	3	5	3	3-Time estimate	0,3333	
3	C	Yes	3	0	3	0	3	0	3-Time estimate	0,3333	
4	D	no	4	1	5	3	7	2	3-Time estimate	0,6667	
5	E	no	3	1	4	2	5	1	3-Time estimate	0,6667	
6	F	Yes	2	3	5	3	5	0	3-Time estimate	0,3333	
7	G	no	1	3	4	12	13	9	3-Time estimate	0,3333	
8	H	no	7	5	12	9	16	4	3-Time estimate	0,6667	
9	I	no	8	5	13	7	15	2	3-Time estimate	0,6667	
10	J	Yes	10	5	15	5	15	0	3-Time estimate	1,6667	
11	K	no	7	5	12	11	18	6	3-Time estimate	0,3333	
12	L	no	5	4	9	13	18	9	3-Time estimate	0,6667	
13	M	no	1	12	13	16	17	4	3-Time estimate	0	
14	N	Yes	2	15	17	15	17	0	3-Time estimate	0,3333	
15	O	no	3	12	15	18	21	6	3-Time estimate	0,3333	
16	P	Yes	4	17	21	17	21	0	3-Time estimate	0,3333	
17	Q	Yes	2	21	23	21	23	0	3-Time estimate	0,3333	
		Project Completion Time	=	23	días						
Number of Critical Path(s)		=	1								


[Results / Show Critical Path](#)

$$C_3 \equiv C - F - J - N - P - Q$$

Critical Path(s) for PROYECTO	
	Critical Path 1
1	C
2	F
3	J
4	N
5	P
6	Q
Completion Time	23
Std. Dev.	1,83



Si la actividad J se retrasa 2 días (no tiene holgura) retrasaría el proyecto, quedaría en 23 días, con la ruta crítica: $C_3 \equiv C - F - J - N - P - Q$



Si la actividad M se retrasa 4 días (tiene una holgura de 2 días, grafo adjunto) retrasaría el proyecto en 2 días, con lo que los caminos críticos C_1 y C_2 dejarían de serlo.

Modificando los datos de entrada, aparece una nueva ruta crítica con una duración de 23 días.

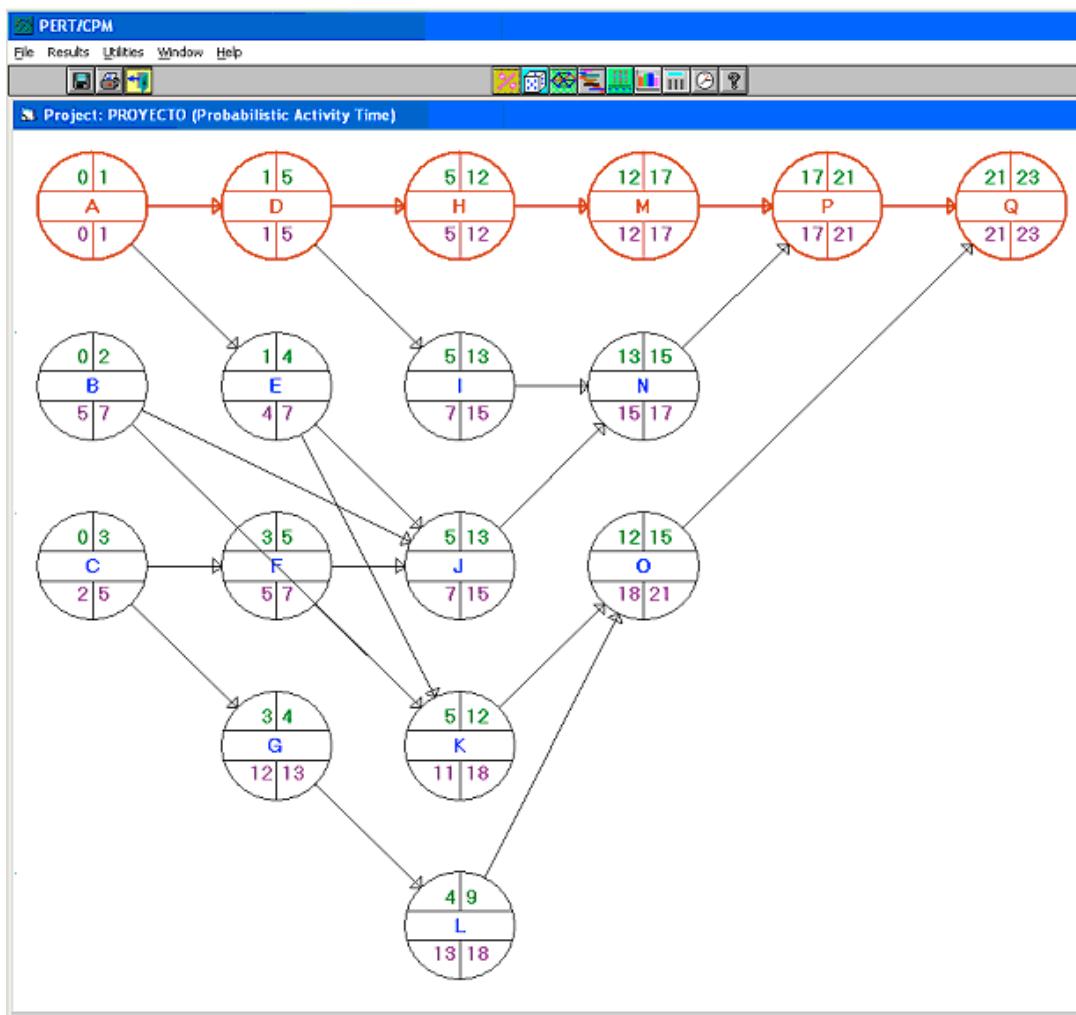
PERT/CPM

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

PROYECTO

Activity Number	Activity Name	Immediate Predecessor [list number/name, separated by ',']	Optimistic time (a)	Most likely time (m)	Pessimistic time (b)
1	A		1	1	1
2	B		1	2	3
3	C		2	3	4
4	D	A	2	4	6
5	E	A	1	3	5
6	F	C	1	2	3
7	G	C		1	2
8	H	D	5	7	9
9	I	D	6	8	10
10	J	B,E,F	5	7	15
11	K	B,E,F	6	7	8
12	L	G	3	5	7
13	M	H	5	5	5
14	N	I,J	1	2	3
15	O	K,L	2	3	4
16	P	M,N	3	4	5
17	Q	O,P	1	2	3

	Activity Name	On Critical Path	Activity Mean Time	Earliest Start	Earliest Finish	Latest Start	Latest Finish	Slack (LS-ES)	Activity Time Distribution	Standard Deviation
1	A	Yes	1	0	1	0	1	0	3-Time estimate	0
2	B	no	2	0	2	5	7	5	3-Time estimate	0,3333
3	C	no	3	0	3	2	5	2	3-Time estimate	0,3333
4	D	Yes	4	1	5	1	5	0	3-Time estimate	0,6667
5	E	no	3	1	4	4	7	3	3-Time estimate	0,6667
6	F	no	2	3	5	5	7	2	3-Time estimate	0,3333
7	G	no	1	3	4	12	13	9	3-Time estimate	0,3333
8	H	Yes	7	5	12	5	12	0	3-Time estimate	0,6667
9	I	no	8	5	13	7	15	2	3-Time estimate	0,6667
10	J	no	8	5	13	7	15	2	3-Time estimate	1,6667
11	K	no	7	5	12	11	18	6	3-Time estimate	0,3333
12	L	no	5	4	9	13	18	9	3-Time estimate	0,6667
13	M	Yes	5	12	17	12	17	0	3-Time estimate	0
14	N	no	2	13	15	15	17	2	3-Time estimate	0,3333
15	O	no	3	12	15	18	21	6	3-Time estimate	0,3333
16	P	Yes	4	17	21	17	21	0	3-Time estimate	0,3333
17	Q	Yes	2	21	23	21	23	0	3-Time estimate	0,3333
	Project	Completion	Time	=	23	días		Holgura		
	Number of	Critical	Path(s)	=	1					



Si la actividad M se retrasa 4 días (tiene una holgura de 2 días) retrasaría el proyecto 2 días, el proyecto quedaría en 23 días, con la ruta crítica: $C_4 \equiv A - D - H - M - P - Q$



Si la actividad J se retrasa 2 días (no tiene holgura, camino crítico) retrasaría el proyecto 2 días y la actividad M se retrasa 4 días (tiene una holgura de 2 días) retrasaría el proyecto 2 días, dejando el proyecto final en dos días más (23 días).

Modificando los datos de entrada:

Activity Number	Activity Name	Immediate Predecessor (list number/name, separated by ',')	Optimistic time (a)	Most likely time (m)	Pessimistic time (b)
1	A		1	1	1
2	B		1	2	3
3	C		2	3	4
4	D	A	2	4	6
5	E	A	1	3	5
6	F	C	1	2	3
7	G	C		1	2
8	H	D	5	7	9
9	I	D	6	8	10
10	J	B,E,F	7	9	17
11	K	B,E,F	6	7	8
12	L	G	3	5	7
13	M	H	5	5	5
14	N	I,J	1	2	3
15	O	K,L	2	3	4
16	P	M,N	3	4	5
17	Q	O,P	1	2	3

	Activity Name	On Critical Path	Activity Mean Time	Earliest Start	Earliest Finish	Latest Start	Latest Finish	Slack (LS-ES)	Activity Time Distribution	Standard Deviation
1	A	Yes	1	0	1	0	1	0	3-Time estimate	0
2	B	no	2	0	2	3	5	3	3-Time estimate	0,3333
3	C	Yes	3	0	3	0	3	0	3-Time estimate	0,3333
4	D	Yes	4	1	5	1	5	0	3-Time estimate	0,6667
5	E	no	3	1	4	2	5	1	3-Time estimate	0,6667
6	F	Yes	2	3	5	3	5	0	3-Time estimate	0,3333
7	G	no	1	3	4	12	13	9	3-Time estimate	0,3333
8	H	Yes	7	5	12	5	12	0	3-Time estimate	0,6667
9	I	no	8	5	13	7	15	2	3-Time estimate	0,6667
10	J	Yes	10	5	15	5	15	0	3-Time estimate	1,6667
11	K	no	7	5	12	11	18	6	3-Time estimate	0,3333
12	L	no	5	4	9	13	18	9	3-Time estimate	0,6667
13	M	Yes	5	12	17	12	17	0	3-Time estimate	0
14	N	Yes	2	15	17	15	17	0	3-Time estimate	0,3333
15	O	no	3	12	15	18	21	6	3-Time estimate	0,3333
16	P	Yes	4	17	21	17	21	0	3-Time estimate	0,3333
17	Q	Yes	2	21	23	21	23	0	3-Time estimate	0,3333
	Project Completion Time	=	23	días						
	Number of Critical Path(s)	=	2							

Number of Critical Path(s): 2 rutas críticas

Results / Show Critical Path

Hay dos rutas críticas:

$C_5 \equiv A - D - H - M - P - Q$

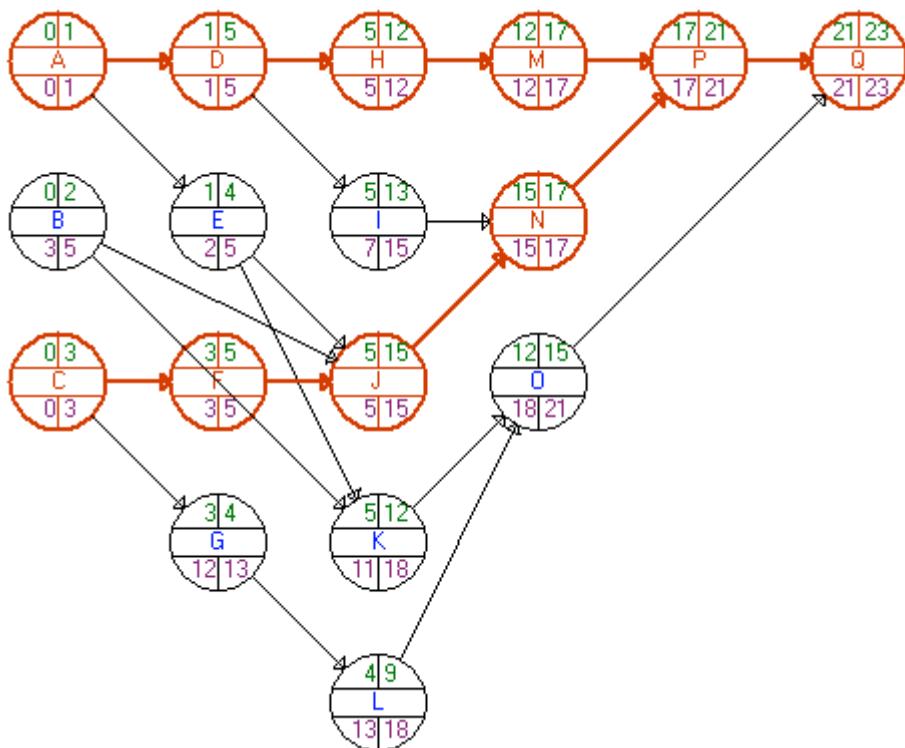
$C_6 \equiv C - F - J - N - P - Q$

Se elige la ruta crítica con mayor desviación típica: $\sigma_2 = 1,83$

Critical Path(s) for PROYECTO		
	Critical Path 1	Critical Path 2
1	A	C
2	D	F
3	H	J
4	M	N
5	P	P
6	Q	Q
Completion Time	23	23
Std. Dev.	1,05	1,83



Se observa que se toma la misma ruta crítica que cuando solamente se retrasa la actividad crítica J 2 días (no tiene holgura). Ruta crítica: C – F – J – N – P – Q



- e) Probabilidad de finalizar el proyecto en 20 días.

Solve and Analyze / Perform Probability Analysis

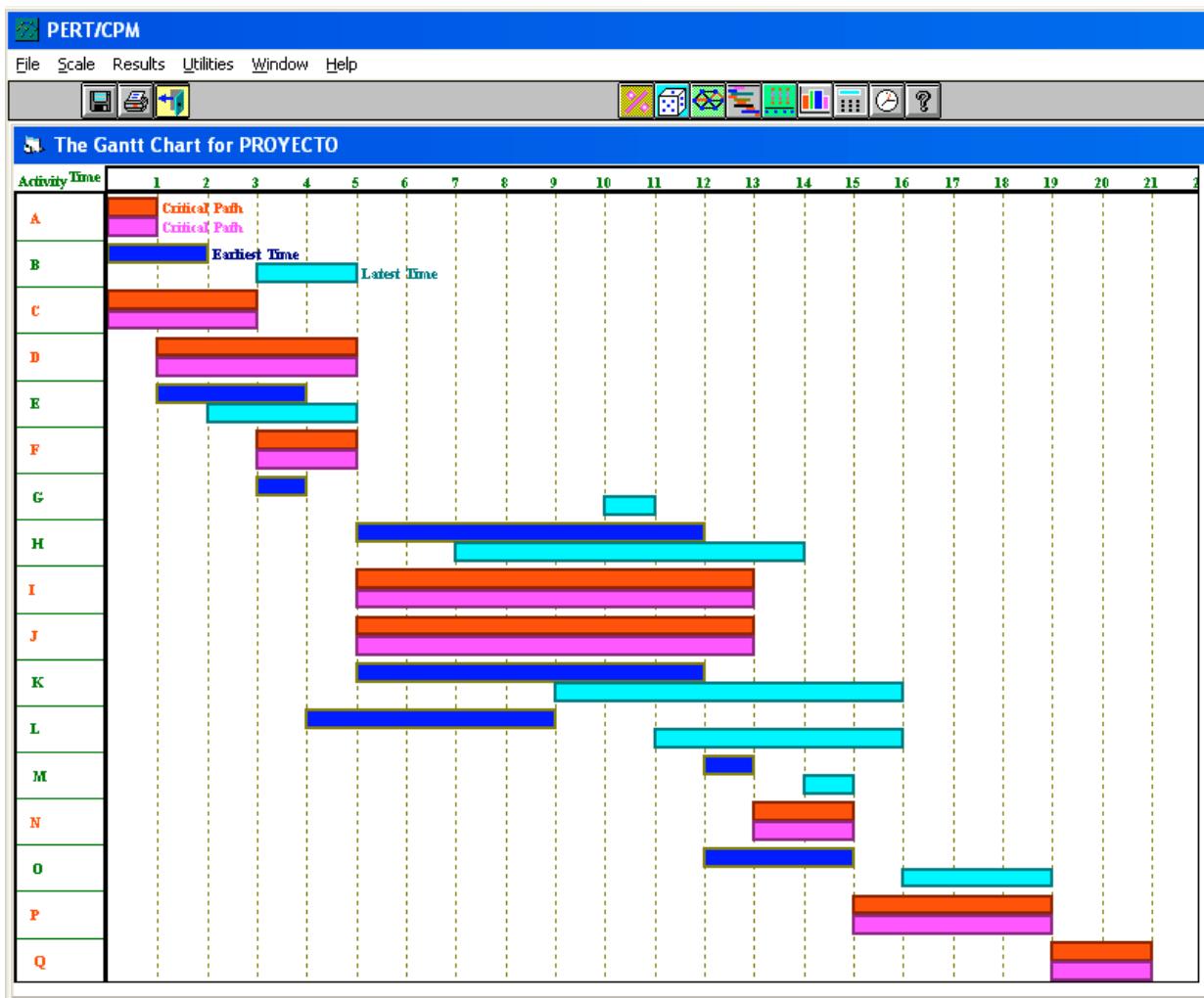
Probability Analysis

The following probability calculation assumes that activities are independent and so are paths. It also assumes that the project has a large enough number of activities to assume the normal distribution, which is used to estimate the probability of finishing a critical path in the desired time. Therefore, when the activities are not independent or the number of activities is not large, the analysis may be biased.

Completion time based on mean/expected time:	21 días			
Number of critical paths:	2			
Desired completion time in dia:	22			
Critical Path: Standard Dev.: Probability:				
A → D → I → N → P → Q	1,1055	0,8171		
C → F → J → N → P → Q	1,8257	0,7080		
Overall Project		0,5786		
Compute Probability		Cancel	Print	Help



Diagrama de Gantt: Results / Gantt Chart





Una compañía se encarga de la construcción de dos tipos de invernaderos (de malla o de plástico y de plancha). Habiendo definido las actividades en semanas, se tiene:

Actividad	Tiempo optimista (a)	Tiempo más probable (m)	Tiempo pesimista (b)	Actividad Precedente
A	1	2	9	-----
B	4	7	10	-----
C	2	8	14	B
D	1	2	9	A, B
E	4	7	16	C
F	5	8	17	C
G	0	3	6	D
H	2	2	2	E, F

a) Calcular el camino crítico y duración esperada del proyecto. Determinar la probabilidad de finalizar el proyecto a lo sumo en 29 semanas.

b) Matriz de Zaderenko

Solución:

a) Se calcula el tiempo esperado y varianza de cada actividad:

$$t_e(A) = \frac{a + 4m + b}{6} = \frac{1 + 4 \times 2 + 9}{6} = 3$$

$$\sigma_A^2 = \text{Var}(A) = \frac{(9-1)^2}{36} = 1,78$$

$$t_e(C) = \frac{a + 4m + b}{6} = \frac{2 + 4 \times 8 + 14}{6} = 8$$

$$\sigma_C^2 = \text{Var}(C) = \frac{(14-2)^2}{36} = 4$$

:

:

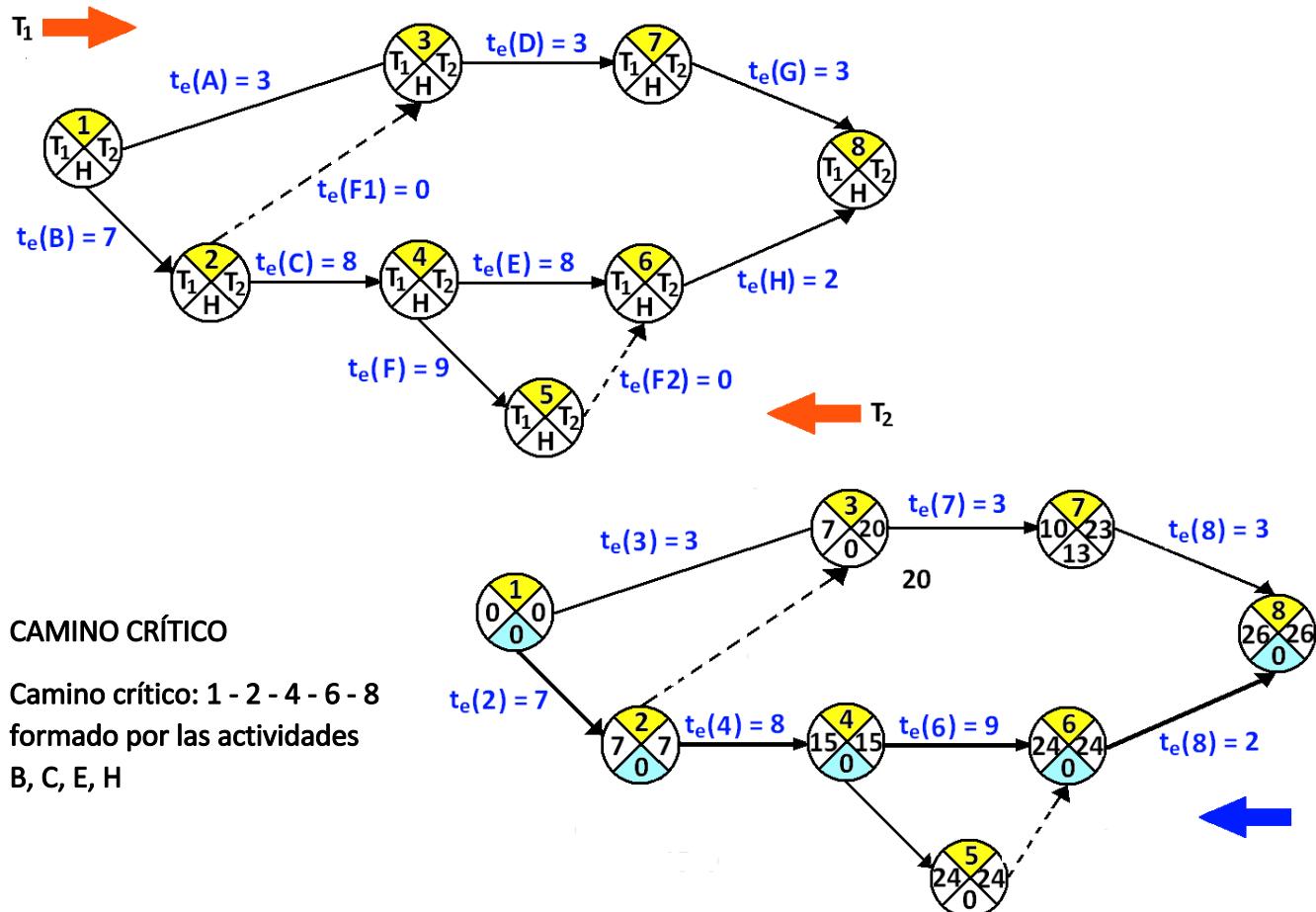
$$t_e(H) = \frac{a + 4m + b}{6} = \frac{2 + 4 \times 2 + 2}{6} = 2$$

$$\sigma_H^2 = \text{Var}(H) = \frac{(2-2)^2}{36} = 0$$

Actividad	Tiempo optimista (a)	Tiempo más probable (m)	Tiempo pesimista (b)	Tiempo esperado t_e	Varianza Var
A	1	2	9	3	1,78
B	4	7	10	7	1
C	2	8	14	8	4
D	1	2	9	3	1,78
E	4	7	16	8	4
F	5	8	17	9	4
G	0	3	6	3	1
H	2	2	2	2	0



A partir del cuadro de prelaciones y del tiempo esperado (tiempo Pert) se puede construir la red PERT, colocando sobre cada arco una letra que designa la actividad correspondiente, así como el tiempo esperado t_e asociado a cada una de las actividades.



CÁLCULO DE LA DESVIACIÓN ESTÁNDAR Y PROBABILIDADES: Considerando las actividades que comprende la ruta crítica.

Duración del proyecto:

$$\mu_{\text{PROYECTO}} = t_e(2) + t_e(4) + t_e(6) + t_e(8) = 7 + 8 + 9 + 2 = 26$$

Varianza del proyecto:

$$\sigma_{\text{PROYECTO}}^2 = \sigma_2^2 + \sigma_4^2 + \sigma_6^2 + \sigma_8^2 = 1 + 4 + 4 + 0 = 9 \text{ semanas}^2$$

Desviación estándar del proyecto: $\sigma_{\text{PROYECTO}} = \sqrt{9} = 3$ semanas

En caso de que existiesen dos o más caminos críticos, se deberá utilizar la distribución con tiempos de finalización con mayor varianza.

La distribución del tiempo de finalización del proyecto, de acuerdo con el Teorema Central del Límite (TCL), sigue una distribución normal $N(26, 3)$

La probabilidad de que el proyecto finalice a lo sumo en 29 semanas



$$P(X \leq 29) = P\left[\frac{X-26}{3} \leq \frac{29-26}{3}\right] = P(z \leq 1) = 0,8414$$

Se termina el proyecto como mucho en 29 semanas en un 84,14% de los casos.

b) MATRIZ DE ZADERENKO

CÁLCULO COLUMNA T_1

Se rellena la matriz con las duraciones de las actividades y se comienza llenando la columna de las actividades T_1 (Tiempo más temprano de un suceso, Early). Se elige columna y se toma el mayor valor.

PRIMERA ACTIVIDAD: El primer tiempo T_1 es cero.

SEGUNDA ACTIVIDAD: Para calcular el segundo elemento T_1 se elige la columna del elemento que se está calculando (2) y para cada celda con valor se realiza el cálculo:

$$T_1 + \text{duración de la actividad} = 0 + 7 = 7$$

T_1	ACTIV	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	*	7	3					
$0 + 7 = 7$	2		*	0	8				
	3			*				3	
	4				*	9	8		
	5					*	0		
	6						*		2
	7							*	3
	8								*
	T_2								

TERCERA ACTIVIDAD: Para calcular el tercer elemento T_1 se elige la columna del elemento que se está calculando (3), observando las celdas que tienen valor se tienen dos tiempos, y se realiza el cálculo:

$$T_1 + \text{duración de la actividad} = 0 + 3 = 3$$

$$T_1 + \text{duración de la actividad} = 0 + 7 = 7 \rightarrow \text{Se introduce el tiempo mayor (7)}$$



Mayor	T ₁	ACTIV	1	2	3	4	5	6	7	8
	0	1	*	7	3					
0 + 7 = 7	7	2		*	0	8				
0 + 3 = 3	7	3			*				3	
7 + 0 = 7			4			*	9	8		
			5				*	0		
			6					*		2
			7						*	3
			8							*
		T ₂								

CUARTA ACTIVIDAD: Para calcular el cuarto elemento de T₁ se elige la columna del elemento que se calcula (4), hay una celda que tiene valor, se realiza el cálculo:

$$T_1 + \text{duración de la actividad} = 7 + 8 = 15$$

Mayor	T ₁	ACTIV	1	2	3	4	5	6	7	8
	0	1	*	7	3					
0 + 7 = 7	7	2		*	0	8				
0 + 3 = 3	7	3			*				3	
7 + 0 = 7			4			*	9	8		
			5				*	0		
			6					*		2
			7						*	3
			8							*
		T ₂								

QUINTA ACTIVIDAD: Para calcular el quinto elemento de T₁ se elige la columna del elemento que se calcula (5), hay una celda que tiene valor, se realiza el cálculo:

$$T_1 + \text{duración de la actividad} = 15 + 9 = 24$$



Mayor	T ₁	ACTIV	1	2	3	4	5	6	7	8
	0	1	*	7	3					
0 + 7 = 7	7	2		*	0	8				
0 + 3 = 3 7 + 0 = 7	7	3			*				3	
7 + 8 = 15	15	4				*	9	8		
15 + 9 = 24	24	5					*	0		
		6						*		2
		7							*	3
		8								*
		T ₂								

SEXTA ACTIVIDAD: Para calcular el sexto elemento de T₁ se elige la columna del elemento que se calcula (6), hay dos celdas que tienen valor, se realiza el cálculo:

$$T_1 + \text{duración de la actividad} = 15 + 8 = 23$$

$T_1 + \text{duración de la actividad} = 24 + 0 = 24 \rightarrow$ Se introduce el tiempo mayor (24)

Mayor	T ₁	ACTIV	1	2	3	4	5	6	7	8
	0	1	*	7	3					
0 + 7 = 7	7	2		*	0	8				
0 + 3 = 3 7 + 0 = 7	7	3			*				3	
7 + 8 = 15	15	4				*	9	8		
15 + 9 = 24	24	5					*	0		
15 + 8 = 23 24 + 0 = 24	24	6						*		2
		7							*	3
		8								*
		T ₂								

SÉPTIMA ACTIVIDAD: Para calcular el séptimo elemento de T₁ se elige la columna del elemento que se calcula (7), hay una celda que tiene valor, se realiza el cálculo:

$$T_1 + \text{duración de la actividad} = 7 + 3 = 10$$



Mayor	T ₁	ACTIV	1	2	3	4	5	6	7	8
	0	1	*	7	3					
0 + 7 = 7	7	2		*	0	8				
0 + 3 = 3 7 + 0 = 7	7	3			*				3	
7 + 8 = 15	15	4				*	9	8		
15 + 9 = 24	24	5					*	0		
15 + 8 = 23 24 + 0 = 24	24	6						*		2
7 + 3 = 10	10	7							*	3
		8								*
		T ₂								

OCTAVA ACTIVIDAD: Para calcular el séptimo elemento de T₁ se elige la columna del elemento que se calcula (8), hay dos celdas que tienen valor, se realiza el cálculo:

$$T_1 + \text{duración de la actividad} = 24 + 2 = 26$$

$T_1 + \text{duración de la actividad} = 10 + 3 = 13 \rightarrow$ Se introduce el tiempo mayor (26)

Mayor	T ₁	ACTIV	1	2	3	4	5	6	7	8
	0	1	*	7	3					
0 + 7 = 7	7	2		*	0	8				
0 + 3 = 3 7 + 0 = 7	7	3			*				3	
7 + 8 = 15	15	4				*	9	8		
15 + 9 = 24	24	5					*	0		
15 + 8 = 23 24 + 0 = 24	24	6						*		2
7 + 3 = 10	10	7							*	3
24 + 2 = 26 10 + 3 = 13	26	8								*
		T ₂								



CÁLCULO FILA T_2

Se rellena la matriz con las duraciones de las actividades y se comienza rellenando la fila de las actividades T_2 (Tiempo más tardío de la realización de un suceso, Last) de derecha a izquierda. Se elige fila y se toma el menor valor.

FILA 8: Se copia el último tiempo T_1 .

T_1	ACTIV	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	*	7	3					
7	2		*	0	8				
7	3			*				3	
15	4				*	9	8		
24	5					*	0		
24	6						*		2
10	7							*	3
26	8								*
Menor		T_2							26

FILA 7: La actividad 8 tiene el valor 3

$T_2 - \text{duración tiempo de la columna} = 26 - 3 = 23 \rightarrow \text{Menor tiempo (23)}$

T_1	ACTIV	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	*	7	3					
7	2		*	0	8				
7	3			*				3	
15	4				*	9	8		
24	5					*	0		
24	6						*		2
$26 - 3 = 23$	10	7						*	3
	26	8							*
Menor		T_2						23	26



FILA 6: La actividad 8 tiene el valor 2

$T_2 - \text{duración tiempo de la columna} = 26 - 2 = 24 \rightarrow \text{Menor tiempo (24)}$

T_1	ACTIV	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	*	7	3					
7	2		*	0	8				
7	3			*				3	
15	4				*	9	8		
24	5					*	0		
$26 - 2 = 24$	24	6					*		2
$26 - 3 = 23$	10	7						*	3
	26	8							*
<u>Menor</u>		T_2					24	23	26

FILA 5: La actividad 6 tiene el valor 0

$T_2 - \text{duración tiempo de la columna} = 24 - 0 = 24 \rightarrow \text{Menor tiempo (24)}$

T_1	ACTIV	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	*	7	3					
7	2		*	0	8				
7	3			*				3	
15	4				*	9	8		
$24 - 0 = 24$	24	5				*	0		
$26 - 2 = 24$	24	6					*		2
$26 - 3 = 23$	10	7						*	3
	26	8							*
<u>Menor</u>		T_2					24	24	23


FILA 4: Hay dos actividades (actividad 6 y actividad 5)

$$T_2 - \text{duración tiempo de la columna} = 24 - 8 = 16 \rightarrow \text{Menor tiempo (15)}$$

$$T_2 - \text{duración tiempo de la columna} = 24 - 9 = 15$$

	T_1	ACTIV	1	2	3	4	5	6	7	8
	0	1	*	7	3					
	7	2		*	0	8				
	7	3			*				3	
$24 - 8 = 16$ $24 - 9 = 15$	15	4				*	9	8		
$24 - 0 = 24$	24	5					*	0		
$26 - 2 = 24$	24	6						*		2
$26 - 3 = 23$	10	7							*	3
	26	8								*
$\overleftarrow{\text{Menor}}$		T_2				15	24	24	23	26

FILA 3: La actividad 7 tiene el valor 3

$$T_2 - \text{duración tiempo de la columna} = 23 - 3 = 20 \rightarrow \text{Menor tiempo (20)}$$

	T_1	ACTIV	1	2	3	4	5	6	7	8
	0	1	*	7	3					
	7	2		*	0	8				
$23 - 3 = 20$	7	3			*				3	
$24 - 8 = 16$ $24 - 9 = 15$	15	4				*	9	8		
$24 - 0 = 24$	24	5					*	0		
$26 - 2 = 24$	24	6						*		2
$26 - 3 = 23$	10	7							*	3
	26	8								*
$\overleftarrow{\text{Menor}}$		T_2			20	15	24	24	23	26


FILA 2: Hay dos actividades (actividad 4 y actividad 3)

$$T_2 - \text{duración tiempo de la columna} = 15 - 8 = 7 \rightarrow \text{Menor tiempo (7)}$$

$$T_2 - \text{duración tiempo de la columna} = 20 - 0 = 20$$

	T ₁	ACTIV	1	2	3	4	5	6	7	8
	0	1	*	7	3					
15 - 8 = 7 20 - 0 = 20	7	2		*	0	8				
23 - 3 = 20	7	3			*				3	
24 - 8 = 16 24 - 9 = 15	15	4				*	9	8		
24 - 0 = 24	24	5					*	0		
26 - 2 = 24	24	6						*		2
26 - 3 = 23	10	7							*	3
	26	8								*
$\overleftarrow{\text{Menor}}$		T ₂		7	20	15	24	24	23	26

FILA 1: Hay dos actividades (actividad 3 y actividad 2)

$$T_2 - \text{duración tiempo de la columna} = 20 - 3 = 17 \rightarrow \text{Menor tiempo (0)}$$

$$T_2 - \text{duración tiempo de la columna} = 7 - 7 = 0$$

	T ₁	ACTIV	1	2	3	4	5	6	7	8
	0	1	*	7	3					
20 - 3 = 17 7 - 7 = 0	7	2		*	0	8				
15 - 8 = 7 20 - 0 = 20	7	3			*				3	
24 - 8 = 16 24 - 9 = 15	15	4				*	9	8		
24 - 0 = 24	24	5					*	0		
26 - 2 = 24	24	6						*		2
26 - 3 = 23	10	7							*	3
	26	8								*
$\overleftarrow{\text{Menor}}$		T ₂	0	7	20	15	24	24	23	26

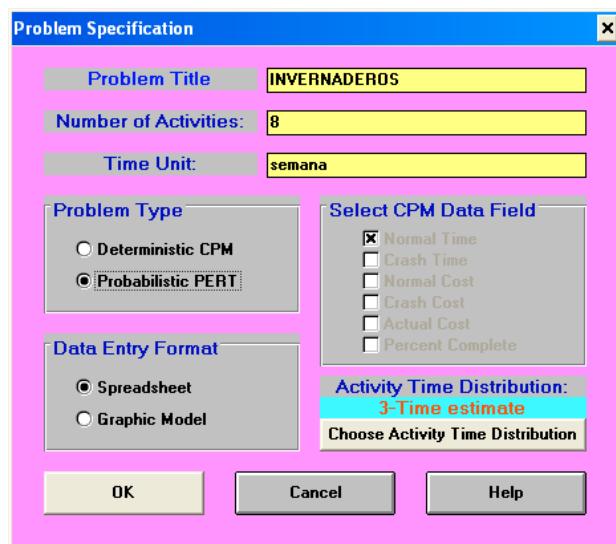


Finalmente, resulta la matriz de Zaderenko

T ₁	ACTIV	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	*	7	3					
7	2		*	0	8				
7	3			*				3	
15	4				*	9	8		
24	5					*	0		
24	6						*		2
10	7							*	3
26	8								*
	T ₂	0	7	20	15	24	24	23	26



WinQSB / PERT- CPM / Problem Specification



Activity Number	Activity Name	Immediate Predecessor (list number/name, separated by ',')	Optimistic time (a)	Most likely time (m)	Pessimistic time (b)
1	A		1	2	9
2	B		4	7	10
3	C	B	2	8	14
4	D	A,B	1	2	9
5	E	C	4	7	16
6	F	C	5	8	17
7	G	D	0	3	6
8	H	E,F	2	2	2



PERT/CPM

File Format Results Utilities Window Help

0.00 A

Activity Analysis for INVERNADEROS

	Activity Name	On Critical Path	Activity Mean Time	Earliest Start	Earliest Finish	Latest Start	Latest Finish	Slack (LS-ES)	Activity Time Distribution	Standard Deviation
1	A	no	3	0	3	17	20	17	3-Time estimate	1,3333
2	B	Yes	7	0	7	0	7	0	3-Time estimate	1
3	C	Yes	8	7	15	7	15	0	3-Time estimate	2
4	D	no	3	7	10	20	23	13	3-Time estimate	1,3333
5	E	no	8	15	23	16	24	1	3-Time estimate	2
6	F	Yes	9	15	24	15	24	0	3-Time estimate	2
7	G	no	3	10	13	23	26	13	3-Time estimate	1
8	H	Yes	2	24	26	24	26	0	3-Time estimate	0
Project Completion Time		=	26	semanas						
Number of Critical Path(s)	Critical Path(s)	=	1							

On Critical Path: YES si pertenece a alguna ruta crítica

Activity Mean Time: Tiempo Pert

3-time estímate: Tiempo Pert utilizando los tiempos optimista, más probable y pesimista.

Project Completion Time: Tiempo de terminación del proyecto en 26 semanas

Number of Critical Path(s): 1 ruta crítica

PERT/CPM

File Format Results Utilities Window Help

Results

- Activity Criticality Analysis
- Graphic Activity Analysis
- Show Critical Path
- Critical**
- Gantt Chart
- Project Completion Analysis

- PERT/Cost -Table
- PERT/Cost - Graphic
- Project Cost Control Report

- Perform Crashing Analysis
- Show Crashing Result

- Perform Probability Analysis
- Show Probability Analysis

- Perform Simulation
- Show Simulation Result - Table
- Show Simulation Result - Graphic

Critical Path 1	
1	B
2	C
3	F
4	H
Completion Time	26
Std. Dev.	3

Results / Show Critical Path

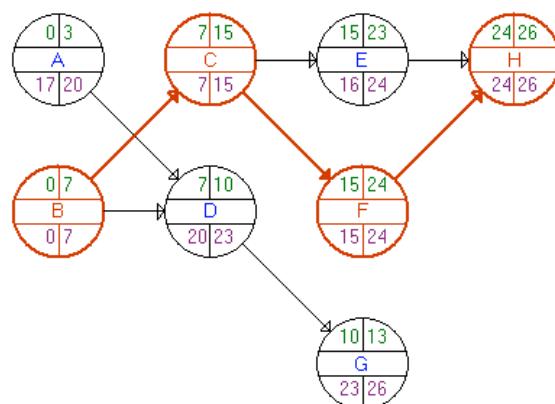
Ruta crítica: B - C - F - H

26 semanas

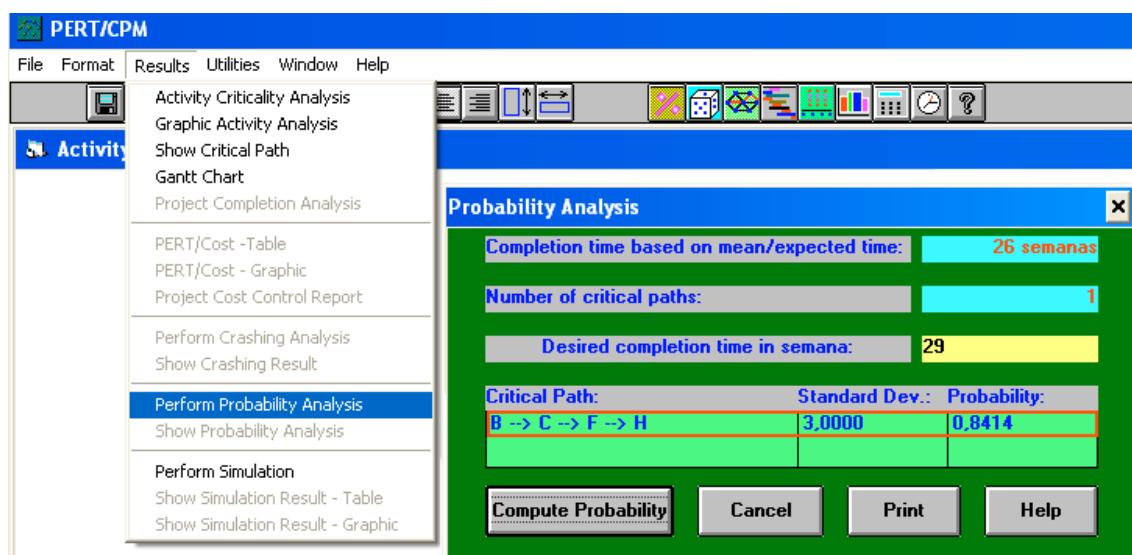


Rutas críticas:

Results / Graphic Activity Analysis



Probabilidad de finalizar el proyecto a lo sumo en 29 semanas: Results / Perform Probability Analysis





FABRICACIÓN DE UN AVIÓN: La empresa fabricante de aeronaves GA se dispone a preparar un nuevo proyecto para la construcción de su último modelo, para ello ha diseñado minuciosamente un plan de trabajo a fin de estimar el tiempo que se requerirá antes de su lanzamiento al mercado.

En el proceso de fabricación, en primer lugar, debe realizar y presentar el diseño de la aeronave; en segundo lugar, hay que transportar hasta el hangar de fabricación las necesarias componentes de la aeronave. A continuación, se construyen las partes del avión - fuselaje, alas, tren de aterrizaje, partes hipersustentadoras (flaps y slats) y motores - como si de piezas de un puzzle se tratase. Posteriormente, las piezas descritas anteriormente pasan a la cadena de montaje y en la sección de ensamblaje final tomarán ya forma de avión.

Una vez que el avión ha cobrado su forma característica es momento de instalar el cableado eléctrico, tuberías y los equipos de la cabina de los pilotos de manera simultánea. Cuando el avión dispone de todo el sistema de cableado y tuberías que va dentro de las paredes del fuselaje, pasa a la sección de montado de revestimientos térmicos y acústicos que se colocan sobre los sistemas de cableado y tuberías. Terminado el proceso de fabricación, se pasa a la instalación de asientos e interiores.

Las limitaciones del proyecto se deben a la complejidad de fabricación de la aeronave y la imposibilidad de superponer determinadas actividades. Para solventar el problema se utiliza el método PERT, método que parte de la descomposición del proyecto en una serie de actividades, donde la actividad se entiende como la ejecución de una tarea, que exige para su realización el uso de recursos.

Definido el concepto de actividad, se establece el concepto de suceso. Un suceso es un acontecimiento, un punto en el tiempo, una fecha en el calendario. El suceso no consume recursos, sólo indica el principio o el fin de una actividad o de un conjunto de actividades.

Para representar las diferentes actividades en que se descompone un proyecto, así como sus correspondientes sucesos, se utiliza una estructura de grafo. Los arcos del grafo representan las actividades, y los vértices, los sucesos.

Una vez descompuesto el proyecto en actividades, la fase siguiente del método PERT consiste en establecer las prelaciones existentes entre las diferentes actividades. Estas prelaciones indican el orden en que deben ejecutarse dichas actividades. Por razones de tipo técnico, económico o jurídico, las diferentes actividades que constituyen un proyecto deben ejecutarse según un cierto orden.

El resultado final de la aplicación del algoritmo PERT será un Cronograma para el proyecto, donde se podrá conocer la duración total del mismo y la clasificación de actividades según su criticidad.

En el proceso de fabricación, las actividades quedaran dispuestas del siguiente modo:

- A → Diseño
- B → Transporte de secciones grandes preensambladas
- C → Fuselaje
- D → Alas
- E → Tren de aterrizaje
- F → Partes hipersustentadoras
- G → Motores



H → Ensamblaje final

I → Cableado eléctrico

J → Tuberías

K → Cabina de pilotos

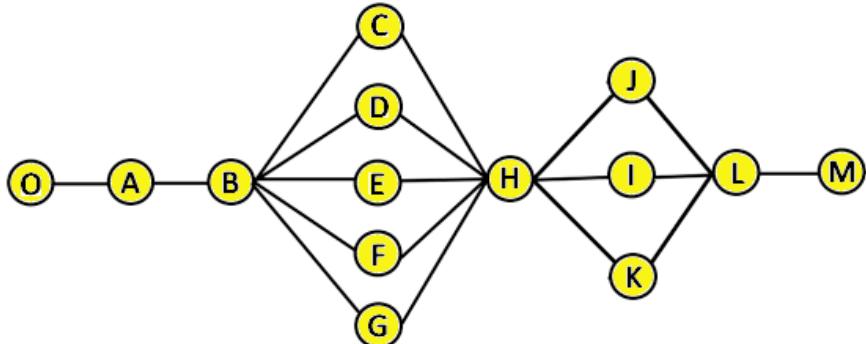
L → Revestimientos térmicos y acústicos

M → Asientos e interiores

Se muestra la tabla con la identificación de las actividades y sus actividades predecesoras.

IDENTIFICACIÓN	ACTIVIDAD	PREDECESORA
1	A	-
2	B	A
3	C	B
4	D	B
5	E	B
6	F	B
7	G	B
8	H	C, D, E, F, G
9	I	H
10	J	H
11	K	H
12	L	J, I, K
13	M	L

Boceto del grafo base para la resolución.



En la siguiente tabla se muestran los tiempos requeridos para la realización de cada una de la actividades estimadas por cada uno de los tres equipos de trabajo de la empresa. Los equipos serán identificados como optimista, probable y pesimista.

Los tiempos de las actividades están definidos en semanas.



IDENTIFICACIÓN	ACTIVIDAD	PREDECESORA	OPTIMISTA (a)	PROBABLE (m)	PESIMISTA (b)
1	A	-	4	6	8
2	B	A	3	5	7
3	C	B	10	12	14
4	D	B	8	10	12
5	E	B	6	8	12
6	F	B	5	7	9
7	G	B	14	16	19
8	H	C, D, E, F, G	20	22	24
9	I	H	6	8	10
10	J	H	5	7	9
11	K	H	10	12	14
12	L	J, I, K	2	4	6
13	M	L	4	6	9

La empresa desea saber cual es la probabilidad de que la aeronave esté lista para su lanzamiento antes de 75 semanas..

Solución:

Se calcula el camino crítico y la duración del proyecto.

Tiempo esperado (tiempo Pert) y varianza para cada actividad:

$$\begin{aligned}
 t_e(A) &= \frac{a + 4m + b}{6} = \frac{4 + 4 \times 6 + 8}{6} = 6 & \sigma_A^2 = \text{Var}(A) &= \frac{(8-4)^2}{36} = 0,44 \\
 t_e(B) &= \frac{a + 4m + b}{6} = \frac{3 + 4 \times 5 + 7}{6} = 5 & \sigma_B^2 = \text{Var}(B) &= \frac{(7-3)^2}{36} = 0,44 \\
 &\vdots & &\vdots \\
 t_e(K) &= \frac{a + 4m + b}{6} = \frac{10 + 4 \times 12 + 14}{6} = 12 & \sigma_K^2 = \text{Var}(K) &= \frac{(14-10)^2}{36} = 0,44 \\
 t_e(L) &= \frac{a + 4m + b}{6} = \frac{2 + 4 \times 4 + 6}{6} = 4 & \sigma_L^2 = \text{Var}(L) &= \frac{(6-2)^2}{36} = 0,44 \\
 t_e(M) &= \frac{a + 4m + b}{6} = \frac{4 + 4 \times 6 + 9}{6} = 6,2 & \sigma_M^2 = \text{Var}(M) &= \frac{(9-4)^2}{36} = 0,69
 \end{aligned}$$

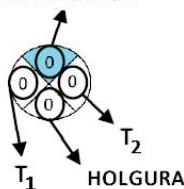
Se elabora la tabla con el tiempo y varianza PERT



ID	ACTIVIDAD	PREDECESORA	OPTIMISTA (a)	PROBABLE (m)	PESIMISTA (b)	TIEMPO ESPERADO	VARIANZA
1	A	-	4	6	8	6	0,44
2	B	A	3	5	7	5	0,44
3	C	B	10	12	14	12	0,44
4	D	B	8	10	12	10	0,44
5	E	B	6	8	12	8,3	1
6	F	B	5	7	9	7	0,44
7	G	B	14	16	19	16,2	0,69
8	H	C, D, E, F, G	20	22	24	22	0,44
9	I	H	6	8	10	8	0,44
10	J	H	5	7	9	7	0,44
11	K	H	10	12	14	12	0,44
12	L	J, I, K	2	4	6	4	0,44
13	M	L	4	6	9	6,2	0,69

A partir del cuadro de prelaciones y del tiempo esperado (tiempo Pert) se puede construir la red PERT (con un nodo de inicio y un nodo de finalización), colocando sobre cada arco una letra que designa la actividad correspondiente, así como el tiempo esperado t_e asociado a cada una de las actividades.

IDENTIFICADOR



El tiempo más temprano (Early) de un suceso T_1 (i -ésimo nodo) recorre la red de izquierda a derecha.

El tiempo más tardío (Last) de realización de un suceso T_2 (i -ésimo nodo) recorre la red de derecha a izquierda.

El tiempo de Holgura $H = T_2 - T_1$ es la diferencia entre el tiempo más tardío y el tiempo más temprano de un suceso. En unidades de tiempo corresponde al valor que puede tardar la ocurrencia de un suceso.

RUTA CRÍTICA: Corresponde a los sucesos con holgura cero, es decir, la ruta crítica está formada por la ocurrencia de sucesos en los que no puede retrasarse una sola unidad de tiempo respecto al Cronograma establecido, en otro caso se retrasaría la finalización del proyecto.

En el caso que se encuentren más de una ruta crítica, que existiesen dos o más caminos críticos, se deberá utilizar la distribución con tiempos de finalización con mayor varianza.

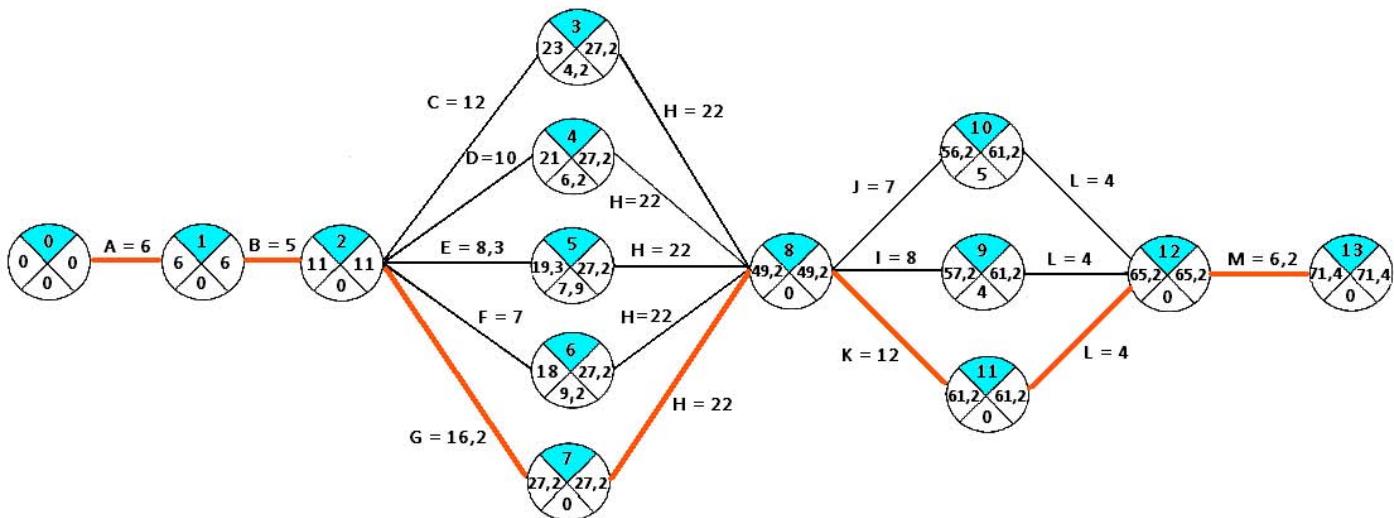
El camino crítico es el camino de longitud máxima que va desde el vértice inicio del proyecto al vértice fin del proyecto. En consecuencia, para calcular el camino crítico se pueden aplicar los algoritmos de teoría de grafos que permiten calcular el camino de máxima longitud.

En un camino crítico con k actividades críticas (con Holgura cero), la distribución del tiempo de finalización del proyecto, de acuerdo con el Teorema Central del Límite (TCL), sigue una distribución normal $N(\mu_{\text{PROYECTO}}, \sigma_{\text{PROYECTO}})$

$$\text{Duración del proyecto: } \mu_{\text{PROYECTO}} = \sum_{i=1}^k t_e(i) \quad \text{Varianza del proyecto: } \sigma_{\text{PROYECTO}}^2 = \sum_{i=1}^k \sigma_i^2$$



- **T₁** Para el cálculo de T₁ en un nodo, donde concurren la finalización de varias actividades, se debe tomar el mayor valor de los T₁ resultantes.
- T₂** Para el cálculo de T₂ en un nodo, donde concurren el inicio de varias actividades, se debe tomar el menor valor de los T₂ resultantes.



La ruta crítica se encuentra compuesta por las actividades críticas A, C, E, G, I, J con holgura total cero.

El camino crítico será el formado por aquellas actividades cuya holgura es 0.

Camino crítico: 1 - 2 - 7 - 8 - 11 - 12 - 13

Longitud del proyecto o duración del proyecto:

$$\begin{aligned}\mu_{\text{PROYECTO}} &= t_e(1) + t_e(2) + t_e(7) + t_e(8) + t_e(11) + t_e(12) + t_e(13) = \\ &= 6 + 5 + 16,2 + 22 + 12 + 4 + 6,2 = 71,4 \text{ semanas}\end{aligned}$$

Varianza del proyecto:

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{PROYECTO}}^2 &= \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_7^2 + \sigma_8^2 + \sigma_{11}^2 + \sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 = \\ &= 0,44 + 0,44 + 0,69 + 0,44 + 0,44 + 0,44 + 0,69 = 3,58 \text{ semanas}^2\end{aligned}$$

Desviación típica del proyecto: $\sigma_{\text{PROYECTO}} = \sqrt{3,58} = 1,89$ semanas

La distribución del tiempo de finalización del proyecto, de acuerdo con el Teorema Central del Límite (TCL), sigue una distribución normal N(71,4, 1,89) semanas.

La probabilidad de que el proyecto termine a lo sumo en 75 semanas:

$$P(X \leq 75) = P\left[\frac{X - 72,4}{1,89} \leq \frac{75 - 71,4}{1,89}\right] = P(z \leq 1,90) = 0,9713$$

El proyecto finaliza a lo sumo en 75 semanas el 97,13 % de las veces.



MATRIZ DE ZADERENKO DEL PROYECTO

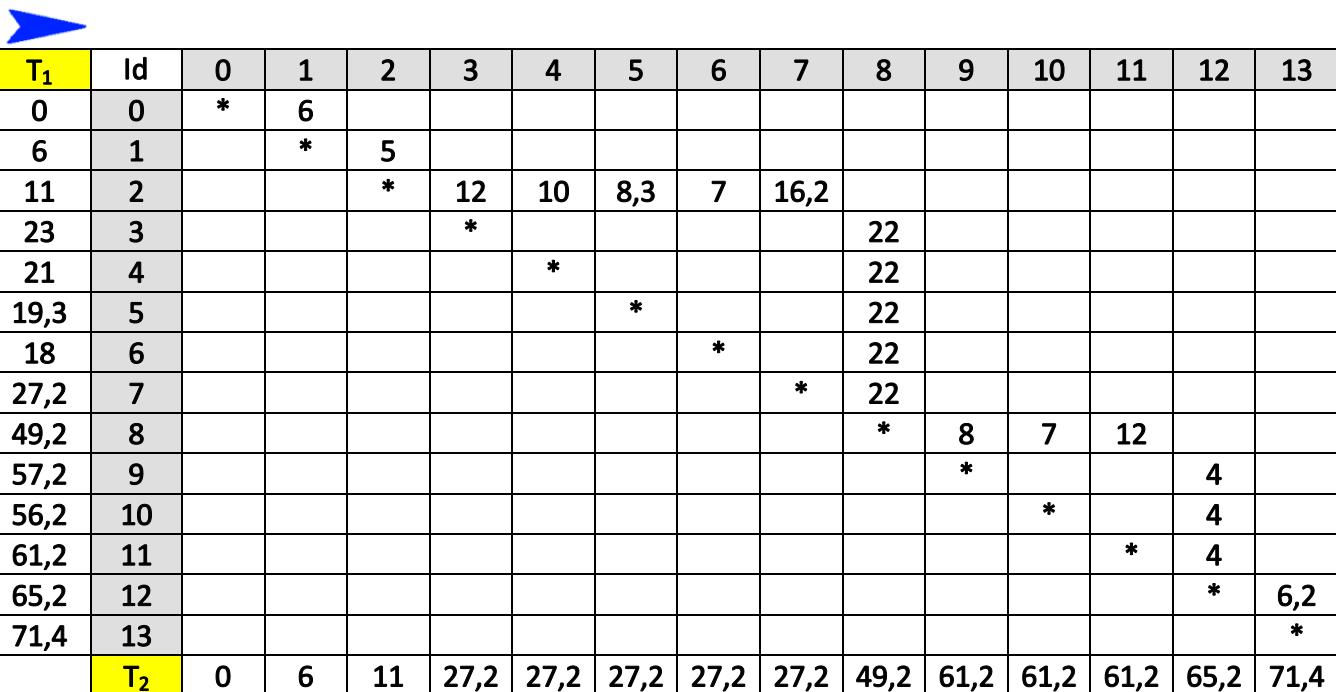
El algoritmo de Zaderenko permite calcular el tiempo de los nodos sin tener que diseñar el grafo del proyecto.

Para la columna de T_1 se rellena la matriz con las duraciones de las actividades. Se comienza llenando la columna de las actividades T_1 (Tiempo más temprano de un suceso, Early). Se recorre de izquierda a derecha, el primer tiempo es cero.

Para calcular cada elemento T_1 se elige la columna del elemento que se calcula y para cada celda con valor se realiza el cálculo: $T_1 + \text{duración de la actividad}$. Se elige el mayor valor calculado.

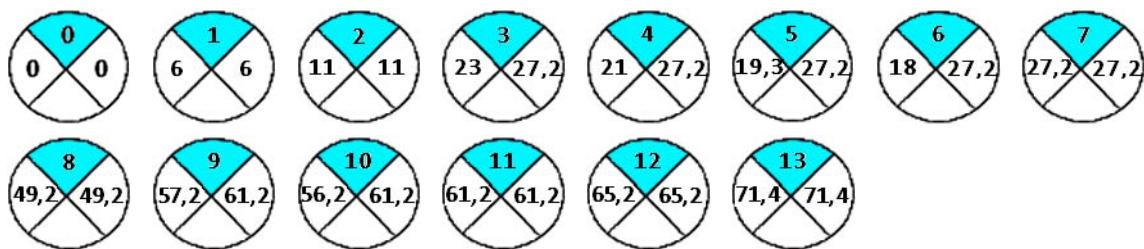
La línea T_2 (Tiempo más tardío de la realización de un suceso, Last) se recorre de derecha a izquierda, se inicia con la última actividad que tiene el mismo valor que el último valor T_1 .

Para calcular cada elemento T_2 se elige la fila del elemento que se calcula y para cada celda con valor se realiza el cálculo: $T_2 - \text{duración tiempo de la columna}$. Se elige el menor valor calculado.



T_1	Id	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0	0	*	6												
6	1		*	5											
11	2			*	12	10	8,3	7	16,2						
23	3				*							22			
21	4					*						22			
19,3	5						*					22			
18	6							*				22			
27,2	7								*			22			
49,2	8									*	8	7	12		
57,2	9									*			4		
56,2	10										*		4		
61,2	11											*	4		
65,2	12												*		6,2
71,4	13														*
	T_2	0	6	11	27,2	27,2	27,2	27,2	27,2	49,2	61,2	61,2	61,2	65,2	71,4

Se forma cada nodo con T_1 y T_2



En un nodo con $T_1 = T_2$ hay una actividad con holgura 0, formando parte de una ruta crítica.



Camino crítico: 1 - 2 - 7 - 8 - 11 - 12 - 13


 Longitud del proyecto o duración del proyecto: $\mu_{\text{PROYECTO}} = 71,4$ semanas

 Varianza del proyecto: $\sigma_{\text{PROYECTO}}^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_7^2 + \sigma_8^2 + \sigma_{11}^2 + \sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 = 3,58$ semanas²

WinQSB / PERT- CPM / Problem Specification

Problem Specification

Problem Title	PROYECTO AVION
Number of Activities:	13
Time Unit:	semanas
Problem Type	<input type="radio"/> Deterministic CPM <input checked="" type="radio"/> Probabilistic PERT
Select CPM Data Field	<input checked="" type="checkbox"/> Normal Time <input type="checkbox"/> Crash Time <input type="checkbox"/> Normal Cost <input type="checkbox"/> Crash Cost <input type="checkbox"/> Actual Cost <input type="checkbox"/> Percent Complete
Data Entry Format	<input checked="" type="radio"/> Spreadsheet <input type="radio"/> Graphic Model
Activity Time Distribution:	3-Time estimate
Choose Activity Time Distribution	
<input type="button" value="OK"/> <input type="button" value="Cancel"/> <input type="button" value="Help"/>	

En **Problem Type** se puede elegir **Deterministic CPM** cuando se va a introducir el tiempo Pert o **Probabilistic PERT** cuando se van a introducir los tiempos optimista (a), más probable (m) y pesimista (b).

En caso de elegir **Probabilistic PERT** y tener únicamente el tiempo Pert, los tiempos (a) , (b) y (c) es el mismo tiempo Pert.

PERT/CPM

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

PROYECTO AVION

Activity Number	Activity Name	Immediate Predecessor (list number/name, separated by ',')	Optimistic time (a)	Most likely time (m)	Pessimistic time (b)
1	A		4	6	8
2	B	A	3	5	7
3	C	B	10	12	14
4	D	B	8	10	12
5	E	B	6	8	12
6	F	B	5	7	9
7	G	B	14	16	19
8	H	C,D,E,F,G	20	22	24
9	I	H	6	8	10
10	J	H	5	7	9
11	K	H	10	12	14
12	L	I,J,K	2	4	6
13	M	L	4	6	9



PERT/CPM

File Format Results Utilities Window Help

Activity Analysis for PROYECTO AVION

	Activity Name	On Critical Path	Activity Mean Time	Earliest Start	Earliest Finish	Latest Start	Latest Finish	Slack (LS-ES)	Activity Time Distribution	Standard Deviation
1	A	Yes	6	0	6	0	6	0	3-Time estimate	0,6667
2	B	Yes	5	6	11	6	11	0	3-Time estimate	0,6667
3	C	no	12	11	23	15,1667	27,1667	4,1667	3-Time estimate	0,6667
4	D	no	10	11	21	17,1667	27,1667	6,1667	3-Time estimate	0,6667
5	E	no	8,3333	11	19,3333	18,8333	27,1667	7,8333	3-Time estimate	1
6	F	no	7	11	18	20,1667	27,1667	9,1667	3-Time estimate	0,6667
7	G	Yes	16,1667	11	27,1667	11	27,1667	0	3-Time estimate	0,8333
8	H	Yes	22	27,1667	49,1667	27,1667	49,1667	0	3-Time estimate	0,6667
9	I	no	8	49,1667	57,1667	53,1667	61,1667	4	3-Time estimate	0,6667
10	J	no	7	49,1667	56,1667	54,1667	61,1667	5	3-Time estimate	0,6667
11	K	Yes	12	49,1667	61,1667	49,1667	61,1667	0	3-Time estimate	0,6667
12	L	Yes	4	61,1667	65,1667	61,1667	65,1667	0	3-Time estimate	0,6667
13	M	Yes	6,1667	65,1667	71,3333	65,1667	71,3333	0	3-Time estimate	0,8333
	Project Completion Time		=	71,33	semanas					
	Number of Critical Path(s)		=	1						

PERT/CPM

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

PROYECTO AVION

1 : Immediate Predecessor

- Solve Critical Path
- Solve Critical Path Using Crash Time
- Perform Crashing Analysis
- Perform Probability Analysis**
- Perform Simulation

Probability Analysis

The following probability calculation assumes that activities are independent and so are paths. It also assumes that the project has a large enough number of activities to assume the normal distribution, which is used to estimate the probability of finishing a critical path in the desired time. Therefore, when the activities are not independent or the number of activities is not large, the analysis may be biased.

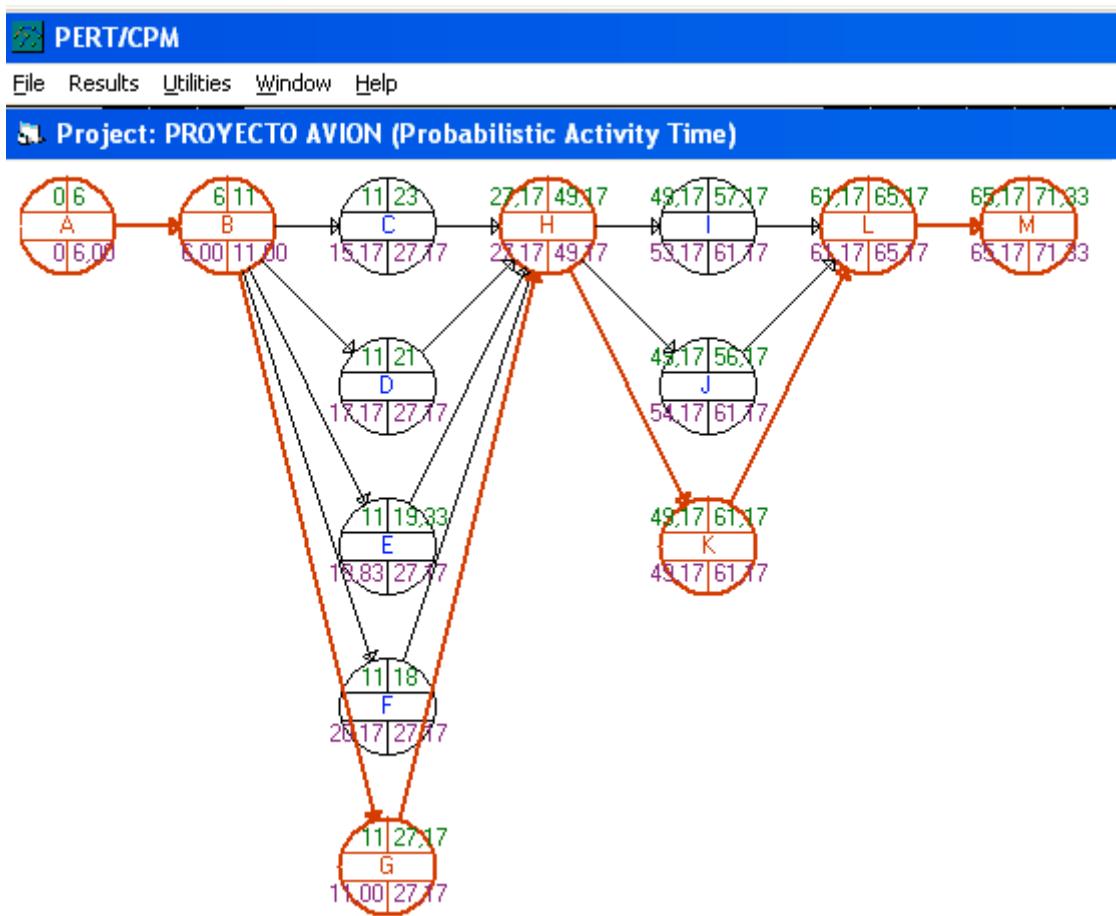
Completion time based on mean/expected time: 71,33 semanas

Number of critical paths: 1

Desired completion time in semana: 75

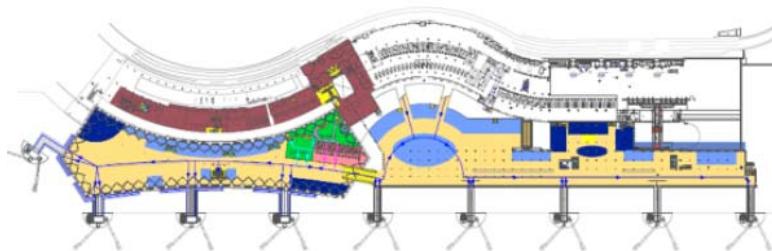
Critical Path:	Standard Dev.:	Probability:
A → B → G → H → K → L → M	1,9003	0,9732

Compute Probability Cancel Print Help





Eres el responsable de presentar un proyecto aeronáutico con unas actividades de ejecución en meses.



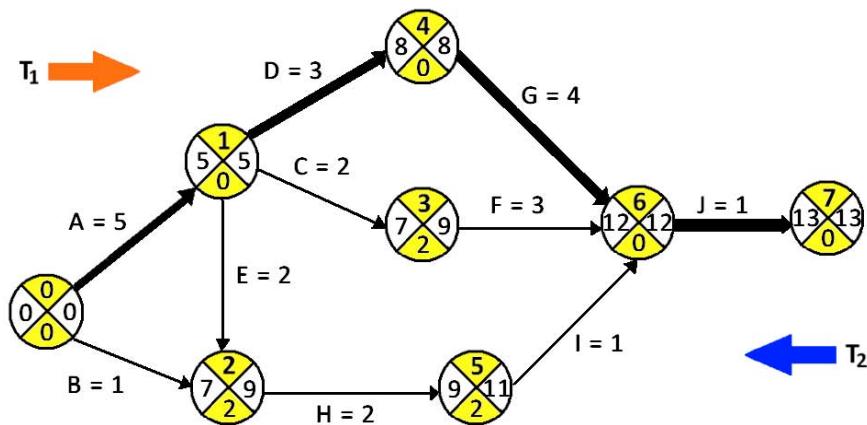
Actividad	Actividades Precedentes	Tiempo Pert (meses)
A	-----	5
B	-----	1
C	A	2
D	A	3
E	A	2
F	C	3
G	D	4
H	B, E	2
I	H	1
J	F, G, I	1

Incorporas una serie de indicadores:

- Proyectar el camino crítico de ejecución y duración del proyecto.
- Duración del proyecto si la actividad C se retrasa 2 meses.
- Duración del proyecto si la actividad E se retrasa 3 meses.

Solución:

a) Red del proyecto



El camino crítico está formado por actividades con holgura cero.

Camino crítico: 0 - 1 - 4 - 6 - 8 , formado por las actividades A , D , G , J

La duración del proyecto es de 13 meses.



WinQSB / PERT- CPM / Problem Specification

Problem Specification

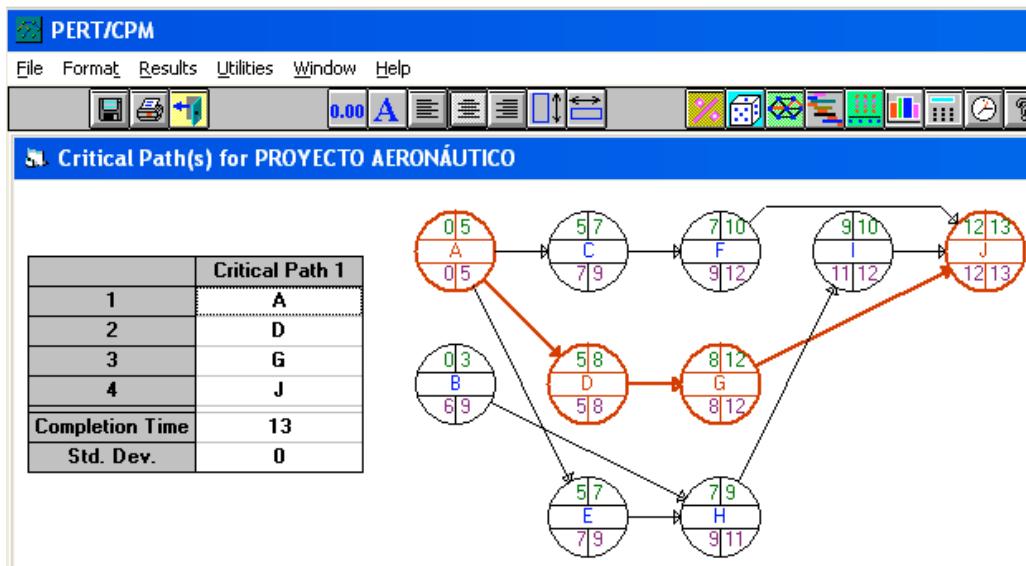
Problem Title	PROYECTO AERONÁUTICO
Number of Activities:	10
Time Unit:	mes
Problem Type	<input checked="" type="radio"/> Deterministic CPM <input type="radio"/> Probabilistic PERT
Select CPM Data Field	<input checked="" type="checkbox"/> Normal Time <input type="checkbox"/> Crash Time <input type="checkbox"/> Normal Cost <input type="checkbox"/> Crash Cost <input type="checkbox"/> Actual Cost <input type="checkbox"/> Percent Complete
Data Entry Format	<input checked="" type="radio"/> Spreadsheet <input type="radio"/> Graphic Model
Activity Time Distribution:	
<input type="button" value="OK"/> <input type="button" value="Cancel"/> <input type="button" value="Help"/>	

PERT/CPM

File	Edit	Format	Solve and Analyze	Results	Utilities	Window	WinQSB
A							
PROYECTO AERONÁUTICO							
Activity Number	Activity Name	Immediate Predecessor (list number/name, separated by ',')	Normal Time				
1	A		5				
2	B		1				
3	C	A	2				
4	D	A	3				
5	E	A	2				
6	F	C	3				
7	G	D	4				
8	H	B, E	2				
9	I	H	1				
10	J	F, G, I	1				

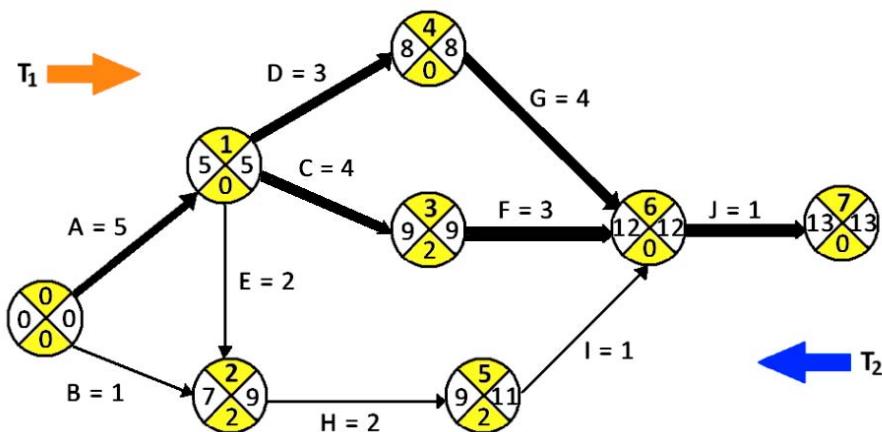
PERT/CPM

File	Format	Results	Utilities	Window	Help			
Activity Analysis for PROYECTO AERONÁUTICO								
	Activity Name	On Critical Path	Activity Time	Earliest Start	Earliest Finish	Latest Start	Latest Finish	Slack (LS-ES)
1	A	Yes	5	0	5	0	5	0
2	B	no	1	0	1	8	9	8
3	C	no	2	5	7	7	9	2
4	D	Yes	3	5	8	5	8	0
5	E	no	2	5	7	7	9	2
6	F	no	3	7	10	9	12	2
7	G	Yes	4	8	12	8	12	0
8	H	no	2	7	9	9	11	2
9	I	no	1	9	10	11	12	2
10	J	Yes	1	12	13	12	13	0
	Project	Completion	Time	=	13	mes		Holgura
	Number of	Critical	Path(s)	=	1			



b) Si la actividad C se retrasa 2 meses ($C = 4$) la duración del proyecto es de 13 meses, aparece otro nuevo camino crítico con una duración de 13 meses.

Cuando hay más de un camino crítico se elige el que presenta mayor varianza o mayor desviación típica (Std. Dev)², en este caso no es posible al no disponer de los tiempos optimista, normales y pesimistas de las actividades.



Camino crítico 1: 0 - 1 - 4 - 6 - 7 , formado por las actividades A , D , G , J

Camino crítico 2: 0 - 1 - 3 - 6 - 7 , formado por las actividades A , C , F , J

La duración del proyecto es de 13 meses.



PERT/CPM

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB

Activity Number	Activity Name	Immediate Predecessor (list number/name, separated by ',')	Normal Time
1	A		5
2	B		1
3	C	A	4
4	D	A	3
5	E	A	2
6	F	C	3
7	G	D	4
8	H	B, E	2
9	I	H	1
10	J	F, G, I	1

PERT/CPM

File Format Results Utilities Window Help

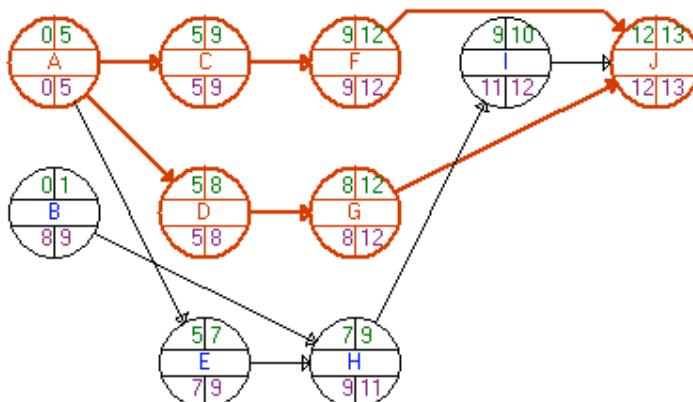
Activity Analysis for PROYECTO AERONÁUTICO

	Activity Name	On Critical Path	Activity Time	Earliest Start	Earliest Finish	Latest Start	Latest Finish	Slack (LS-ES)
1	A	Yes	5	0	5	0	5	0
2	B	no	1	0	1	8	9	8
3	C	Yes	4	5	9	5	9	0
4	D	Yes	3	5	8	5	8	0
5	E	no	2	5	7	7	9	2
6	F	Yes	3	9	12	9	12	0
7	G	Yes	4	8	12	8	12	0
8	H	no	2	7	9	9	11	2
9	I	no	1	9	10	11	12	2
10	J	Yes	1	12	13	12	13	0
	Project Completion Time	=	13	mes				
	Number of Critical Path(s)	=	2					

Project: PROYECTO AERONÁUTICO (Deterministic Activity Time)

Critical Path 1 **Critical Path 2**

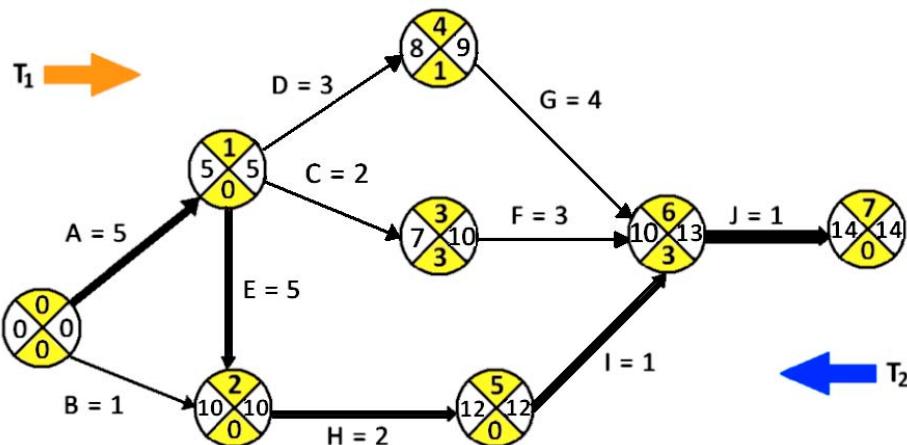
A	A
C	D
F	G
J	J
13	13





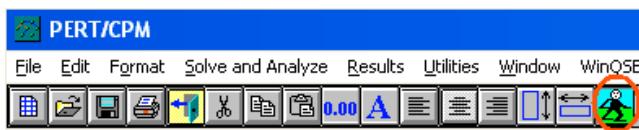
c) Si la actividad E se retrasa 3 meses ($E = 5$) la duración del proyecto es de 13 meses, aparece otro nuevo camino crítico con una duración de 13 meses.

La actividad E es una actividad no crítica que tiene una holgura (retraso permitido de 2 meses), al retrasarse 3 meses cambia el camino crítico y la duración del proyecto.



Camino crítico: 0 - 1 - 2 - 5 - 6 - 7 , formado por las actividades A , E , H , I , J

La duración del proyecto es de 14 meses.

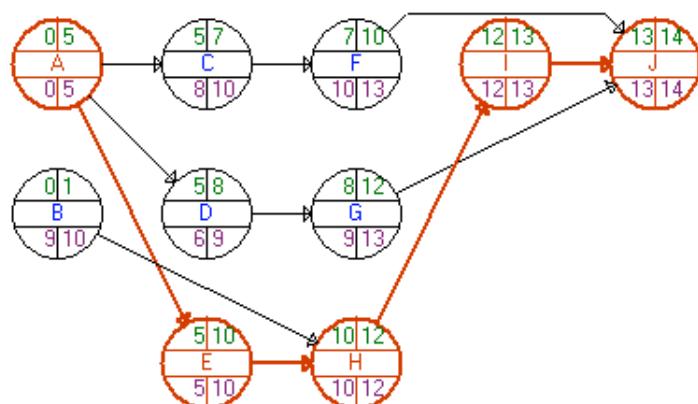


Activity Number	Activity Name	Immediate Predecessor (list number/name, separated by ',')	Normal Time
1	A		5
2	B		1
3	C	A	2
4	D	A	3
5	E	A	5
6	F	C	3
7	G	D	4
8	H	B, E	2
9	I	H	1
10	J	F, G, I	1

	Activity Name	On Critical Path	Activity Time	Earliest Start	Earliest Finish	Latest Start	Latest Finish	Slack (LS-ES)
1	A	Yes	5	0	5	0	5	0
2	B	No	1	0	1	9	10	9
3	C	No	2	5	7	8	10	3
4	D	No	3	5	8	6	9	1
5	E	Yes	5	5	10	5	10	0
6	F	No	3	7	10	10	13	3
7	G	No	4	8	12	9	13	1
8	H	Yes	2	10	12	10	12	0
9	I	Yes	1	12	13	12	13	0
10	J	Yes	1	13	14	13	14	0
	Project Completion Time	=	14	mes				
	Number of Critical Path(s)	=	1					


Project: PROYECTO AERONÁUTICO (Deterministic Activity Time)

	Critical Path 1
1	A
2	E
3	H
4	I
5	J
Completion Time	14





Construcciones 'Fuenterrrebollo' ha elaborado un proyecto para construir viviendas en una urbanización. Las actividades que tiene que realizar son las siguientes:

Actividad	Descripción actividades	Tiempo optimista	Tiempo más probable	Tiempo pesimista
A	Urbanización de la zona	1,5	2	2,5
B	Acometida de la luz en la urbanización	1	1,5	2
C	Construcción de los bloques de viviendas	1	1	1
D	Acometida de luz	0,25	0,5	0,75
E	Pavimentado de las calles	4	5	6
F	Pavimentado de aceras	3	4	5
G	Construcción de piscina	1	1,5	2
H	Trabajos servicios auxiliares urbanización	0,25	0,5	0,75
I	Trabajos en la urbanización interna	3	6,5	7
J	Acometida del gas en viviendas	3	4	5
K	Acometida de electricidad en viviendas	1,5	2	2,5
L	Carpintería en viviendas	2	3	4
M	Control y verificación	4	5	6

El orden en que deben efectuarse las actividades es:

- La tarea A es previa a todas
- Las tareas B y C son simultáneas
- Las tareas D, E y F son correlativas a partir de B
- Las tareas G y H son correlativas a partir de A
- La tarea I sólo puede iniciarse cuando se han terminado las tareas A, B, D, E, F, G y H
- Las tareas J, K y L son correlativas a partir de C
- La tarea M se puede iniciar cuando todas las tareas se han terminado

Se pide:

- Dibujar la red PERT con tiempos early, last y holgura
- Camino crítico y su duración. Indicar la actividad más precisa
- ¿Cuál será la probabilidad de finalizar el proyecto en 25 semanas o menos?. ¿Qué plazos de ejecución tienen un 90% de probabilidad de cumplirse?
- Elaborar la gráfica Gantt

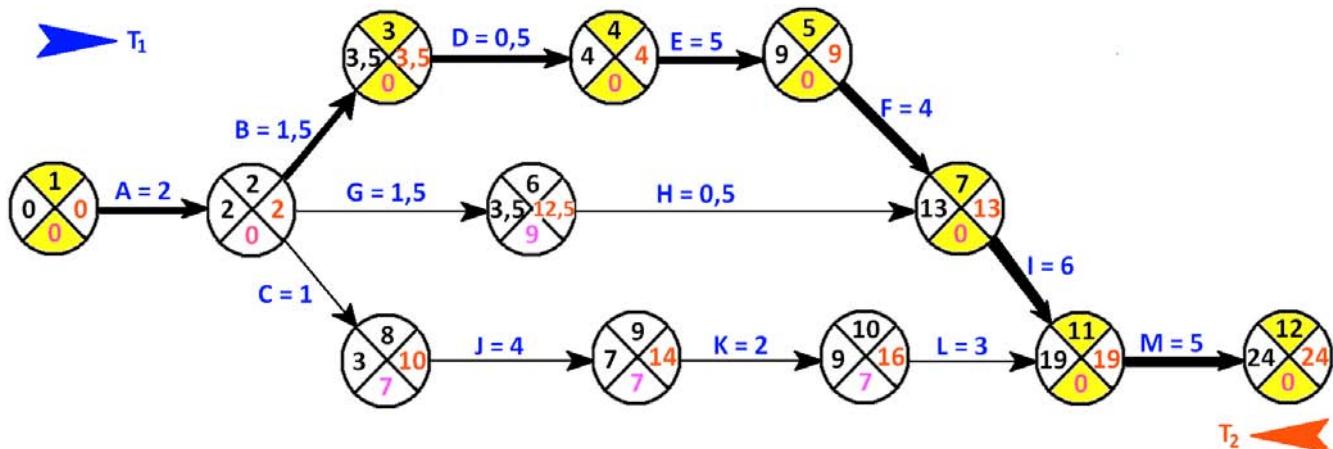
Solución:

- Se calcula el tiempo esperado (tiempo Pert) de cada actividad $t_e(A) = \frac{a + 4m + b}{6}$ y su varianza

$$\sigma_A^2 = \frac{(b-a)^2}{36}$$



Actividad	Tiempo optimista a	Tiempo más probable m	Tiempo pesimista b	Tiempo Pert t_e	Varianza $\sigma_{\text{actividad}}^2$
A	1,5	2	2,5	2	1/36
B	1	1,5	2	1,5	1/36
C	1	1	1	1	0
D	0,25	0,5	0,75	0,5	0,25/36
E	4	5	6	5	4/36
F	3	4	5	4	4/36
G	1	1,5	2	1,5	1/36
H	0,25	0,5	0,75	0,5	0,25/36
I	3	6,5	7	6	16/36
J	3	4	5	4	4/36
K	1,5	2	2,5	2	1/36
L	2	3	4	3	4/36
M	4	5	6	5	4/36



b) El camino crítico es el que tiene mayor duración entre los nodos inicial y final, coincide con la duración mínima del proyecto.

El camino crítico esta formado por las actividades en las que el tiempo *early / last* son iguales (situaciones críticas, con holgura cero), aquellas que no admiten retraso en su ejecución ya que esto implicaría un retraso general del proyecto.

En otras palabras, el camino crítico 1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 7 - 11 - 12, de longitud 24 semanas, es la parte del proyecto que hay que vigilar con mayor atención puesto que es la parte donde pueden aparecer problemas de retraso en la realización del proyecto planificado.

Por otra parte, la actividad más precisa es aquella que tiene menor varianza. En este caso, no es preciso realizar ningún cálculo dado que la actividad C tiene las tres estimaciones (tiempo optimista, normal y pesimista) con el mismo valor, luego su varianza será cero.



c) Siendo el camino crítico 1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 7 - 11 - 12 se calcula la duración del proyecto y el error que se comete (desviación típica del proyecto)

$$\mu_{\text{Proyecto}} = t_e(A) + t_e(B) + t_e(D) + t_e(E) + t_e(F) + t_e(I) + t_e(M) = 2 + 1,5 + 0,5 + 5 + 4 + 6 + 5 = 24 \text{ semanas}$$

$$\sigma_{\text{Proyecto}}^2 = \sigma_A^2 + \sigma_B^2 + \sigma_D^2 + \sigma_E^2 + \sigma_F^2 + \sigma_I^2 + \sigma_M^2 = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{0,25}{36} + \frac{4}{36} + \frac{4}{36} + \frac{16}{36} + \frac{4}{36} = 0,84 \text{ semanas}^2$$

$$\sigma_{\text{Proyecto}} = \sqrt{0,84} = 0,92 \text{ semanas}$$

La distribución del tiempo de finalización del proyecto, de acuerdo con el Teorema Central del Límite (TCL), sigue una distribución normal $N(24, 0,92)$

La probabilidad de finalizar el proyecto en 25 semanas o menos será:

$$P(X \leq 22) = P\left[\frac{X-24}{0,92} \leq \frac{25-24}{0,92}\right] = P(z \leq 1,08) = 0,86 \text{ (86%)}$$

Los plazos de ejecución que tienen un 90% de probabilidad de cumplirse es:

$$P(X \leq k) = P\left[\frac{X-24}{0,92} \leq \frac{k-24}{0,92}\right] = P\left[z \leq \frac{k-24}{0,92}\right] = 0,9 \Leftrightarrow P\left[z \geq \frac{k-24}{0,92}\right] = 0,1 \Leftrightarrow \frac{k-24}{0,92} = 1,28$$

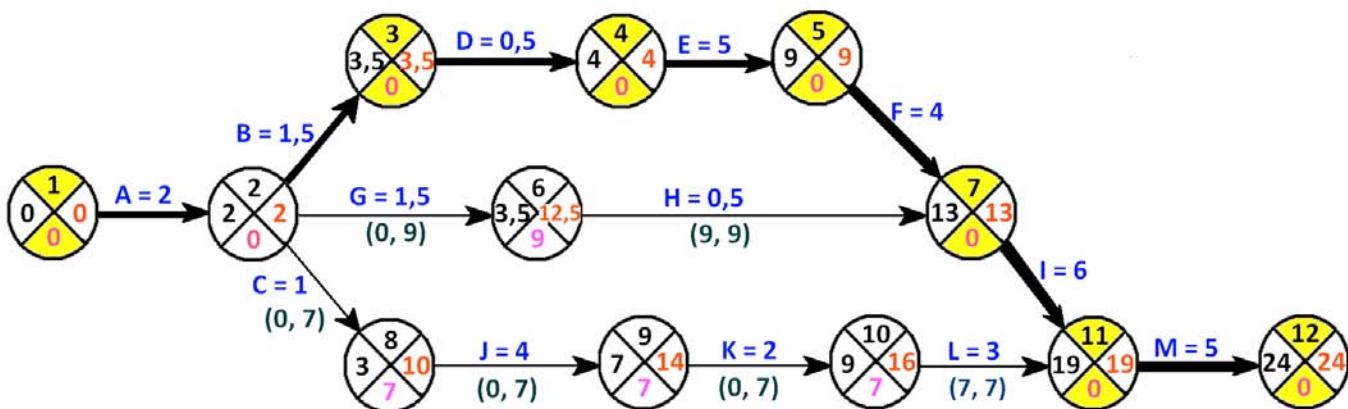
$$k = 24 + 0,92 \times 1,28 = 25,1776, \text{ entre } 25 \text{ y } 26 \text{ semanas}$$

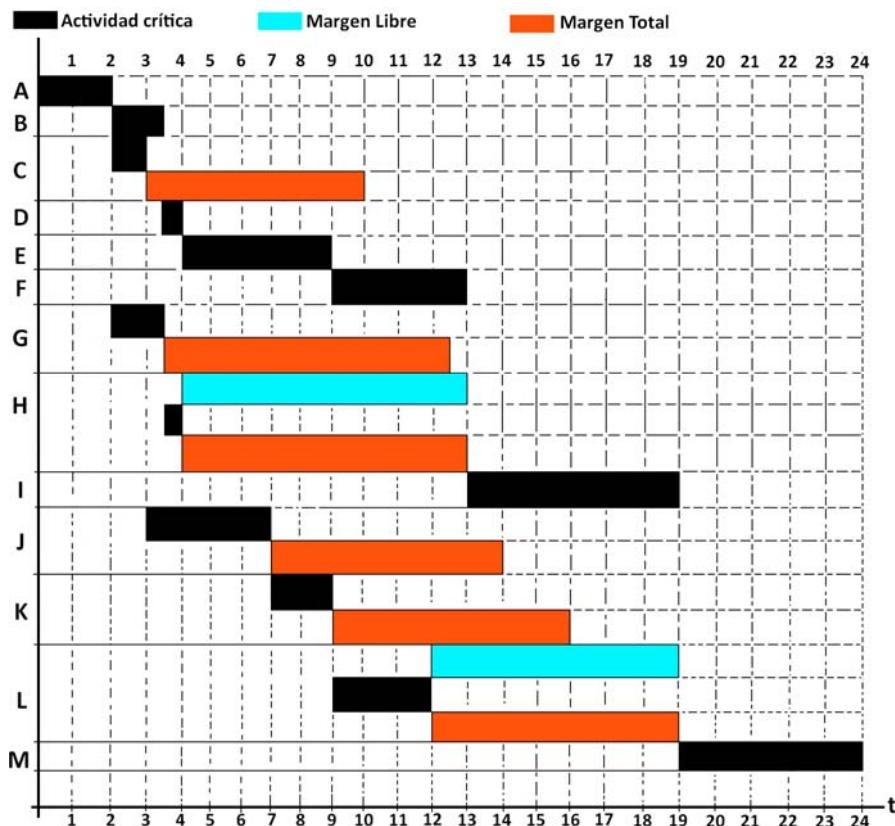
d) El gráfico Gantt es un método basado en la representación de las actividades en función del tiempo en unos ejes de coordenadas. El gráfico permite verificar el grado de cumplimiento de la ejecución de las actividades.

En el gráfico de Gantt cada actividad lleva asociada una barra de longitud igual a su duración, representando al final de cada una de ellas dos barritas que representan el margen libre de la actividad $MI = T_{1j} - T_{1i} - t_e$ (barrita superior) y el margen total de la actividad $Mt = T_{2j} - T_{1i} - t_e$ (barrita inferior). Las actividades críticas no tienen estas dos barritas.

**MÁRGENES LIBRE Y TOTAL DE CADA ACTIVIDAD NO CRÍTICA
LAS ACTIVIDADES CRÍTICAS NO TIENEN MARGEN**

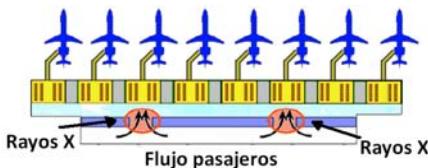
$$\begin{array}{c} \text{Diagrama de actividad} \\ \text{Actividad } i \rightarrow j \\ \text{Dura: } t_e(A_{ij}) \\ \text{Tiempo de inicio: } T_{1i} \\ \text{Tiempo de finalización: } T_{2j} \\ \text{Margenes: } MI = T_{1j} - T_{1i} - t_e \\ Mt = T_{2j} - T_{1i} - t_e \end{array}$$











El aeropuerto tiene dos sistemas de rayos-X, experiencias anteriores indican que un pasajero tarda 45 segundos en pasar por el área de seguridad, según una distribución de servicio exponencial.

Los clientes llegan en promedio al área de seguridad cada 25 segundos de acuerdo a una función de Poisson.

El director del aeropuerto quiere analizar la situación para conseguir que en un futuro próximo la demanda aumente un 60%. Para ello, necesita:

- Analizar la situación actual.
- Máquinas de rayos-X que se deben instalar en el futuro para dar un servicio de forma que el pasajero medio no espera más de dos minutos en la cola.
- Probabilidad de que en un futuro más de cuatro pasajeros esperan en la cola.

Solución:

a) En la actualidad: El sistema de seguridad es una cola de tipo M / M / 2 con s = 2 servidores

Si el número de llegadas sigue una distribución de Poisson $P(\lambda)$, el tiempo entre llegadas sigue una distribución exponencial de media $(1 / \lambda)$

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{\frac{1}{25}}{\frac{60 \times 60}{60 \times 60}} = 144 \rightarrow \lambda = 144 \text{ pasajeros/hora}$$

$$\frac{1}{\mu} = \frac{\frac{1}{45}}{\frac{60 \times 60}{60 \times 60}} = 80 \rightarrow \mu = 80 \text{ pasajeros/hora seguridad}$$

$$\text{Utilización promedio del sistema: } u_s = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{144}{80} = 1,8$$

$$\text{Factor de utilización del sistema de cola: } \rho = \frac{\lambda}{s \times \mu} = \frac{144}{2 \times 80} = 0,9$$

Probabilidad del sistema vacío:

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{2-1} \frac{1,8^n}{n!} + \frac{1}{2!} \times 1,8^2 \times \frac{1}{1-0,9}} = \frac{1}{1 + 1,8 + \frac{1}{2} \times 32,4} = 0,0526$$

$$\text{Número medio de pasajeros en cola: } L_q = \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^s \frac{\rho}{(1-\rho)^2} p_0 = \frac{1}{2!} \times 1,8^2 \times \frac{0,9}{0,1^2} \times 0,0526 = 7,674$$

$$\text{Número medio de pasajeros en sistema: } L_s = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = 7,674 + 1,8 = 9,474$$

$$\text{Tiempo promedio espera en la cola: } W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{7,674}{144} \times (60 \times 60) = 192 \text{ segundos}$$



$$\text{Tiempo promedio espera en sistema: } W_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{9,474}{144} \times (60 \times 60) = 237 \text{ segundos}$$

En la situación actual con dos aparatos de rayos-X (servidores) el tiempo medio de pasajeros en cola es de 192 segundos > 120 segundos, por lo que se necesitaría incorporar servidores (aparatos rayos-X).

b) En un futuro próximo, además de la necesidad de incorporar servidores, aumenta la demanda de pasajeros en un 60%.

$$\lambda = 144 \times 1,60 = 230,4 \text{ pasajeros/hora}$$

$$\mu = 80 \text{ pasajeros/hora área seguridad}$$

$$\text{Utilización promedio del sistema: } u_s = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{230,4}{80} = 2,88$$

■ Si el número de servidores fuera $s = 3$, tipo de cola M / M / 3, se tendría:

$$\text{Factor de utilización del sistema de cola: } \rho = \frac{\lambda}{s\mu} = \frac{230,4}{3 \times 80} = 0,96$$

Probabilidad del área de seguridad vacía:

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{3-1} \frac{2,88^n}{n!} + \frac{1}{3!} \times 2,88^3 \times \frac{1}{1-0,96}} = \frac{1}{1 + 2,88 + \frac{1}{2} \times 2,88^2 + 99,5328} = \frac{1}{107,56} = 0,0093$$

Número medio de espera de pasajeros en área de seguridad:

$$L_q = \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^s \frac{\rho}{(1-\rho)^2} p_0 = \frac{1}{3!} \times 2,88^3 \times \frac{0,96}{0,04^2} \times 0,0093 = 22,2157$$

$$\text{Tiempo promedio espera en la cola: } W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{22,2157}{230,4} \times (60 \times 60) = 347 \text{ segundos}$$

Siendo $W_q = 347$ segundos > 120 segundos se necesita incrementar el número de servidores en el sistema.

■ Si el número de servidores fuera $s = 4$, tipo de cola M / M / 4, se tendría:

$$\text{Factor de utilización del sistema de cola: } \rho = \frac{\lambda}{s\mu} = \frac{230,4}{4 \times 80} = 0,72$$

Probabilidad del área de seguridad vacía:

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{4-1} \frac{2,88^n}{n!} + \frac{1}{4!} \times 2,88^4 \times \frac{1}{1-0,72}} = \\ = \frac{1}{1 + 2,88 + \frac{1}{2} \times 2,88^2 + \frac{1}{6} \times 2,88^3 + \frac{1}{24} \times 2,88^4 \times \frac{1}{1-0,72}} = \frac{1}{22,246} = 0,045$$



Número medio de espera de pasajeros en área de seguridad:

$$L_q = \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^s \frac{\rho}{(1-\rho)^2} p_0 = \frac{1}{4!} \times 2,88^4 \times \frac{0,72}{0,28^2} \times 0,045 = 1,1846$$

$$\text{Tiempo promedio espera en la cola: } W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{1,1846}{230,4} \times (60 \times 60) = 18,51 \text{ segundos}$$

Siendo $W_q = 18,51$ segundos < 120 segundos con lo que habría que instalar 4 servidores (cuatro aparatos de rayos-X) con un número medio de cuatro pasajeros en el sistema.

$$\text{Número medio de pasajeros en sistema: } L_s = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = 1,1846 + 2,88 = 4,06 \approx 4$$

Con una hoja de cálculo se puede elaborar un diagrama de variación de segundos en la cola dependiendo de los servidores.

$s \equiv \text{Servidores}$	3	4	5
$W_q \equiv \text{Segundos sistemas colas}$	347	18,5	0,04



b) En un futuro próximo, además de la necesidad de incorporar servidores, aumenta la demanda de pasajeros en un 60%.

c) La probabilidad de que más de cuatro pasajeros esperan en la cola es la probabilidad de que esperen más de ocho pasajeros en el sistema ($L = L_q + L_s > 4 + 4$)

$$P(n > 8) = 1 - P(n \leq 8) = 1 - \left(\sum_{n=0}^4 \frac{(\lambda / \mu)^n}{n!} p_0 + \sum_{n=5}^8 \frac{(\lambda / \mu)^n}{s! s^{(n-4)}} p_0 \right) = \\ = 1 - (0,66937 + 0,24256) = 0,08807$$

$$\sum_{n=0}^4 \frac{(\lambda / \mu)^n}{n!} p_0 = \sum_{n=0}^4 \frac{2,88^n}{n!} \times 0,045 = \left(1 + 2,88 + \frac{2,88^2}{2} + \frac{2,88^3}{6} + \frac{2,88^4}{24} \right) \times 0,045 = 0,66937$$

$$\sum_{n=5}^8 \frac{(\lambda / \mu)^n}{s! s^{(n-4)}} p_0 = \sum_{n=5}^8 \frac{2,88^n}{4^{(n-4)} \cdot 4!} \times \frac{0,045}{4!} = \left(\frac{2,88^5}{4} + \frac{2,88^6}{4^2} + \frac{2,88^7}{4^3} + \frac{2,88^8}{4^4} \right) \times 0,001875 = 0,24256$$



Queuing Analysis

Problem Specification

Problem Title	RAYOS-X
Time Unit	hora
Entry Format	
<input checked="" type="radio"/> Simple M/M System <input type="radio"/> General Queuing System	
OK	Cancel
Help	

Queuing Analysis

RAYOS-X

Data Description	ENTRY
Number of servers	2
Service rate (per server per hora)	80
Customer arrival rate (per hora)	144
Queue capacity (maximum waiting space)	M
Customer population	M
Busy server cost per hora	
Idle server cost per hora	
Customer waiting cost per hora	
Customer being served cost per hora	
Cost of customer being balked	
Unit queue capacity cost	

Queuing Analysis

System Performance Summary for RAYOS-X

	Performance Measure	Result
1	System: M/M/2	From Formula
2	Customer arrival rate (λ) per hora =	144,0000
3	Service rate per server (μ) per hora =	80,0000
4	Overall system effective arrival rate per hora =	144,0000
5	Overall system effective service rate per hora =	144,0000
6	Overall system utilization =	90,0000 %
7	Average number of customers in the system (L) =	9,4737
8	Average number of customers in the queue (L_q) =	7,6737
9	Average number of customers in the queue for a busy system (L_b) =	9,0000
10	Average time customer spends in the system (W) =	0,0658 horas
11	Average time customer spends in the queue (W_q) =	0,0533 horas
12	Average time customer spends in the queue for a busy system (W_b) =	0,0625 horas
13	The probability that all servers are idle (P_0) =	5,2632 %
14	The probability an arriving customer waits (P_w) or system is busy (P_b) =	85,2632 %

Análisis de sensibilidad de los servidores (Máquinas de rayos-X) que se deben instalar en el futuro para dar un servicio de forma que el pasajero medio no espera más de dos minutos en la cola.

Queuing Analysis

RAYOS-X

Data Description	ENTRY
Number of servers	2
Service rate (per server per hora)	80
Customer arrival rate (per hora)	144
Queue capacity (maximum waiting space)	M
Customer population	M
Busy server cost per hora	
Idle server cost per hora	
Customer waiting cost per hora	
Customer being served cost per hora	
Cost of customer being balked	
Unit queue capacity cost	

Análisis Sensibilidad Servidores



Select Parameter for Sensitivity Analysis

Select a parameter for analysis

Number of servers
Service rate (mu)
Service pressure coefficient
Arrival rate (lambda)
Arrival discourage coefficient
Batch (bulk) size
Queue capacity
Customer population
Busy server cost per hora
Idle server cost per hora
Customer waiting cost per hora
Customer being served cost per hora
Cost of customer being balked
Unit queue capacity cost

Number of servers: 2

Specify either approximation or simulation for solution if no close form formula is available.

Solution Method

Approximation by G/G/s

Monte Carlo Simulation

Start from: 2

End at: 6

Step: 1

OK Cancel Help

Queuing Analysis

File Format Results Utilities Window Help

0.00 A

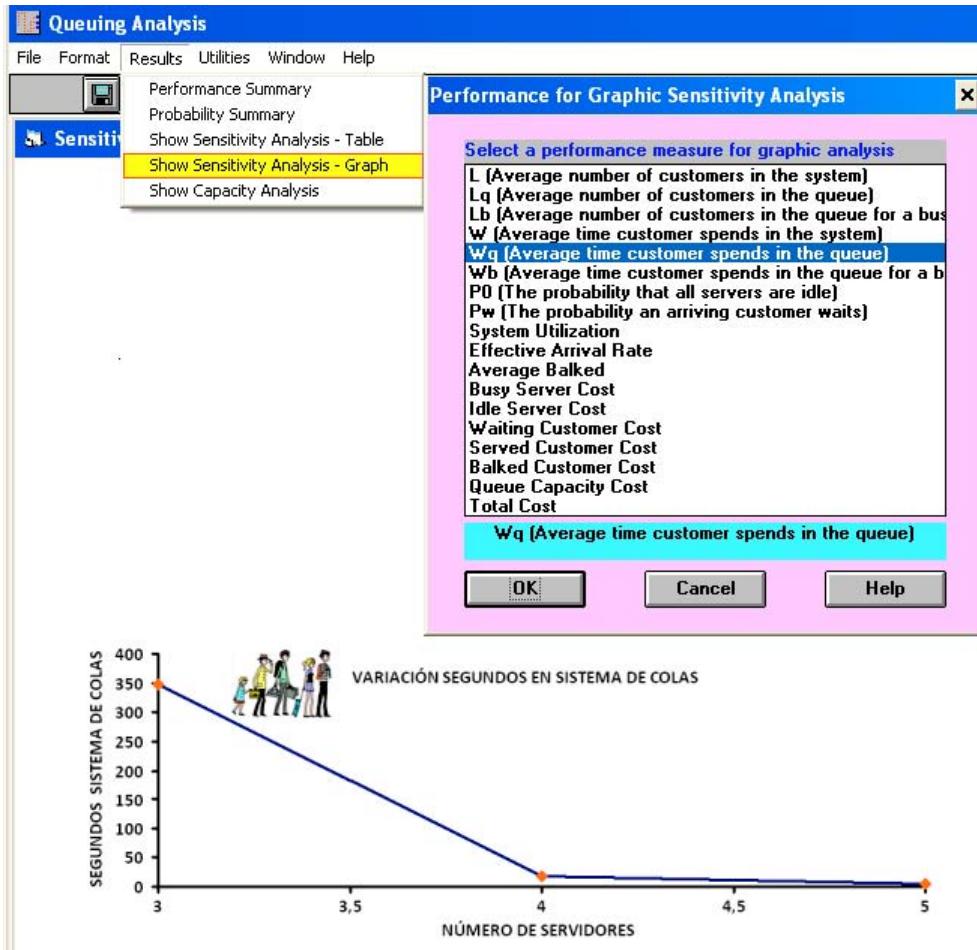
Sensitivity Analysis of Number of servers for RAYOS-X

Value	Effective Arrival Rate	System Utilization	L	Lq	Lb	W	Wq	Wb	P0	Pw
2	144,0000	0,9000	9,4737	7,6737	9,0000	0,0658	0,0533	0,0625	0,0526	0,8526
3	144,0000	0,6000	2,3321	0,5321	1,5000	0,0162	0,0037	0,0104	0,1460	0,3547
4	144,0000	0,4500	1,9052	0,1052	0,8182	0,0132	0,0007	0,0057	0,1616	0,1285
5	144,0000	0,3600	1,8228	0,0228	0,5625	0,0127	0,0002	0,0039	0,1646	0,0405
6	144,0000	0,3000	1,8048	0,0048	0,4286	0,0125	0,0000	0,0030	0,1652	0,0111

Se analizan entre 2 y 6 servidores para encontrar el tiempo medio de espera del cliente. sea inferior a dos minutos (0,033 horas) en cola.

Mediante una aproximación G / G / s

También se obtienen otras medidas de rendimiento.





Una medida más engorrosa es ir probando con distintos servidores.

Queuing Analysis

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSb Help

RAYOS-X

ENTRY	
Number of servers	4
Service rate (per server per hora)	80
Customer arrival rate (per hora)	144
Queue capacity (maximum waiting space)	M
Customer population	M
Busy server cost per hora	
Idle server cost per hora	
Customer waiting cost per hora	
Customer being served cost per hora	
Cost of customer being balked	
Unit queue capacity cost	

Queuing Analysis

File Format Results Utilities Window Help

System Performance Summary for RAYOS-X

	Performance Measure	Result
1	System: M/M/4	From Formula
2	Customer arrival rate (λ) per hora =	144,0000
3	Service rate per server (μ) per hora =	80,0000
4	Overall system effective arrival rate per hora =	144,0000
5	Overall system effective service rate per hora =	144,0000
6	Overall system utilization =	45,0000 %
7	Average number of customers in the system (L) =	1,9052
8	Average number of customers in the queue (L_q) =	0,1052
9	Average number of customers in the queue for a busy system (L_b) =	0,8182
10	Average time customer spends in the system (W) =	0,0132 horas
11	Average time customer spends in the queue (W_q) =	0,0007 horas
12	Average time customer spends in the queue for a busy system (W_b) =	0,0057 horas
13	The probability that all servers are idle (P_0) =	16,1622 %
14	The probability an arriving customer waits (P_w) or system is busy (P_b) =	12,8534 %



El departamento de personal de Mercadona tiene contratado 100 puestos de trabajo. Los empleados dejan su puesto de trabajo con una tasa de 3,4 al mes, mientras que la empresa requiere de 4 meses para completar las vacantes.

Un análisis anterior indica que la cantidad de empleados que faltan a su puesto de trabajo sigue una distribución de Poisson.

- Calcular las medidas de rendimiento.
- ¿Cuál es la probabilidad de que haya más de 6 puestos de trabajo vacantes en cualquier momento?
- ¿Cuántas personas en nómina debe tener la empresa para que trabajen un promedio de 100 empleados?

Solución:

a) Cada vez que un empleado deja la empresa, su puesto entra en la cola de puestos vacantes. Suponiendo que se inicia de inmediato la búsqueda de un empleado, el modelo de cola es de una cantidad infinita de servidores. Se trata, pues, de una cola M / M o una cola (M / M / ∞ / ∞ / ∞)

Tasa de llegadas: $\lambda = 3,4$

Tasa de servicio: $\mu = \frac{1}{4} = 0,25$

Intensidad de vacantes: $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{3,4}{0,25} = 13,6$

Puestos reales de trabajo: $100 - 13,6 = 86,4$

Número promedio de empleados en el sistema: $L_s = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{3,4}{0,25} = 13,6$

Número promedio de empleados en la cola: $L_q = 0$

Tiempo promedio de empleados en el sistema: $W_s = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{0,25} = 4$ meses

Tiempo promedio de empleados en la cola: $W_q = 0$

b) Probabilidad de n empleados en el sistema: $p_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n e^{-\frac{\lambda}{\mu}} = \frac{1}{n!} 13,6^n e^{-13,6}$

Probabilidad de ningún empleado en el sistema: $p_0 = e^{-13,6} = 0,0000012$



n	p _n	n · p _n	Acumulada
0	0,0000	0,0000	0,0000
1	0,0000	0,0000	0,0000
2	0,0001	0,0002	0,0001
3	0,0005	0,0015	0,0006
4	0,0018	0,0072	0,0024
5	0,0048	0,024	0,0072
6	0,0109	0,0654	0,0181
7	0,0212	0,1484	0,0393
8	0,036	0,288	0,0753
9	0,0544	0,4896	0,1297
10	0,074	0,74	0,2037
11	0,0915	1,0065	0,2952
12	0,1037	1,2444	0,3989
13	0,1085	1,4105	0,5074
14	0,1054	1,4756	0,6128
15	0,0955	1,4325	0,7083
16	0,0812	1,2992	0,7895
17	0,065	1,105	0,8545
18	0,0491	0,8838	0,9036
19	0,0351	0,6669	0,9387
20	0,0239	0,478	0,9626
21	0,0155	0,3255	0,9781
22	0,0096	0,2112	0,9877
23	0,0057	0,1311	0,9934
24	0,0032	0,0768	0,9966
25	0,0017	0,0425	0,9983
26	0,0009	0,0234	0,9992
27	0,0005	0,0135	0,9997
28	0,0002	0,0056	0,9999
29	0,0001	0,0029	1
	1	13,5992	

$$p_1 = \frac{1}{1!} 13,6 e^{-13,6} = 0,0000169$$

$$p_2 = \frac{1}{2!} 13,6^2 e^{-13,6} = 0,0001147$$

$$p_3 = \frac{1}{3!} 13,6^3 e^{-13,6} = 0,0005201$$

$$p_4 = \frac{1}{4!} 13,6^4 e^{-13,6} = 0,0017682$$

$$p_5 = \frac{1}{5!} 13,6^5 e^{-13,6} = 0,0048096$$

$$p_6 = \frac{1}{6!} 13,6^6 e^{-13,6} = 0,0109017$$

$$\begin{aligned}
P(x > 6) &= 1 - P(x \leq 6) = 1 - (p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6) = \\
&= 1 - 0,0181325 = 0,9818675 \quad (98,2\%)
\end{aligned}$$


Queuing Analysis

Problem Specification

Problem Title	MERCADONA
Time Unit	mes
Entry Format	
<input checked="" type="radio"/> Simple M/M System <input type="radio"/> General Queuing System	
OK	Cancel
Help	

Queuing Analysis

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

MERCADONA

Data Description	ENTRY
Number of servers	M
Service rate (per server per mes)	0.25
Customer arrival rate (per mes)	3.4
Queue capacity (maximum waiting space)	
Customer population	
Busy server cost per mes	
Idle server cost per mes	
Customer waiting cost per mes	
Customer being served cost per mes	
Cost of customer being balked	
Unit queue capacity cost	

Queuing Analysis

File Format Results Utilities Window Help

System

- Performance Summary
- Probability Summary
- Show Sensitivity Analysis - Table
- Show Sensitivity Analysis - Graph
- Show Capacity Analysis

MERCADONA

	Performance Measure	Result
1	System: M/M/Infinite	From Formula
2	Customer arrival rate (λ) per mes =	3,4000
3	Service rate per server (μ) per mes =	0,2500
4	Overall system effective arrival rate per mes =	3,4000
5	Overall system effective service rate per mes =	3,4000
6	Overall system utilization =	1360,0000 %
7	Average number of customers in the system (L) =	13,6000
8	Average number of customers in the queue (L_q) =	0
9	Average number of customers in the queue for a busy system (L_b) =	0
10	Average time customer spends in the system (W) =	4,0000 mes
11	Average time customer spends in the queue (W_q) =	0 mes
12	Average time customer spends in the queue for a busy system (W_b) =	0 mes
13	The probability that all servers are idle (P_0) =	0,0001 %
14	The probability an arriving customer waits (P_w) or system is busy (P_b) =	0 %

Queuing Analysis

File Format Results Utilities Window Help

MERCADONA

System Probability Summary for MERCADONA

n	Estimated Probability of n Customers in the System	Cumulative Probability
0	0,0000012	0,0000012
1	0,0000169	0,0000181
2	0,0001147	0,0001328
3	0,0005201	0,0006529
4	0,0017682	0,0024211
5	0,0048096	0,0072307
6	0,0109017	0,0181325



En un taller mecánico llegan vehículos para una puesta a punto antes de pasar la ITV, las llegadas siguen un proceso de Poisson de promedio 18 vehículos/hora.

Las dimensiones del taller sólo permiten que haya 4 vehículos, y las ordenanzas municipales no permiten esperar en la vía pública. El taller despacha un promedio de 6 vehículos/hora de acuerdo con una distribución exponencial. Se pide:

- Probabilidad de que no haya ningún vehículo en el taller. Calcular las probabilidades
- Promedio de vehículos en el taller
- ¿Cuánto tiempo pasa por término medio un vehículo en el taller?
- ¿Cuánto tiempo esperan por término medio los vehículos en la cola?
- ¿Cuál es la longitud media de la cola?

Solución:

- a) Es un modelo de cola M/M/1/4 con k = 4 vehículos

Hay un sola cola, con disciplina FIFO, la capacidad del sistema es limitada, de modo que sólo puede haber 4 vehículos como máximo en el taller, con lo cual el número máximo de vehículos en la cola es (4 - 1 = 3).

Las llegadas siguen un proceso de Poisson de parámetro $\lambda = 18$ vehículos/hora, los tiempos entre llegadas se distribuyen exponencialmente $\text{Exp}(\lambda = 18)$.

Los tiempos entre servicios se distribuyen exponencialmente $\text{Exp}(\mu = 6)$ siendo $\mu = 6$ vehículos/hora el número medio que el taller (servidor) es capaz de atender.

El factor de saturación $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{18}{6} = 3$ determina como varían las probabilidades p_n de que haya n vehículos en el sistema.

$$\text{Probabilidad de que no haya ningún vehículo en el taller: } p_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{k+1}} = \frac{1-3}{1-3^5} = 0,008264$$

$$\text{Para calcular las probabilidades: } p_n = \rho^n \cdot p_0 \quad \begin{cases} p_1 = 3 \times 0,008264 = 0,0248 \\ p_2 = 3^2 \times 0,008264 = 0,0744 \\ p_3 = 3^3 \times 0,008264 = 0,2232 \\ p_4 = 3^4 \times 0,008264 = 0,6694 \end{cases}$$

- b) Promedio de vehículos en el taller (sistema):

$$L_s = \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(k+1) \cdot \rho^{k+1}}{1-\rho^{k+1}} = \frac{3}{1-3} - \frac{5 \times 3^5}{1-3^5} = -\frac{3}{2} + \frac{1215}{242} = 3,5207 \text{ vehículos}$$

$$\text{c) Tiempo promedio de un vehículo en el taller: } W_s = \frac{L_s}{\lambda}$$

$$\text{Tasa de llegada efectiva: } \bar{\lambda} = \lambda \left[1 - \frac{(1-\rho) \cdot \rho^k}{1-\rho^{k+1}} \right] = 18 \left[1 - \frac{(1-3) \cdot 3^4}{1-3^5} \right] = 5,9504 \text{ vehículos/hora}$$



$$W_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{3,5207}{5,9504} = 0,5917 \text{ horas}$$

d) Tiempo medio de espera de vehículos en la cola: $W_q = W_s - \frac{1}{\mu} = 0,5917 - \frac{1}{6} = 0,4250 \text{ horas}$

e) Longitud de la cola: $L_q = \bar{\lambda} \cdot W_q = 5,9504 \times 0,4250 = 2,5289 \text{ vehículos}$

o bien, $L_q = L_s - \frac{(1-\rho^k) \cdot \rho}{1-\rho^{k+1}} = 3,52 - \frac{(1-3^4) \times 3}{1-3^5} = 2,5289 \text{ vehículos}$

Queuing Analysis

Problem Specification

Problem Title	TALLER
Time Unit	hora
Entry Format	
<input checked="" type="radio"/> Simple M/M System <input type="radio"/> General Queuing System	
OK	Cancel
Help	

Queuing Analysis

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help																									
 0.00 A																									
TALLER																									
<table border="1"> <thead> <tr> <th>Data Description</th> <th>ENTRY</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Number of servers</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>Service rate (per server per hour)</td> <td>6</td> </tr> <tr> <td>Customer arrival rate (per hour)</td> <td>18</td> </tr> <tr> <td>Queue capacity (maximum waiting space)</td> <td>3</td> </tr> <tr> <td>Customer population</td> <td>M</td> </tr> <tr> <td>Busy server cost per hour</td> <td></td> </tr> <tr> <td>Idle server cost per hour</td> <td></td> </tr> <tr> <td>Customer waiting cost per hour</td> <td></td> </tr> <tr> <td>Customer being served cost per hour</td> <td></td> </tr> <tr> <td>Cost of customer being balked</td> <td></td> </tr> <tr> <td>Unit queue capacity cost</td> <td></td> </tr> </tbody> </table>		Data Description	ENTRY	Number of servers	1	Service rate (per server per hour)	6	Customer arrival rate (per hour)	18	Queue capacity (maximum waiting space)	3	Customer population	M	Busy server cost per hour		Idle server cost per hour		Customer waiting cost per hour		Customer being served cost per hour		Cost of customer being balked		Unit queue capacity cost	
Data Description	ENTRY																								
Number of servers	1																								
Service rate (per server per hour)	6																								
Customer arrival rate (per hour)	18																								
Queue capacity (maximum waiting space)	3																								
Customer population	M																								
Busy server cost per hour																									
Idle server cost per hour																									
Customer waiting cost per hour																									
Customer being served cost per hour																									
Cost of customer being balked																									
Unit queue capacity cost																									

System Performance Summary for TALLER

	Performance Measure	Result
1	System: M/M/1/4	From Formula
2	Customer arrival rate (λ) per hora =	18,0000
3	Service rate per server (μ) per hora =	6,0000
4	Overall system effective arrival rate per hora =	5,9504
5	Overall system effective service rate per hora =	5,9504
6	Overall system utilization =	99,1736 %
7	Average number of customers in the system (L) =	3,5207
8	Average number of customers in the queue (L_q) =	2,5289
9	Average number of customers in the queue for a busy system (L_b) =	2,5500
10	Average time customer spends in the system (W) =	0,5917 horas
11	Average time customer spends in the queue (W_q) =	0,4250 horas
12	Average time customer spends in the queue for a busy system (W_b) =	0,4285 horas
13	The probability that all servers are idle (P_0) =	0,8264 %
14	The probability an arriving customer waits (P_w) or system is busy (P_b) =	99,1736 %
15	Average number of customers being balked per hora =	12,0496



System Probability Summary for TALLER

n	Estimated Probability of n Customers in the System	Cumulative Probability
0	0,0083	0,0083
1	0,0248	0,0331
2	0,0744	0,1074
3	0,2231	0,3306
4	0,6694	1,0000

$$L_s = \sum_{n=1}^4 n \cdot p_n = 1 \times 0,0248 + 2 \times 0,0744 + 3 \times 0,2231 + 4 \times 0,6694 = 3,5207$$

$$L_s = L_q + (1 - p_0) \rightarrow L_q = L_s - (1 - p_0) = 3,5207 - (1 - 0,008264) = 2,5289$$

$$L_q = \sum_{n=2}^4 (n-1) \cdot p_n = 1 \times p_2 + 2 \times p_3 + 3 \times p_4 = 1 \times 0,0744 + 2 \times 0,2231 + 3 \times 0,6694 = 2,5289$$

$$\bar{\lambda} = \lambda \cdot \sum_{n=0}^3 p_n = 18 \times (p_0 + p_1 + p_2 + p_3) = 18 \times (1 - p_4) = 18 \times (1 - 0,6694) = 5,9504$$

$$W_s = \frac{L_s}{\bar{\lambda}} = \frac{3,5207}{5,9504} = 0,5917 \quad W_q = \frac{L_q}{\bar{\lambda}} = \frac{2,5289}{5,9504} = 0,4250$$



Un asesor fiscal dispone de un local para atender a sus clientes, los cuales se concentran mayoritariamente entre los meses de mayo y junio. El local tiene una capacidad máxima de 8 asientos en espera, el cliente se va si no encuentra un asiento libre.

El tiempo entre llegada de clientes se puede considerar distribuido exponencialmente según un parámetro $\lambda = 20$ clientes por hora en período punta. El tiempo de una consulta está distribuido exponencialmente con una media de 12 minutos.

- ¿Cuántas consultas por hora realizará en promedio?
- ¿Cuál es el tiempo medio de permanencia en el local?

Solución:

a) Es un modelo M/M/1/9 $k = 8$ clientes espera + 1 cliente atendido = 9

$$\lambda = 20 \text{ clientes/hora} \quad \mu = \frac{60}{12} = 5 \text{ clientes/hora}$$

El factor de saturación $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{20}{5} = 4$ determina como varían las probabilidades p_n de que haya n clientes en el sistema.

$$\text{Probabilidades del estado: } p_n = \frac{(1-\rho) \cdot \rho^n}{1-\rho^{k+1}} \rightarrow \begin{cases} p_0 = \frac{(1-4)}{1-4^{10}} = 0,0000029 \\ p_9 = \frac{(1-4) \cdot 4^9}{1-4^{10}} = 0,75 \end{cases}$$

$$\text{O bien, } p_k = \rho^k \cdot p_0 \rightarrow p_9 = 4^9 \cdot \frac{(1-4)}{1-4^{10}} = 0,75$$

Tasa de llegada efectiva: $\bar{\lambda} = \lambda \cdot (1 - p_k) = 20 \cdot (1 - 0,75) = 5 \text{ clientes/hora}$

Promedio de clientes en el sistema:

$$L_s = \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(k+1) \cdot \rho^{k+1}}{1-\rho^{k+1}} = \frac{4}{1-4} - \frac{10 \times 4^{10}}{1-4^{10}} = 8,6667 \text{ clientes}$$

$$\text{b) Tiempo promedio de estancia en el sistema: } W_s = \frac{L_s}{\bar{\lambda}} = \frac{8,6667}{5} = 1,7333 \text{ horas}$$



Problem Specification

Problem Title	FISCAL
Time Unit	hora
Entry Format	
<input checked="" type="radio"/> Simple M/M System <input type="radio"/> General Queuing System	
OK	Cancel

Queuing Analysis

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

Solve the Performance
Simulate the System
Perform Sensitivity Analysis
Perform Capacity Analysis

Data Description	ENTRY
Number of servers	1
Service rate (per server per mes)	5
Customer arrival rate (per mes)	20
Queue capacity (maximum waiting space)	8
Customer population	
Busy server cost per mes	
Idle server cost per mes	
Customer waiting cost per mes	
Customer being served cost per mes	
Cost of customer being balked	
Unit queue capacity cost	

System Performance Summary for FISCAL

	Performance Measure	Result
1	System: M/M/1/9	From Formula
2	Customer arrival rate (λ) per hora =	20,0000
3	Service rate per server (μ) per hora =	5,0000
4	Overall system effective arrival rate per hora =	5,0000
5	Overall system effective service rate per hora =	5,0000
6	Overall system utilization =	99,9997 %
7	Average number of customers in the system (L_s) =	8,6667
8	Average number of customers in the queue (L_q) =	7,6667
9	Average number of customers in the queue for a busy system (L_b) =	7,6667
10	Average time customer spends in the system (W_s) =	1,7333 horas
11	Average time customer spends in the queue (W_q) =	1,5333 horas
12	Average time customer spends in the queue for a busy system (W_b) =	1,5333 horas
13	The probability that all servers are idle (P_0) =	0,0003 %
14	The probability an arriving customer waits (P_w) or system is busy (P_b) =	99,9997 %
15	Average number of customers being balked per hora =	15,0000

Queuing Analysis

File Format Results Utilities Window Help

0.00 A

System Probability Summary for FISCAL

n	Estimated Probability of n Customers in the System	Cumulative Probability
0	0,0000029	0,0000029
1	0,0000114	0,0000143
2	0,0000458	0,0000601
3	0,0001831	0,0002432
4	0,0007324	0,0009756
5	0,0029297	0,0039053
6	0,0117188	0,0156241
7	0,0468750	0,0624991
8	0,1875002	0,2499993
9	0,7500007	1,0000000

Promedio de clientes en el sistema:

$$L_s = \sum_{n=0}^{9} n \cdot p_n = 8,6667$$

Promedio de clientes en la cola:

$$L_q = \sum_{n=2}^{9} (n - 1) \cdot p_n = 7,6667$$

Tasa efectiva de llegada:

$$\bar{\lambda} = \lambda \cdot \sum_{n=0}^{8} p_n = 20 \cdot 0,2499993 = 5$$



Un grupo de investigadores, formado por seis personas, dispone de dos terminales para realizar cálculos. El trabajo promedio de cálculo requiere de 20 minutos de tiempo de terminal, y el tiempo promedio entre solicitudes de servicio es de 30 minutos. Se supone que estas solicitudes están distribuidas exponencialmente. Se desea saber:

- Medidas de rendimiento en la cola y en el sistema.
- Número promedio clientes y tiempo promedio en cola para un sistema ocupado.

Solución:

- Se trata de una modelo de cola M/M/2/6

$$\text{Tasa de llegada: } \lambda = \frac{60}{30} = 2 \text{ clientes/hora} \quad \text{Tasa de servicio: } \mu = \frac{60}{20} = 3 \text{ clientes/hora}$$

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^s \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \sum_{n=s+1}^c \frac{1}{s! \cdot s^{n-s}} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n} = \frac{1}{1,9988} = 0,5003$$

$$\sum_{n=0}^2 \frac{1!}{n!} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n + \sum_{n=3}^6 \frac{1}{2! \cdot 2^{n-2}} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n = 1,8922 + 0,1076 = 1,9998$$

$$\sum_{n=0}^2 \frac{1!}{n!} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n = 1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1,8922$$

$$\sum_{n=3}^6 \frac{1}{2! \cdot 2^{n-2}} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0,0741 + 0,0247 + 0,0082 + 0,0003 = 0,1076$$

Probabilidades de cada estado del sistema: $p_n = \begin{cases} \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot p_0 & n \leq 2 \\ \frac{1}{s! \cdot s^{n-s}} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot p_0 & n \geq 3 \end{cases}$

$$p_1 = \frac{1}{1!} \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot 0,5003 = 0,3336$$

$$p_2 = \frac{1}{2! \cdot 2^{2-2}} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot 0,5003 = 0,1112$$

$$p_3 = \frac{1}{2! \cdot 2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot 0,5003 = 0,0371$$

$$p_4 = \frac{1}{2! \cdot 2^2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot 0,5003 = 0,0124$$



$$p_5 = \frac{1}{2! 2^3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5 \cdot 0,5003 = 0,0041 \quad p_6 = \frac{1}{2! 2^4} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^6 \cdot 0,5003 = 0,0014$$

Tabla estados de probabilidad

n	p _n	n p _n	(n - 2) p _n
0	0,5003		
1	0,3336	0,3336	
2	0,1112	0,2224	
3	0,0371	0,1113	0,0371
4	0,0124	0,0496	0,0248
5	0,0041	0,0205	0,0123
6	0,0014	0,0008	0,0005
		0,7454	0,0796

Número medio de clientes en el sistema: $L_s = \sum_{n=0}^6 n \cdot p_n = 0,7454$

Número medio de clientes en cola: $L_q = \sum_{n=3}^6 (n - s) \cdot p_n = 0,0796$

Tasa efectiva de llegada: $\bar{\lambda} = 2 \sum_{n=0}^5 p_n = 2 (1 - 0,0014) = 1,9973$

$\bar{\lambda} = \mu (L_s - L_q) \rightarrow \bar{\lambda} = 3 (0,7454 - 0,0796) = 1,9973$

Utilización efectiva del sistema: $\bar{\rho} = \frac{1,9973}{2 \cdot 3} = 0,3329$

Tiempo promedio de clientes en el sistema: $W_s = \frac{L_s}{\bar{\lambda}} = \frac{0,7454}{1,9973} = 0,3732$ horas

Tiempo promedio de clientes en la cola: $W_q = \frac{L_q}{\bar{\lambda}} = \frac{0,0796}{1,9973} = 0,30399$ horas

b) $p_w = \sum_{n \geq 2}^6 p_n = 1 - (0,5003 + 0,3336) = 0,1661$

Número promedio clientes en cola para un sistema ocupado: $L_b = \frac{L_q}{p_w} = \frac{0,0796}{0,1661} = 0,4793$ horas

Tiempo promedio clientes en cola para un sistema ocupado: $W_b = \frac{W_q}{p_w} = \frac{0,0399}{0,1661} = 0,2400$ horas



Queuing Analysis

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

Solve the Performance Simulate the System Perform Sensitivity Analysis Perform Capacity Analysis

INVESTIGACION

Service rate (per mes) 3

Data Description	ENTRY
Number of servers	2
Service rate (per server per mes)	3
Customer arrival rate (per mes)	2
Queue capacity (maximum waiting space)	4
Customer population	
Busy server cost per mes	
Idle server cost per mes	
Customer waiting cost per mes	
Customer being served cost per mes	
Cost of customer being balked	
Unit queue capacity cost	

Queuing Analysis

File Format Results Utilities Window Help

Performance Summary Probability Summary

INVESTIGACION

System

Show Sensitivity Analysis - Table Show Sensitivity Analysis - Graph Show Capacity Analysis

	Performance Measure	Result
1	System: M/M/2/6	From Formula
2	Customer arrival rate (λ) per mes =	2,0000
3	Service rate per server (μ) per mes =	3,0000
4	Overall system effective arrival rate per mes =	1,9973
5	Overall system effective service rate per mes =	1,9973
6	Overall system utilization =	33,2876 %
7	Average number of customers in the system (L) =	0,7454
8	Average number of customers in the queue (L_q) =	0,0796
9	Average number of customers in the queue for a busy system (L_b) =	0,4793
10	Average time customer spends in the system (W) =	0,3732 mess
11	Average time customer spends in the queue (W_q) =	0,0399 mess
12	Average time customer spends in the queue for a busy system (W_b) =	0,2400 mess
13	The probability that all servers are idle (P_o) =	50,0343 %
14	The probability an arriving customer waits (P_w) or system is busy (P_b) =	16,6095 %

Queuing Analysis

File Format Results Utilities Window Help

0.00 A

INVESTIGACION

System Probability Summary for INVESTIGACION

n	Estimated Probability of n Customers in the System	Cumulative Probability
0	0,5003	0,5003
1	0,3336	0,8339
2	0,1112	0,9451
3	0,0371	0,9822
4	0,0124	0,9945
5	0,0041	0,9986
6	0,0014	1,0000



Una línea aérea dispone de un sistema de mantenimiento para 10 aeronaves. El mantenimiento de cada aeronave sigue una distribución (distribución entre llegada) con un tiempo promedio de 200 horas entre uno y otro mantenimiento y un coste de 30 euros/hora.

Para afrontar la situación se encarga a dos equipos idénticos para el mantenimiento, que necesitan un promedio de diez horas para cada aeronave, los tiempos de mantenimiento se distribuyen exponencialmente, con un coste de 10 euros/hora, dedicándose a otras actividades cuando no hay aeronaves que revisar. Se pide:

- Medidas de rendimiento.
- ¿Cuál es el coste diario que origina el tiempo ocioso de aeronaves y mantenimiento?

Solución:

a) Es un modelo de cola $M/M/2/10$ de un sistema cerrado, las $k = 10$ aeronaves constituyen la población de clientes, verificándose las demás condiciones.

$$\text{Tasa de llegadas: } \lambda = \frac{1}{200} = 0,005 \text{ averías/hora}$$

$$\text{Tasa de servicio: } \mu = \frac{1}{10} = 0,1 \text{ mantenimiento/hora}$$

Probabilidad de que ninguna aeronave se encuentre en el sistema de colas:

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{k!}{(k-n)! n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \sum_{n=s}^k \frac{k!}{(k-n)! s^{n-s} s!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n} = \frac{1}{1,5 + 0,1396} = 0,6099$$

$$\sum_{n=0}^{s-1} \frac{k!}{(k-n)! n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = \sum_{n=0}^1 \frac{10!}{(10-n)! n!} \left(\frac{0,005}{0,1}\right)^n = 1 + 0,5 = 1,5$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=s}^k \frac{k!}{(k-n)! s^{n-s} s!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n &= \sum_{n=2}^{10} \frac{10!}{(10-n)! 2^{n-2} 2!} \left(\frac{0,005}{0,1}\right)^n = \\ &= 45 \times 0,05^2 + 180 \times 0,05^3 + 630 \times 0,05^4 + 1890 \times 0,05^5 + 4725 \times 0,05^6 + 9450 \times 0,05^7 + \\ &+ 14175 \times 0,05^8 + 14175 \times 0,05^9 + 70875 \times 0,05^{10} = 0,1396 \end{aligned}$$

Probabilidades de aeronaves en cada estado:

$$p_1 = \frac{k!}{(k-n)! n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0 = \frac{10!}{(10-1)! 1!} \left(\frac{0,005}{0,1}\right) 0,6099 = 0,3050$$

$$p_2 = \frac{k!}{(k-n)! s^{n-s} s!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0 = \frac{10!}{(10-2)! 2^{2-2} 2!} \left(\frac{0,005}{0,1}\right)^2 0,6099 = 0,0686$$



$$p_3 = \frac{k!}{(k-n)! s^{n-s} s!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0 = \frac{10!}{(10-3)! 2^{3-2} 2!} \left(\frac{0,005}{0,1}\right)^3 0,6099 = 0,0137$$

$$p_4 = \frac{k!}{(k-n)! s^{n-s} s!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0 = \frac{10!}{(10-4)! 2^{4-2} 2!} \left(\frac{0,005}{0,1}\right)^4 0,6099 = 0,0024$$

$$p_5 = \frac{k!}{(k-n)! s^{n-s} s!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0 = \frac{10!}{(10-5)! 2^{5-2} 2!} \left(\frac{0,005}{0,1}\right)^5 0,6099 = 0,0004$$

$$p_6 = \frac{k!}{(k-n)! s^{n-s} s!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0 = \frac{10!}{(10-6)! 2^{6-2} 2!} \left(\frac{0,005}{0,1}\right)^6 0,6099 = 0,0000$$

Estados	Probabilidad	Probabilidad acumulada
p_0	0,6099	0,6099
p_1	0,3050	0,9149
p_2	0,0686	0,9835
p_3	0,0137	0,9972
p_4	0,0024	0,9996
p_5	0,0004	1,0000
p_6	0,0000	1,0000

Número promedio de aeronaves en la sistema: $L_s = \sum_{n=1}^k n \cdot p_n$

$$L_s = \sum_{n=1}^k n \cdot p_n = 1 \times 0,3050 + 2 \times 0,0686 + 3 \times 0,0137 + 4 \times 0,024 + 5 \times 0,0004 = 0,4951$$

Tasa efectiva de llegada al sistema: $\bar{\lambda} = \lambda (k - L_s) = 0,005 (10 - 0,4951) = 0,047525$

$$\begin{aligned} \bar{\lambda} &= \lambda \sum_{n=0}^k (k-n) \cdot p_n = 0,005 \times \sum_{n=0}^{10} (10-n) \cdot p_n = \\ &= 0,005 \times (10 \times 0,6099 + 9 \times 0,3050 + 8 \times 0,0686 + 7 \times 0,0137 + 6 \times 0,0024 + 5 \times 0,0004) = 0,047525 \end{aligned}$$

$$\text{Utilización efectiva del sistema: } \bar{\rho} = \frac{\bar{\lambda}}{s \cdot \mu} = \frac{0,047525}{2 \cdot 0,1} = \frac{0,047525}{2 \cdot 0,1} = 0,23625$$

$$\text{Número promedio de aeronaves en la cola: } L_q = \sum_{n=s+1}^k (n-s) \cdot p_n$$

$$L_q = \sum_{n=3}^{10} (n-2) \cdot p_n = 1 \times 0,0137 + 2 \times 0,0024 + 3 \times 0,0004 = 0,0198$$



$$\text{O bien, } L_q = L_s - \frac{\bar{\lambda}}{\mu} = 0,4951 - \frac{0,047525}{0,1} = 0,0198$$

$$p_w = \sum_{n \geq s}^k p_n = \sum_{n \geq 2}^{10} p_n = 1 - 0,9149 = 0,0851$$

$$\text{Tiempo promedio de aeronaves en el sistema: } W_s = \frac{L_s}{\bar{\lambda}} = \frac{0,4951}{0,0475} = 10,4169$$

$$\text{Tiempo promedio de aeronaves en la cola: } W_q = \frac{L_q}{\bar{\lambda}} = \frac{0,0198}{0,0475} = 0,4169$$

$$\text{Número promedio de aeronaves en la cola para un sistema ocupado: } L_b = \frac{L_q}{p_w} = \frac{0,0198}{0,0851} = 0,2327$$

$$\text{Tiempo promedio de aeronaves en la cola para un sistema ocupado: } W_b = \frac{W_q}{p_w} = \frac{0,4169}{0,0851} = 4,8957$$

b) Coste total: $c_t = c_q + c_s = 10 + 30 = 40$

$$\text{Coste total servidor ocupado: } CTS = c_t \cdot (L_s - L_q) = 40 \times (0,4951 - 0,0198) = 19,01$$

$$\text{Coste total servidor desocupado: } CTS = c_s \cdot (s - L_s + L_q) = 30 \times (2 - 0,4951 + 0,0198) = 45,741$$

$$\text{Coste total espera de aeronaves: } CTQ = \bar{\lambda} \cdot c_q \cdot W_q = 0,047525 \times 10 \times 0,4169 = 0,1981$$

$$\text{Coste total sistema: } CT = CTS + CTS + CTQ = 19,01 + 45,741 + 0,1981 = 64,949$$

Problem Specification

Problem Title	AERONAVES	
Time Unit	hora	
Entry Format		
<input checked="" type="radio"/> Simple M/M System <input type="radio"/> General Queuing System		
OK	Cancel	Help

Queuing Analysis

File	Edit	Format	Solve and Analyze	Results	Utilities	Window	WinQSB	Help
AERONAVES								
Data Description		ENTRY						
Number of servers	2							
Service rate (per server per hora)	0.1							
Customer arrival rate (per hora)	0.005							
Queue capacity (maximum waiting space)	M							
Customer population	10							
Busy server cost per hora	40							
Idle server cost per hora	30							
Customer waiting cost per hora	10							
Customer being served cost per hora								
Cost of customer being balked								
Unit queue capacity cost	euro							



Queuing Analysis

File Format Results Utilities Window Help

Performance Summary
Probability Summary
Show Sensitivity Analysis - Table
Show Sensitivity Analysis - Graph
Show Capacity Analysis

NAVES

	Performance Measure	Result
1	System: M/M/2//10	From Formula
2	Customer arrival rate (λ) per hora =	0,0050
3	Service rate per server (μ) per hora =	0,1000
4	Overall system effective arrival rate per hora =	0,0475
5	Overall system effective service rate per hora =	0,0475
6	Overall system utilization =	23,7623 %
7	Average number of customers in the system (L) =	0,4951
8	Average number of customers in the queue (L_q) =	0,0198
9	Average number of customers in the queue for a busy system (L_b) =	0,2327
10	Average time customer spends in the system (W) =	10,4169 horas
11	Average time customer spends in the queue (W_q) =	0,4169 horas
12	Average time customer spends in the queue for a busy system (W_b) =	4,8957 horas
13	The probability that all servers are idle (P_0) =	60,9901 %
14	The probability an arriving customer waits (P_w) or system is busy (P_b) =	8,5148 %
15	Average number of customers being balked per hora =	0
16	Total cost of busy server per hora =	\$19,0099
17	Total cost of idle server per hora =	\$45,7426
18	Total cost of customer waiting per hora =	\$0,1981
19	Total cost of customer being served per hora =	\$0
20	Total cost of customer being balked per hora =	\$0
21	Total queue space cost per hora =	\$0
22	Total system cost per hora =	\$64,9506

Queuing Analysis

File Format Results Utilities Window Help

0.00 A

System Probability Summary for AERONAVES

n	Estimated Probability of n Customers in the System	Cumulative Probability
0	0,6099	0,6099
1	0,3050	0,9149
2	0,0686	0,9835
3	0,0137	0,9972
4	0,0024	0,9996
5	0,0004	1,0000
6	0,0000	1,0000
7	0,0000	1,0000



El servicio de lavacoches de un aeropuerto tiene una tasa de llegadas de 9 vehículos por hora, pudiendo atender un vehículo cada 5 minutos, con un error típico ($\sigma = 2$) minutos. Encontrar las medidas de eficiencia:

- a) Modelo M / G / 1
- b) Modelo M / D / 1
- c) Modelo M / E_k / 1
- d) Modelo G / G / 2

Solución:

a) Medidas de eficiencia Modelo General M / G / 1 (Exponencial / General / 1 servidor)

$$\lambda = \frac{9}{60} = 0,15 \text{ vehículos/minuto} \rightarrow \text{Tasa llegadas (Media)} = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0,15} = 6,666666$$

$$\mu = \frac{1}{5} = 0,2 \text{ vehículos/minuto}, \sigma = 2 \text{ minutos}$$

$$\text{Factor de utilización: } \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0,15}{0,2} = 0,75$$

$$\text{Promedio de vehículos en cola: } L_q = \frac{\lambda^2 \cdot \sigma^2 + \rho^2}{2 \cdot (1 - \rho)} = \frac{0,15^2 \times 2^2 + 0,75^2}{2 \times (1 - 0,75)} = 1,3050 \text{ vehículos}$$

$$\text{Promedio de vehículos en sistema: } L_s = L_q + \rho = 1,3050 + 0,75 = 2,0550 \text{ minutos}$$

$$\text{Tiempo promedio de espera en la cola: } W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{1,3050}{0,15} = 8,7000 \text{ minutos}$$

$$\text{Tiempo promedio de estancia en lavacoches: } W_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{2,0550}{0,15} = 13,7000 \text{ minutos}$$



Queuing Analysis

Problem Specification

Problem Title	LAVACOCHES	
Time Unit	minuto	
Entry Format		
<input type="radio"/> Simple M/M System <input checked="" type="radio"/> General Queueing System		
OK	Cancel	Help



Queuing Analysis

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

LAVACOCHES

Data Description	ENTRY
Number of servers	1
Service time distribution (in minuto)	General/Arbitrary
Mean (μ)	$5 = 1 / \mu$
Standard deviation ($s > 0$)	2
(Not used)	
Service pressure coefficient	
Interarrival time distribution (in minuto)	Exponential
Location parameter (a)	0
Scale parameter ($b > 0$) ($b = \text{mean if } a=0$)	$6.66666 = 1 / \lambda$
(Not used)	
Arrival discourage coefficient	
Batch (bulk) size distribution	Constant
Constant value	1
(Not used)	
(Not used)	
Queue capacity (maximum waiting space)	
Customer population	

Probability Distribution Function

Click the distribution for your choice.

- Geometric
- HyperGeometric
- Laplace
- LogNormal
- Normal
- Pareto
- Poisson
- Power Function
- Triangular
- Uniform
- Weibull
- General/Arbitrary

Parameter 1: Mean (μ)

Parameter 2: Standard deviation ($s > 0$)

Parameter 3: (Not used)

OK Cancel Help

Interarrival time distribution: Distribución del tiempo entre llegadas

Batch size distribution: Distribución del tamaño del lote

Queuing Analysis

File Format Results Utilities Window Help

LAVACOCHES

System Performance Summary for LAVACOCHES

	Performance Measure	Result
1	System: M/G/1	From Formula
2	Customer arrival rate (λ) per minuto =	0,1500
3	Service rate per server (μ) per minuto =	0,2000
4	Overall system effective arrival rate per minuto =	0,1500
5	Overall system effective service rate per minuto =	0,1500
6	Overall system utilization =	75,0000 %
7	Average number of customers in the system (L) =	2,0550
8	Average number of customers in the queue (L_q) =	1,3050
9	Average number of customers in the queue for a busy system (L_b) =	1,7400
10	Average time customer spends in the system (W) =	13,7000 minutos
11	Average time customer spends in the queue (W_q) =	8,7000 minutos
12	Average time customer spends in the queue for a busy system (W_b) =	11,6000 minutos
13	The probability that all servers are idle (P_0) =	25,0000 %
14	The probability an arriving customer waits (P_w) or system is busy (P_b) =	75,0000 %

- Con la modificación:
$$\frac{\text{Rendimiento cola (M / G / 1)}}{\left(\frac{1 + \mu^2 \cdot \sigma^2}{2} \right)} = \text{Rendimiento cola (M / M / 1)}$$

Las medidas de eficiencia de una cola M / G / 1 a medidas de rendimiento de una cola M / M / 1



$$\frac{1 + \mu^2 \cdot \sigma^2}{2} = \frac{1 + 0,2^2 \cdot 2^2}{2} = 0,58$$

$$\frac{L_q}{0,58} = \frac{1,3050}{0,58} \Big|_{M/G/1} = 2,250 = L_q \Big|_{M/M/1}$$

$$\frac{W_q}{0,58} = \frac{8,7}{0,58} \Big|_{M/G/1} = 15 = W_q \Big|_{M/M/1}$$

$$\frac{L_s}{0,58} + \rho = \frac{1,3050}{0,58} + 0,75 \Big|_{M/G/1} = 3 = L_s \Big|_{M/M/1}$$

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda} \Big|_{M/G/1} = \frac{3}{0,15} = 20 = W_s \Big|_{M/M/1}$$

Queuing Analysis

File Format Results Utilities Window Help

0.00 A

System Performance Summary for LAVACOCHES

	Performance Measure	Result
1	System: M/M/1	From Formula
2	Customer arrival rate (λ) per minuto =	0,150
3	Service rate per server (μ) per minuto =	0,200
4	Overall system effective arrival rate per minuto =	0,150
5	Overall system effective service rate per minuto =	0,150
6	Overall system utilization =	75,000 %
7	Average number of customers in the system (L) =	3,000
8	Average number of customers in the queue (L_q) =	2,250
9	Average number of customers in the queue for a busy system (L_b) =	3,000
10	Average time customer spends in the system (W) =	20,000 minutos
11	Average time customer spends in the queue (W_q) =	15,000 minutos
12	Average time customer spends in the queue for a busy system (W_b) =	20,000 minutos
13	The probability that all servers are idle (P_0) =	25,000 %
14	The probability an arriving customer waits (P_w) or system is busy (P_b) =	75,000 %

- M/G/1 $\xrightarrow{\sigma^2 = 0}$ M/D/1

Promedio de vehículos en cola: $L_q = \frac{\lambda^2 \cdot \sigma^2 + \rho^2}{2 \cdot (1 - \rho)} = \frac{0,75^2}{2 \times (1 - 0,75)} = 1,125$ vehículos

Promedio de vehículos en sistema: $L_s = L_q + \rho = 1,125 + 0,75 = 1,875$ minutos

Tiempo promedio de espera en la cola: $W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{1,125}{0,15} = 7,5$ minutos

Tiempo promedio de estancia en lavacoches: $W_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{1,875}{0,15} = 12,5$ minutos



Queuing Analysis

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

LAVACOCHES

Data Description		ENTRY
Number of servers	1	
Service time distribution (in minuto)	General/Arbitrary	
Mean (μ)	5	
Standard deviation ($s > 0$)	0	
(Not used)		
Service pressure coefficient		
Interarrival time distribution (in minuto)	Exponential	
Location parameter (a)	0	
Scale parameter (b > 0) (b=mean if a=0)	6.6667	
(Not used)		
Arrival discourage coefficient		
Batch (bulk) size distribution	Constant	
Constant value	1	

Queuing Analysis

File Format Results Utilities Window Help

LAVACOCHES

System Performance Summary for LAVACOCHES

	Performance Measure	Result
1	System: M/G/1	From Formula
2	Customer arrival rate (λ) per minuto =	0,150
3	Service rate per server (μ) per minuto =	0,200
4	Overall system effective arrival rate per minuto =	0,150
5	Overall system effective service rate per minuto =	0,150
6	Overall system utilization =	75,000 %
7	Average number of customers in the system (L) =	1,875
8	Average number of customers in the queue (L_q) =	1,125
9	Average number of customers in the queue for a busy system (L_b) =	1,500
10	Average time customer spends in the system (W) =	12,500 minutos
11	Average time customer spends in the queue (W_q) =	7,500 minutos
12	Average time customer spends in the queue for a busy system (W_b) =	10,000 minutos
13	The probability that all servers are idle (P_0) =	25,000 %
14	The probability an arriving customer waits (P_w) or system is busy (P_b) =	75,000 %



b) En un modelo de cola M/D/1 (Exponencial / Constante / 1 servidor)

$$\lambda = \frac{9}{60} = 0,15 \text{ vehículos/minuto} \rightarrow \text{Tasa llegadas (Media)} = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0,15} = 6,666666$$

$$\text{Tasa de servicio} = \frac{1}{\mu} = 5 \rightarrow \mu = 0,2 \text{ pasajeros/minuto}$$

$$\text{Factor de utilización: } \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0,15}{0,20} = 0,75$$

$$\text{Promedio de empleados en la cola: } L_q = \frac{\rho^2}{2 \cdot (1 - \rho)} = \frac{0,75^2}{2 \cdot (1 - 0,75)} = 1,125 \text{ vehículos}$$

$$\text{Promedio de empleados en el sistema: } L_s = L_q + \rho = 1,125 + 0,75 = 1,875 \text{ vehículos}$$

$$\text{Tiempo promedio que un empleado espera en la cola: } W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{1,125}{0,15} = 7,50 \text{ minutos}$$

$$\text{Tiempo promedio que los empleados están en la cola: } W_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{1,875}{0,15} = 12,50 \text{ minutos}$$

Data Description	ENTRY
Number of servers	1
Service time distribution [in minuto]	Constant
Mean (μ)	$5 = 1 / \mu$
Standard deviation ($s > 0$)	
(Not used)	
Service pressure coefficient	
Interarrival time distribution [in minuto]	Exponential
Location parameter (a)	0
Scale parameter ($b > 0$) ($b = \text{mean if } a=0$)	$6,6666 = 1 / \lambda$
(Not used)	
Arrival discourage coefficient	
Batch (bulk) size distribution	Constant
Constant value	1
(Not used)	
(Not used)	
Queue capacity (maximum waiting space)	
Customer population	

Interarrival time distribution: Distribución del tiempo entre llegadas

Batch size distribution: Distribución del tamaño del lote



Queuing Analysis

File Format Results Utilities Window Help

0.00 A

System Performance Summary for LAVACOCHES

	Performance Measure	Result
1	System: M/D/1	From Formula
2	Customer arrival rate (λ) per minuto =	0,1500
3	Service rate per server (μ) per minuto =	0,2000
4	Overall system effective arrival rate per minuto =	0,1500
5	Overall system effective service rate per minuto =	0,1500
6	Overall system utilization =	75,0000 %
7	Average number of customers in the system (L) =	1,8750
8	Average number of customers in the queue (L_q) =	1,1250
9	Average number of customers in the queue for a busy system (L_b) =	1,5000
10	Average time customer spends in the system (W) =	12,5000 minutos
11	Average time customer spends in the queue (W_q) =	7,5000 minutos
12	Average time customer spends in the queue for a busy system (W_b) =	10,0000 minutos
13	The probability that all servers are idle (P_0) =	25,0000 %
14	The probability an arriving customer waits (P_w) or system is busy (P_b) =	75,0000 %

c) Medidas de eficiencia según un modelo $M/E_k/1$ (Exponencial / Erlang / 1 servidor)

$$\lambda = \frac{9}{60} = 0,15 \text{ vehículos/minuto} \rightarrow \text{Tasa llegadas (Media)} = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0,15} = 6,666666$$

$$\text{Tasa de servicio} = \frac{1}{\mu} = 5 \rightarrow \mu = 0,2 \text{ pasajeros/minuto}, \sigma = 2 \text{ minutos}$$

$$k = \frac{1}{\mu^2 \times \sigma^2} = \frac{1}{0,2^2 \times 2^2} = 6,25$$

Promedio de clientes en la cola:

$$L_q = \frac{\rho^2 \cdot (1+k)}{2 \cdot k \cdot (1-\rho)} = \frac{0,75^2 \times (1+6,25)}{2 \times 6,25 \times (1-0,75)} = 1,305 \text{ clientes}$$

Promedio de clientes en el sistema: $L_s = L_q + \rho = 1,305 + 0,75 = 2,055$ clientes

$$\text{Tiempo promedio en la cola: } W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{1,305}{0,15} = 8,7 \text{ minutos}$$

$$\text{Tiempo promedio en el sistema: } W_s = \frac{L_s}{\lambda} = W_q + \frac{1}{\mu} = 8,7 + 5 = 13,7 \text{ minutos}$$



- Cuando $\sigma = \frac{1}{\mu} \rightarrow k = \frac{1}{\mu^2 \times \sigma^2} = 1$, el modelo de cola M/E_k/1 es un modelo de cola M/M/1 con tiempo de servicio exponencial. En este caso:

Promedio de clientes en la cola: $L_q = \frac{\rho^2 \times (1+1)}{2 \times 1 \times (1-\rho)} = \frac{\rho^2}{(1-\rho)}$

Data Description		ENTRY
Number of servers	1	
Service time distribution (in minuto)	Erlang	
Location parameter (a)	2.5 = \sqrt{k}	
Scale parameter (b>0)	1	
Shape parameter (c>=1, integer)	4	
Service pressure coefficient		
Interarrival time distribution (in minuto)	Exponential	
Location parameter (a)	0	
Scale parameter (b>0) (b=mean if a=0)	6.6666 = 1 / λ	
(Not used)		
Arrival discourage coefficient		
Batch (bulk) size distribution	Constant	
Constant value	1	
(Not used)		
(Not used)		
Queue capacity (maximum waiting space)		
Customer population		

Interarrival time distribution: Distribución del tiempo entre llegadas

Batch size distribution: Distribución del tamaño del lote

	Performance Measure	Result
1	System: M/E(2,5)/1	From Formula
2	Customer arrival rate (lambda) per minuto =	0,150
3	Service rate per server (mu) per minuto =	0,200
4	Overall system effective arrival rate per minuto =	0,150
5	Overall system effective service rate per minuto =	0,150
6	Overall system utilization =	75,001 %
7	Average number of customers in the system (L) =	2,055
8	Average number of customers in the queue (Lq) =	1,305
9	Average number of customers in the queue for a busy system (Lb) =	1,740
10	Average time customer spends in the system (W) =	13,700 minutos
11	Average time customer spends in the queue (Wq) =	8,700 minutos
12	Average time customer spends in the queue for a busy system (Wb) =	11,600 minutos
13	The probability that all servers are idle (Po) =	24,999 %
14	The probability an arriving customer waits (Pw) or system is busy (Pb) =	75,001 %



La distribucion de Erlang $M/E_k/1$ pasa a ser un modelo $M/M/1$ introduciendo $c = \sqrt{k}$

Queuing Analysis

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

LAVACOCHES

ENTRY	
Number of servers	1
Service time distribution (in minuto)	Erlang
Location parameter (a)	2.5
Scale parameter ($b > 0$)	1
Shape parameter ($c >= 1$, integer)	2,5
Service pressure coefficient	
Interarrival time distribution (in minuto)	Exponential
Location parameter (a)	0
Scale parameter ($b > 0$) ($b = \text{mean if } a = 0$)	6.6667
(Not used)	
Arrival discourage coefficient	
Batch (bulk) size distribution	Constant
Constant value	1
(Not used)	
(Not used)	
Queue capacity (maximum waiting space)	
Customer population	
Busy server cost per minuto	
Idle server cost per minuto	
Customer waiting cost per minuto	
Customer being served cost per minuto	
Cost of customer being balked	
Unit queue capacity cost	

M/M/1

Queuing Analysis

File Format Results Utilities Window Help

System Performance Summary for LAVACOCHES

	Performance Measure	Result
1	System: $M/E(2,5)/1$	From Formula
2	Customer arrival rate (λ) per minuto =	0,150
3	Service rate per server (μ) per minuto =	0,200
4	Overall system effective arrival rate per minuto =	0,150
5	Overall system effective service rate per minuto =	0,150
6	Overall system utilization =	75,000 %
7	Average number of customers in the system (L) =	3,000
8	Average number of customers in the queue (L_q) =	2,250
9	Average number of customers in the queue for a busy system (L_b) =	3,000
10	Average time customer spends in the system (W) =	20,000 minutos
11	Average time customer spends in the queue (W_q) =	15,000 minutos
12	Average time customer spends in the queue for a busy system (W_b) =	20,000 minutos
13	The probability that all servers are idle (P_0) =	25,000 %
14	The probability an arriving customer waits (P_w) or system is busy (P_b) =	75,000 %

Factor de saturación: $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0,15}{0,2} = 0,75$



$$\text{Promedio de clientes en la cola: } L_q = \frac{\rho^2 \cdot (1+k)}{2 \cdot k \cdot (1-\rho)} = \frac{\rho^2 \times (1+1)}{2 \times 1 \times (1-\rho)} = \frac{\rho^2}{(1-\rho)} = \frac{0,75^2}{(1-0,75)} = 2,250$$

Promedio de clientes en el sistema: $L_s = L_q + \rho = 2,250 + 0,75 = 3$ clientes

$$\text{Tiempo promedio en la cola: } W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{2,250}{0,15} = 15 \text{ minutos}$$

$$\text{Tiempo promedio en el sistema: } W_s = \frac{L_s}{\lambda} = 15 + \frac{1}{0,2} = 15 + 5 = 20 \text{ minutos}$$

Se verifica introduciendo los datos en un modelo de Cola M/M/1:

$$\lambda = \frac{9}{60} = 0,15 \text{ vehículos/minuto}$$

$$\text{Tasa de servicio} = \frac{1}{\mu} = 5$$

$$\rightarrow \mu = 0,2 \text{ pasajeros/minuto}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0,15}{0,2} = 0,75$$

Queuing Analysis	
ENTRY	
Number of servers	1
Service rate (per server per minuto)	0.2
Customer arrival rate (per minuto)	0.15
Queue capacity (maximum waiting space)	
Customer population	
Busy server cost per minuto	
Idle server cost per minuto	
Customer waiting cost per minuto	
Customer being served cost per minuto	
Cost of customer being balked	
Unit queue capacity cost	

Queuing Analysis	
System Performance Summary for LAVACOCHES	
	Performance Measure
1	System: M/M/1
2	Customer arrival rate (lambda) per minuto =
3	Service rate per server (mu) per minuto =
4	Overall system effective arrival rate per minuto =
5	Overall system effective service rate per minuto =
6	Overall system utilization =
7	Average number of customers in the system (L) =
8	Average number of customers in the queue (Lq) =
9	Average number of customers in the queue for a busy system (Lb) =
10	Average time customer spends in the system (W) =
11	Average time customer spends in the queue (Wq) =
12	Average time customer spends in the queue for a busy system (Wb) =
13	The probability that all servers are idle (P0) =
14	The probability an arriving customer waits (Pw) or system is busy (Pb) =



d) Modelo de cola $G/G/2$ (General / General / 2 servidores)

$$\lambda = \frac{9}{60} = 0,15 \text{ vehículos/minuto} \rightarrow \text{Tasa llegadas (Media)} = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0,15} = 6,666666$$

Tasa de servicio: $\mu = \frac{1}{5} = 0,2 \text{ vehículos/minuto}$, $\sigma = 2 \text{ minutos}$

$$\text{Utilización del sistema: } u_s = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0,15}{0,2} = 0,75$$

$$\text{Factor de utilización del sistema: } \rho = \frac{\lambda}{2 \cdot \mu} = \frac{0,15}{2 \cdot 0,2} = 0,375$$

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^1 \frac{1}{n!} 0,75^n + \frac{1}{2!} 0,75^2 \left(\frac{1}{1-0,375} \right)} = 0,4545$$

Queuing Analysis		
	Estimated Probability of n Customers in the System	Cumulative Probability
0	0,4545	0,4545
1	0,3409	0,7955
2	0,1278	0,9233
3	0,0479	0,9712
4	0,0180	0,9892
5	0,0067	0,9960
6	0,0025	0,9985
7	0,0009	0,9994
8	0,0004	0,9998
9	0,0001	0,9999
10	0,0000	1,0000

$$p_1 = \frac{1}{1!} 0,75 \times 0,4545 = 0,3409$$

$$p_2 = \frac{1}{2!} 0,75^2 \times 0,4545 = 0,1278$$

$$p_3 = \frac{1}{2! 2^{3-2}} \times 0,75^3 \times 0,4545 = 0,0479$$

⋮

$$p_9 = \frac{1}{2! 2^{9-2}} \times 0,75^9 \times 0,4545 = 0,0001$$

$$\text{Tiempo promedio de espera en la cola: } W_q = \frac{p_{|M/M/s}(n \geq s) \cdot (\lambda^2 \cdot \sigma_\lambda^2 + \mu^2 \cdot \sigma_\mu^2)}{2 \cdot s \cdot \mu \cdot (1 - \rho)}$$

$$p_{|M/M/s}(n \geq s) = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s}{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \frac{1}{s! (1-\rho)} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s}$$

$$p_{|M/M/s}(n \geq 2) = \frac{0,75^2}{\sum_{n=0}^1 \frac{1}{n!} 0,75^n + \frac{1}{2! (1-0,375)} 0,75^2} = \frac{0,45}{2,2} = 0,2045$$



$$W_q = \frac{0,2045 \times (0,15^2 \cdot 6,6667^2 + 0,2^2 \cdot 2^2)}{2 \times 2 \times 0,2 \times (1 - 0,375)} = \frac{0,2372}{0,5} = 0,4745 \text{ minutos}$$

Tiempo promedio de estancia en el sistema: $W_s = W_q + \frac{1}{\mu} = 0,4745 + 5 = 5,4745 \text{ minutos}$

Número promedio vehículos en la cola: $L_q = \lambda W_q = 0,15 \times 0,4745 = 0,0712 \text{ vehículos}$

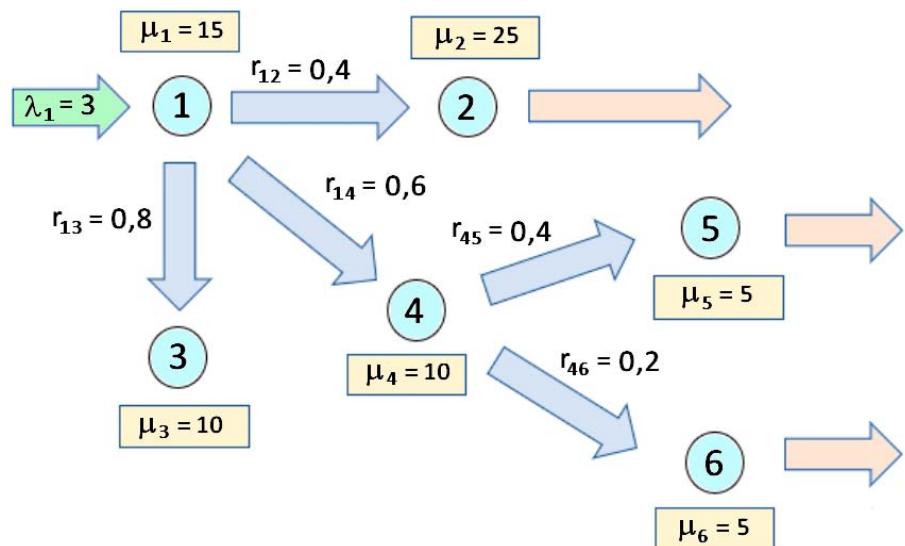
Número promedio de vehículos en sistema: $L_s = L_q + \left(\frac{\lambda}{\mu} \right) = 0,0712 + 0,75 = 0,8212 \text{ vehículos}$

Queuing Analysis	
LAVACOCHES	
Data Description	ENTRY
Number of servers	2
Service time distribution (in minuto)	General/Arbitrary
Mean (u)	5
Standard deviation (s>0)	2
(Not used)	
Service pressure coefficient	
Interarrival time distribution (in minuto)	General/Arbitrary
Mean (u)	6.6667
Standard deviation (s>0)	6.6667
(Not used)	
Arrival discourage coefficient	
Batch (bulk) size distribution	Constant
Constant value	1
(Not used)	
(Not used)	
Queue capacity (maximum waiting space)	
Customer population	
Busy server cost per minuto	
Idle server cost per minuto	
Customer waiting cost per minuto	
Customer being served cost per minuto	
Cost of customer being balked	
Unit queue capacity cost	

Queuing Analysis		
System Performance Summary for LAVACOCHES		
	Performance Measure	Result
1	System: G/G/2	From Approximation
2	Customer arrival rate (lambda) per minuto =	0,1500
3	Service rate per server (mu) per minuto =	0,2000
4	Overall system effective arrival rate per minuto =	0,1500
5	Overall system effective service rate per minuto =	0,1500
6	Overall system utilization =	37,4998 %
7	Average number of customers in the system (L) =	0,8212
8	Average number of customers in the queue (Lq) =	0,0712
9	Average number of customers in the queue for a busy system (Lb) =	0,3480
10	Average time customer spends in the system (W) =	5,4745 minutos
11	Average time customer spends in the queue (Wq) =	0,4745 minutos
12	Average time customer spends in the queue for a busy system (Wb) =	2,3200 minutos
13	The probability that all servers are idle (P0) =	45,4547 %
14	The probability an arriving customer waits (Pw) or system is busy (Pb) =	20,4544 %



En la red abierta de Jackson del esquema, se pide:



- Tasas de llegada.
- Condición de saturación y medidas de rendimiento.
- Tiempos promedios.
- Con un tiempo de servicio exponencial $\mu_3 = 2$, calcula el número mínimo de procesadores en el nodo 3 para que la red presente un estado estacionario. En este caso, ¿cuál sería el tiempo medio de permanencia de un trabajo en la red?

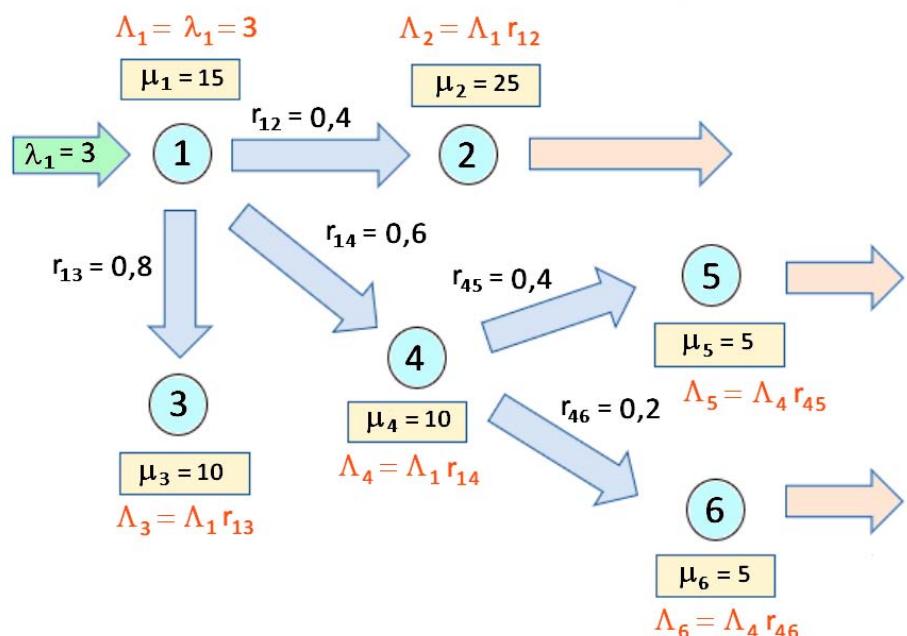
Solución:

- Es una red de Jackson abierta, como no tiene ciclos, se anotan intuitivamente las ecuaciones de equilibrio. En cada nodo, el flujo de entrada debe ser igual al flujo de salida.

Las ecuaciones de tráfico o equilibrio son intuitivas: $\Lambda_i = \lambda_i + \sum_{j=1}^k \Lambda_j r_{ji}$

$$\begin{cases} \Lambda_1 = \lambda_1 = 3 \\ \Lambda_2 = \Lambda_1 r_{12} = 3 \cdot 0,4 = 1,2 \\ \Lambda_3 = \Lambda_1 r_{13} = 3 \cdot 0,8 = 2,4 \\ \Lambda_4 = \Lambda_1 r_{14} = 3 \cdot 0,6 = 1,8 \\ \Lambda_5 = \Lambda_4 r_{45} = 1,8 \cdot 0,4 = 0,72 \\ \Lambda_6 = \Lambda_4 r_{46} = 1,8 \cdot 0,2 = 0,36 \end{cases}$$

$$\Lambda_{\text{red}} = \sum_{i=1}^6 \Lambda_i = 9,48$$





En forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \\ \Lambda_3 \\ \Lambda_4 \\ \Lambda_5 \\ \Lambda_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} & r_{41} & r_{51} & r_{61} \\ r_{12} & r_{22} & r_{32} & r_{42} & r_{52} & r_{62} \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} & r_{43} & r_{53} & r_{63} \\ r_{14} & r_{24} & r_{34} & r_{44} & r_{54} & r_{64} \\ r_{15} & r_{25} & r_{35} & r_{45} & r_{55} & r_{65} \\ r_{16} & r_{26} & r_{36} & r_{46} & r_{56} & r_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \\ \Lambda_3 \\ \Lambda_4 \\ \Lambda_5 \\ \Lambda_6 \end{pmatrix}$$

b) Factor de saturación nodo i:

$$\rho_i = \frac{\Lambda_i}{s_i \mu_i} \quad \begin{cases} \lambda_i \equiv \text{Tasa de llegadas de procesos al nodo } i \\ \Lambda_i \equiv \text{Tasa de procesos que salen del nodo } i \text{ (Tasas totales llegadas)} \end{cases} \quad s_i = 1 \quad \forall i$$

Para que la red no se sature en cada nodo i se debe verificar que $\rho_i < 1$

$$\rho_1 = \frac{\Lambda_1}{s_1 \mu_1} = \frac{3}{15} = 0,2 \quad \rho_2 = \frac{\Lambda_2}{s_2 \mu_2} = \frac{1,2}{25} = 0,048 \quad \rho_3 = \frac{\Lambda_3}{s_3 \mu_3} = \frac{2,4}{10} = 0,24$$

$$\rho_4 = \frac{\Lambda_4}{s_4 \mu_4} = \frac{1,8}{10} = 0,18 \quad \rho_5 = \frac{\Lambda_5}{s_5 \mu_5} = \frac{0,72}{5} = 0,144 \quad \rho_6 = \frac{\Lambda_6}{s_6 \mu_6} = \frac{0,36}{5} = 0,072$$

Hay una red estacionaria al no saturarse en ningún nodo.

c) Las medidas de rendimiento de cada nodo corresponden a las ecuaciones de un modelo M/M/1

Número medio de trabajos en el sistema (nodo i): $L_{si} = \frac{\rho_i}{1-\rho_i} = \frac{\Lambda_i}{\mu_i - \Lambda_i}$

$$L_{s1} = \frac{\rho_1}{1-\rho_1} = \frac{0,2}{1-0,2} = 0,25 \quad L_{s2} = \frac{\rho_2}{1-\rho_2} = \frac{0,048}{1-0,048} = 0,05 \quad L_{s3} = \frac{\rho_3}{1-\rho_3} = \frac{0,24}{1-0,24} = 0,316$$

$$L_{s4} = \frac{\rho_4}{1-\rho_4} = \frac{0,18}{1-0,18} = 0,219 \quad L_{s5} = \frac{\rho_5}{1-\rho_5} = \frac{0,144}{1-0,1448} = 0,168 \quad L_{s6} = \frac{\rho_6}{1-\rho_6} = \frac{0,072}{1-0,072} = 0,077$$

Número medio de trabajos en la red: $L_{red} = \sum_{i=1}^6 L_{si} = 1,08$

El tiempo medio que un trabajo pasa en el sistema (desde que entra en la red hasta que sale de ella) viene dada por la expresión: $W_{red} = \frac{L_{red}}{\Lambda_{red}} = \frac{1,08}{9,48} = 0,114$ unidades tiempo

Tiempo medio que un trabajo pasa en cada subsistema (nodo): $W_{si} = \frac{L_{si}}{\Lambda_i} = \frac{1}{\mu_i - \Lambda_i}$

$$W_{s1} = \frac{L_{s1}}{\Lambda_1} = \frac{0,25}{3} = 0,083 \quad W_{s2} = \frac{L_{s2}}{\Lambda_2} = \frac{0,05}{1,2} = 0,042 \quad W_{s3} = \frac{L_{s3}}{\Lambda_3} = \frac{0,316}{2,4} = 0,1316$$

$$W_{s4} = \frac{L_{s4}}{\Lambda_4} = \frac{0,219}{1,8} = 0,122 \quad W_{s5} = \frac{L_{s5}}{\Lambda_5} = \frac{0,168}{0,72} = 0,234 \quad W_{s6} = \frac{L_{s6}}{\Lambda_6} = \frac{0,077}{0,36} = 0,215$$



Tiempo medio de espera en la cola de nodo i: $W_{si} = W_{qi} + \frac{1}{\mu_i} \rightarrow W_{qi} = W_{si} - \frac{1}{\mu_i}$

$$W_{q1} = W_{s1} - \frac{1}{\mu_1} = 0,083 - \frac{1}{15} = 0,016 \quad W_{q2} = W_{s2} - \frac{1}{\mu_2} = 0,042 - \frac{1}{25} = 0,002$$

$$W_{q3} = W_{s3} - \frac{1}{\mu_3} = 0,1316 - \frac{1}{10} = 0,0316 \quad W_{q4} = W_{s4} - \frac{1}{\mu_4} = 0,122 - \frac{1}{10} = 0,022$$

$$W_{q5} = W_{s5} - \frac{1}{\mu_5} = 0,234 - \frac{1}{5} = 0,034 \quad W_{q6} = W_{s6} - \frac{1}{\mu_6} = 0,215 - \frac{1}{5} = 0,016$$

Número medio de clientes que visitan un nodo: $V_i = \frac{\Lambda_i}{\Lambda_{red}} \quad \forall i = 1, 2, \dots, 6$

$$V_1 = \frac{\Lambda_1}{\Lambda_{red}} = \frac{3}{9,48} = 0,3165 \quad V_2 = \frac{\Lambda_2}{\Lambda_{red}} = \frac{1,2}{9,48} = 0,1265 \quad V_3 = \frac{\Lambda_3}{\Lambda_{red}} = \frac{2,4}{9,48} = 0,2531$$

$$V_4 = \frac{\Lambda_4}{\Lambda_{red}} = \frac{1,8}{9,48} = 0,1898 \quad V_5 = \frac{\Lambda_5}{\Lambda_{red}} = \frac{0,72}{9,48} = 0,0759 \quad V_6 = \frac{\Lambda_6}{\Lambda_{red}} = \frac{0,36}{9,48} = 0,038$$

d) Número mínimo de procesadores (servidores) para que el nodo 3 no se sature con $\mu_3 = 2$

$$\rho_3 = \frac{\Lambda_3}{s_3 \cdot \mu_3} = \frac{2,4}{s_3 \cdot 2} < 1 \rightarrow s_3 = 2 \text{ servidores} \quad \rho_3 = \frac{2,4}{2 \cdot 2} = 0,6$$

Las medidas de rendimiento del nodo 3 corresponden a un modelo M / M / 2

La probabilidad de que ningún trabajo se encuentre en el sistema de cola del nodo 3:

$$\begin{aligned} p_{03} &= \frac{1}{\sum_{n=0}^{s_3-1} \frac{(\Lambda_3 / \mu_3)^n}{n!} + \frac{1}{s_3!} \left(\frac{\Lambda_3}{\mu_3} \right)^{s_3} \left(\frac{1}{1-\rho_3} \right)} = \\ &= \frac{1}{\sum_{n=0}^{2-1} \frac{(2,4 / 2)^n}{n!} + \frac{1}{2!} \left(\frac{2,4}{2} \right)^2 \left(\frac{1}{1-0,6} \right)} = \frac{1}{\sum_{n=0}^1 \frac{(1,2)^n}{n!} + 1,8} = \frac{1}{1+1,2+1,8} = 0,25 \end{aligned}$$

Número medio de trabajos en la cola del nodo (subsistema) 3:

$$L_{q3} = \frac{1}{s_3!} \left(\frac{\Lambda_3}{\mu_3} \right)^{s_3} \frac{\rho_3}{(1-\rho_3)^2} p_{03} = \frac{1}{2!} \times \left(\frac{2,4}{2} \right)^2 \times \frac{0,6}{(1-0,6)^2} \times 0,25 = 0,675$$

Número medio de trabajos en el sistema del nodo 3:

$$L_{s3} = L_{q3} + \frac{\Lambda_3}{\mu_3} = 0,675 + \frac{2,4}{2} = 1,875$$



Número medio de trabajos en la red: $L_{red} = \sum_{i=1}^6 L_{si} = 2,639$

Tiempo medio de espera en la red: $W_{red} = \frac{L_{red}}{\Lambda_{red}} = \frac{2,639}{9,48} = 0,2784$ unidades tiempo



COLAS M/M/S - SIMULACIÓN TEMPORAL



Un almacén tiene 2 cajeras que atienden a razón de 1,5 minutos por cliente siguiendo una distribución exponencial. Los clientes llegan al almacén siguiendo una distribución de Poisson a razón de 30 por hora. Se pide:

- Medidas de rendimiento
- Probabilidad de que el sistema esté lleno.
- Simular el sistema durante 1 día.
- Análisis de sensibilidad de la tasa de llegadas variando de 30 a 100. Gráfico de sensibilidad.
- Análisis de capacidad, siendo los costos en euros por hora: 5 euros servidor ocupado, 1 euro servidor ocioso, 0,5 euros cliente en espera, 3 euros cliente servido, 1 euro cliente no atendido y 3 euros coste unitario por capacidad de cola.
- Simular el Sistema de Colas (Queuing System Simulación) durante 100 días (2400 horas).

Solución:

- a) Es un modelo de cola M/M/2 con s = 2 servidores

Tasa de llegadas $\lambda = 30$ clientes/hora

$$\text{Tasa de servicio por cajera: } \mu = \frac{60}{1,5} = 40 \text{ clientes/hora}$$

$$\text{Utilización promedio del sistema: } u_s = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{30}{40} = 0,75$$

$$\text{Factor de utilización o congestión del sistema: } \rho = \frac{\lambda}{s \cdot \mu} = \frac{30}{2 \cdot 40} = 0,375$$

Probabilidad de que ningún cliente se encuentre en el sistema de colas:

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\lambda / \mu)^n}{n!} + \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^s \frac{1}{1-\rho}} = \frac{1}{\sum_{n=0}^1 \frac{0,75^n}{n!} + \frac{1}{2} \times 0,75^2 \times \left(\frac{1}{1-0,375} \right)} = \\ = \frac{1}{1 + 0,75 + 0,45} = 0,454545$$

Promedio de clientes en la cola:

$$L_q = \frac{(\lambda / \mu)^s \lambda \mu}{(s-1)! (s \cdot \mu - \lambda)^2} p_0 = \frac{0,75^2 \times 30 \times 40}{(2 \times 40 - 30)^2} \times 0,454545 = 0,1227 \text{ clientes}$$

Promedio de clientes en el sistema: $L_s = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = 0,1227 + 0,75 = 0,8727$ clientes

Tiempo medio de espera en cola: $W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{0,1227}{30} = 0,0041$ horas



Tiempo medio de estancia en el sistema: $W_s = W_q + \frac{1}{\mu} = 0,0041 + \frac{1}{40} = 0,0291$ horas

Porcentaje de tiempo que determinado cajera esté libre: $p_n = \begin{cases} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!} p_0 & n \leq s \\ \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \frac{1}{s! s^{(n-s)}} p_0 & n > s \end{cases}$

$n = 0: p_0 = 0,4545$

$n = 1: p_1 = \frac{(30 / 40)}{1} p_0 = 0,75 \times 0,4545 = 0,3409$

$n = 2: p_2 = \frac{(30 / 40)^2}{2!} p_0 = \frac{0,75^2}{2} \times 0,4545 = 0,1278$

$n = 3: p_3 = \frac{(30 / 40)^3}{2! \times 2} p_0 = \frac{0,75^3}{4} \times 0,4545 = 0,0479$

$n = 4: p_4 = \frac{(30 / 40)^4}{2! \times 2^2} p_0 = \frac{0,75^4}{8} \times 0,4545 = 0,0180$

Cajeras	
Data Description	ENTRY
Number of servers	2
Service rate (per server per hora)	40
Customer arrival rate (per hora)	30
Queue capacity (maximum waiting space)	M
Customer population	M
Busy server cost per hora	
Idle server cost per hora	
Customer waiting cost per hora	
Customer being served cost per hora	
Cost of customer being balked	
Unit queue capacity cost	

Number of servers (Número de servidores): $s =$

Service rate (Tasa de servicio): $\mu =$

Customer arrival rate (Tasa de llegada de clientes): $\lambda =$

Queue capacity (Capacidad de la cola: Por defecto aparece M indicando que es infinita. Cuando la cola es finita se pone el tamaño máximo de la cola menos el número de servidores ($k - s$))

Customer population (Tamaño de la población de clientes): Aparece por defecto M, indicando que es infinita. En caso de fuente limitada se pone el tamaño de la población.



Queuing Analysis

File Format Results Utilities Window Help

Performance Summary
Probability Summary
Show Sensitivity Analysis - Table
Show Sensitivity Analysis - Graph
Show Capacity Analysis

Performance Measure		Result
1	System: M/M/2	From Formula
2	Customer arrival rate (λ) per hora =	30,0000
3	Service rate per server (μ) per hora =	40,0000
4	Overall system effective arrival rate per hora =	30,0000
5	Overall system effective service rate per hora =	30,0000
6	Overall system utilization =	37,5000 %
7	Average number of customers in the system (L_s) =	0,8727
8	Average number of customers in the queue (L_q) =	0,1227
9	Average number of customers in the queue for a busy system (L_b) =	0,6000
10	Average time customer spends in the system (W_s) =	0,0291 horas
11	Average time customer spends in the queue (W_q) =	0,0041 horas
12	Average time customer spends in the queue for a busy system (W_b) =	0,0200 horas
13	The probability that all servers are idle (P_0) =	45,4545 %
14	The probability an arriving customer waits (P_w) or system is busy (P_b) =	20,4545 %

7. Número medio de clientes en el sistema: $L_s = 0,8727$ clientes
8. Número medio de clientes en la cola: $L_q = 0,1227$ clientes
9. Número medio de clientes en la cola cuando el sistema esté lleno: $L_b = 0,6$ clientes
10. Tiempo medio de estancia de un cliente en el sistema: $W_s = 0,2909$ horas
11. Tiempo medio de estancia de un cliente en la cola: $W_q = 0,0409$ horas
12. Tiempo medio de estancia de clientes en la cola cuando el sistema está lleno: $W_b = 0,2000$ hora
13. Probabilidad de que no haya clientes en el sistema o probabilidad de que todos los servidores estén ociosos: $p_0 = 45,4545\%$
14. Probabilidad de que un cliente llegue al sistema y tenga que esperar, equivalente a la probabilidad de que esté ocupado el sistema: $p_w = 20,4545\%$

Queuing Analysis

File Format Results Utilities Window Help

0.00 A

System Probability Summary for Cajeras

n	Estimated Probability of n Customers in the System	Cumulative Probability
0	0.4545	0.4545
1	0.3409	0.7955
2	0.1278	0.9233
3	0.0479	0.9712
4	0.0180	0.9892
5	0.0067	0.9960
6	0.0025	0.9985
7	0.0009	0.9994
8	0.0004	0.9998
9	0.0001	0.9999
10	0.0000	1.0000



b) Número promedio de clientes en sistema: $L_s = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot p_n = \sum_{n=1}^9 n \cdot p_n = 0,8727$

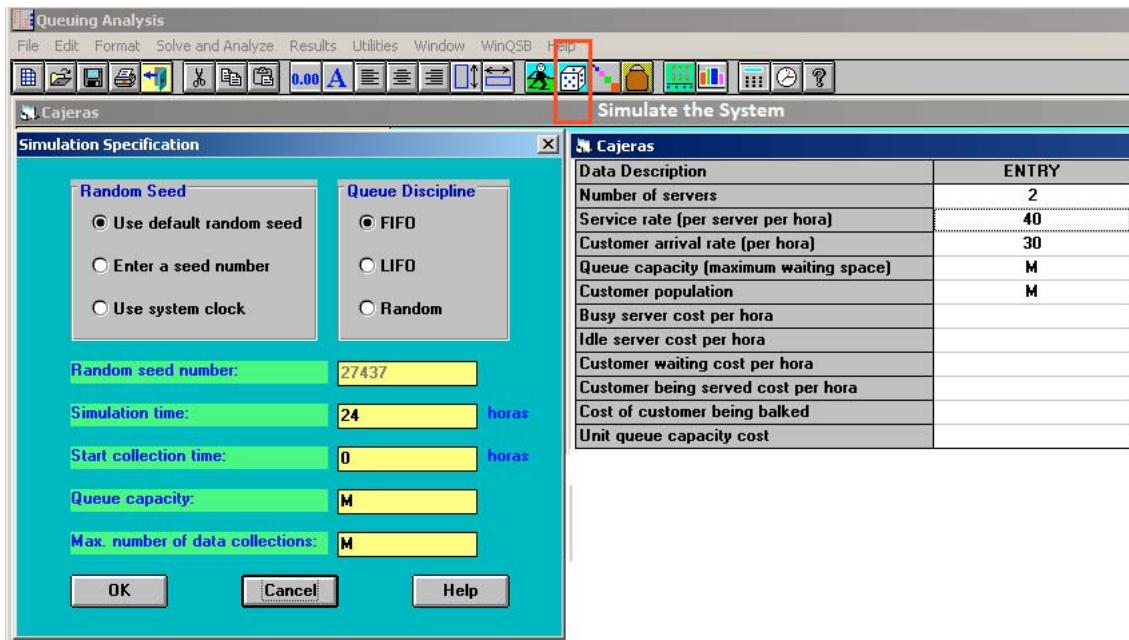
Número promedio de clientes en cola: $L_q = \sum_{n=s+1}^{\infty} (n-s) \cdot p_n = \sum_{n=3}^9 (n-s) \cdot p_n = 0,1227$

Número promedio de clientes en la cola para un sistema ocupado: $L_b = \frac{L_q}{p_w}$ $p_w = \sum_{n \geq s} p_n$

$$p_w = \sum_{n \geq 2} p_n = 1 - 0,7955 = 0,2045 \longrightarrow L_b = \frac{L_q}{p_w} = \frac{0,1227}{0,2045} = 0,6$$

Tiempo promedio de clientes en la cola para un sistema ocupado: $W_b = \frac{W_q}{p_w} = \frac{0,0041}{0,2045} = 0,0200$

c) MÉTODO DE SIMULACIÓN DE MONTECARLO: Evalúa la actuación del sistema durante un tiempo. Simula del sistema durante un tiempo determinado con distribuciones definidas, planteando distintas formas:



Random seed (semilla del azar): Se puede elegir el valor por defecto o reloj del sistema, o introducir un valor para semilla del azar. Cada vez que se ejecuta la simulación, si se utiliza la semilla del azar, genera la misma sucesión de números aleatorios. En consecuencia, eligiendo el reloj del sistema como la semilla del azar garantiza una sucesión del azar diferente.

Queue Discipline (Disciplina de cola): Se puede escoger FIFO, LIFO o Random (el azar). Disciplina de cola es la regla para poder elegir al cliente en espera a ser atendido cuando un servidor se encuentra disponible. Si el sistema tiene una solución de la forma aproximada, el resultado debe estar muy cerca del de la simulación utilizando la disciplina FIFO.

Simulation time (Tiempo de simulación): Indica el tiempo que funciona el sistema de colas.



Start collection time (Iniciar tiempo de colección): Indica cuando el programa comienza a recoger datos sobre la actuación de la cola. Un tiempo de inicio distinto de cero para recoger datos puede filtrar la iniciación del "estado" del sistema.

Queue capacity (Capacidad de la Cola): Permite al sistema mantener a los clientes en espera. El valor por defecto es 1000 que es normalmente suficiente para la mayoría de las situaciones. No conviene introducir una capacidad de cola grande porque puede utilizar toda la memoria de la computadora.

Maximum number of data collections (Número máximo de recogida de datos): Regla de detención para que el programa detenga el proceso de simulación. Junto con el tiempo de simulación, el programa detiene la simulación cuando cualquiera de los dos se alcanza.

Queuing Analysis		
	Performance Measure	Result
1	System: M/M/2	From Simulation
2	Customer arrival rate (lambda) per hora =	30.0000
3	Service rate per server (mu) per hora =	40.0000
4	Overall system effective arrival rate per hora =	27.3295
5	Overall system effective service rate per hora =	27.3295
6	Overall system utilization =	34.2151 %
7	Average number of customers in the system (L) =	0.7565
8	Average number of customers in the queue (Lq) =	0.0722
9	Average number of customers in the queue for a busy system (Lb) =	0.4174
10	Average time customer spends in the system (W) =	0.0277 horas
11	Average time customer spends in the queue (Wq) =	0.0026 horas
12	Average time customer spends in the queue for a busy system (Wb) =	0.0153 horas
13	The probability that all servers are idle (Po) =	48.8648 %
14	The probability an arriving customer waits (Pw) or system is busy (Pb) =	17.2951 %
15	Average number of customers being balked per hora =	0
16	Total cost of busy server per hora =	\$0
17	Total cost of idle server per hora =	\$0
18	Total cost of customer waiting per hora =	\$0
19	Total cost of customer being served per hora =	\$0
20	Total cost of customer being balked per hora =	\$0
21	Total queue space cost per hora =	\$0
22	Total system cost per hora =	\$0
23	Simulation time in hora =	24.0000
24	Starting data collection time in hora =	0
25	Number of observations collected =	656
26	Maximum number of customers in the queue =	4
27	Total simulation CPU time in second =	0.0520

Queuing Analysis		
	Estimated Probability of n Customers in the System	Cumulative Probability
0	0.4886	0.4886
1	0.3384	0.8270
2	0.1201	0.9472
3	0.0366	0.9838
4	0.0132	0.9970
5	0.0028	0.9998
6	0.0002	1.0000



d) Análisis de sensibilidad para el parámetro $\lambda = 30$, variando de 30 a 100 clientes/hora, y un incremento de 10 clientes/hora. Gráfico de sensibilidad.

Con el Modelo de aproximación G/G/s se observa cómo reacciona el sistema.

Sensitivity Analysis of Arrival rate (lambda) for Cajeras											
Value	Effective Arrival Rate	System Utilization	L	Lq	Lb	W	Wq	Wb	P0	Pw	
30	30.0000	0.3750	0.8727	0.1227	0.6000	0.0291	0.0041	0.0200	0.4545	0.2045	
40	40.0000	0.5000	1.3333	0.3333	1.0000	0.0333	0.0083	0.0250	0.3333	0.3333	
50	50.0000	0.6250	2.0513	0.8013	1.6667	0.0410	0.0160	0.0333	0.2308	0.4808	
60	60.0000	0.7500	3.4286	1.9286	3.0000	0.0571	0.0321	0.0500	0.1429	0.6429	
70	70.0000	0.8750	7.4667	5.7167	7.0000	0.1067	0.0817	0.1000	0.0667	0.8167	
80	Unstable	System!									
90	Unstable	System!									
100	Unstable	System!									

La utilización del sistema se va incrementando, de forma que cuando la llegada de clientes es de 70 a la hora la utilización del sistema es del 87,5% (máxima posible), a partir de entonces el sistema se vuelve inestable, es decir, el número de servidores es insuficiente.

GRÁFICO ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD: Se representa el gráfico $L_s \equiv$ número promedio de clientes en el sistema, en función del parámetro λ .

Dependiendo de las necesidades se pueden ir analizando cada uno de los parámetros.



Queuing Analysis

File Format Results Utilities Window Help

Sensitivity

Performance Summary
Probability Summary
Show Sensitivity Analysis - Table
Show Sensitivity Analysis - Graph
Show Capacity Analysis

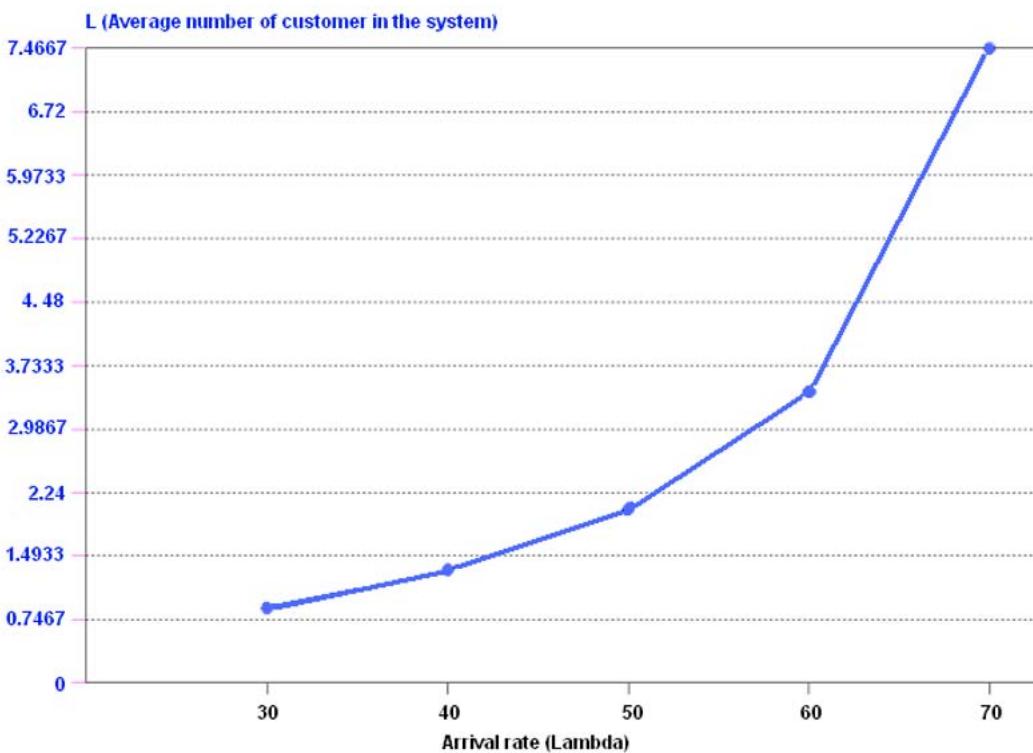
Value	Effective Arrival Rate	System Utilization	L
30	30,0000	0,3750	0,8727 0
40	40,0000	0,5000	1,3333 0
50	50,0000	0,6250	2,0513 0
60	60,0000	0,7500	3,4286 1
70	70,0000	0,8750	7,4667 5
80	Unstable	System!	
90	Unstable	System!	
100	Unstable	System!	

Performance for Graphic Sensitivity Analysis

Select a performance measure for graphic analysis

L (Average number of customers in the system)

OK Cancel Help



Se observa un crecimiento exponencial.

Sucesivamente se pueden analizar cada uno de los parámetros dependiendo de las necesidades del estudio.



e) Análisis de capacidad: Coste servidor ocupado/hora = 5 euros, Coste servidor ocioso/hora = 1 euro, Coste cliente en espera/hora = 0,5 euros, Coste cliente servido/hora = 3 euros, Coste cliente no atendido/hora = 1 euro, Coste unitario capacidad de cola = 3 euros.

Data Description	ENTRY
Number of servers	2
Service rate (per server per hora)	40
Customer arrival rate (per hora)	30
Queue capacity (maximum waiting space)	M
Customer population	M
Busy server cost per hora	5
Idle server cost per hora	1
Customer waiting cost per hora	0.5
Customer being served cost per hora	3
Cost of customer being balked	1
Unit queue capacity cost	3

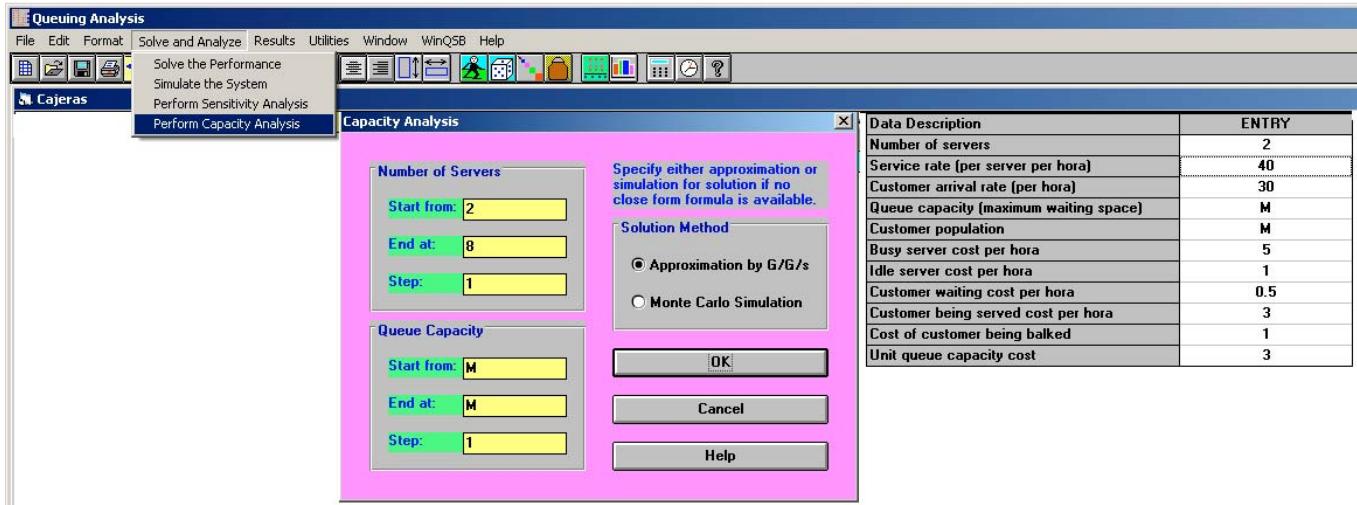
Coste servidor ocupado: $c_s \cdot (L_s - L_q)$

Coste del servidor desocupado: $c_o \cdot (s - L_s + L_q)$

Coste de espera de los clientes: $c_q \cdot L_q$

Coste de los clientes siendo servidos: $c_{cs} \cdot (L_s - L_q)$

Coste Total Sistema: Suma de coste



Se marca una variación de 2 a 8 servidores, con un paso de 1, en que la capacidad de la cola es infinita.



Performance Measure		Result
1	System: M/M/2	From Formula
2	Customer arrival rate (λ) per hora =	30,0000
3	Service rate per server (μ) per hora =	40,0000
4	Overall system effective arrival rate per hora =	30,0000
5	Overall system effective service rate per hora =	30,0000
6	Overall system utilization =	37,5000 %
7	Average number of customers in the system (L_s) =	0,8727
8	Average number of customers in the queue (L_q) =	0,1227
9	Average number of customers in the queue for a busy system (L_b) =	0,6000
10	Average time customer spends in the system (W_s) =	0,0291 horas
11	Average time customer spends in the queue (W_q) =	0,0041 horas
12	Average time customer spends in the queue for a busy system (W_b) =	0,0200 horas
13	The probability that all servers are idle (P_o) =	45,4545 %
14	The probability an arriving customer waits (P_w) or system is busy (P_b) =	20,4545 %
15	Average number of customers being balked per hora =	0
16	Total cost of busy server per hora =	\$3,7500
17	Total cost of idle server per hora =	\$1,2500
18	Total cost of customer waiting per hora =	\$0,0614
19	Total cost of customer being served per hora =	\$2,2500
20	Total cost of customer being balked per hora =	\$0
21	Total queue space cost per hora =	\$0
22	Total system cost per hora =	\$7,3114

Coste servidor ocupado: $c_s \cdot (L_s - L_q) = 5 \cdot (0,8727 - 0,1227) = 3,7500$ euros/hora

Coste del servidor desocupado $c_o \cdot (s - L_s + L_q) = 1 \cdot (2 - 0,8727 + 0,1227) = 1,2500$ euros/hora

Coste de espera de los clientes $c_q \cdot L_q = 0,5 \cdot 0,1227 = 0,0614$ euros/hora

Coste de los clientes siendo servidos: $c_{cs} \cdot (L_s - L_q) = 3 \cdot (0,8727 - 0,1227) = 2,25$ euros/hora

Coste Total Sistema: $3,7500 + 1,2500 + 0,0614 + 2,2500 = 7,3114$ euros / hora

Capacity Analysis for Cajas							
	Number of Server	Queue Capacity	Total Cost	Busy Server Cost	Idle Server Cost	Waiting Customer Cost	Served Customer Cost
1	2	M	\$7.3114	3.7500	1.2500	0.0614	2.2500
2	3	M	\$8.2574	3.7500	2.2500	0.0074	2.2500
3	4	M	\$9.2509	3.7500	3.2500	0.0009	2.2500
4	5	M	\$10.2501	3.7500	4.2500	0.0001	2.2500
5	6	M	\$11.2500	3.7500	5.2500	0.0000	2.2500
6	7	M	\$12.2500	3.7500	6.2500	0.0000	2.2500
7	8	M	\$13.2500	3.7500	7.2500	0.0000	2.2500

El coste total promedio óptimo de 7,3114 euros se obtiene con 2 servidores. A medida que se incrementa el número de servidores los costos van subiendo, de forma que cuando hay 4 servidores el coste total es de 9,2509 euros.



f) Simular el Sistema de Colas (Queuing System Simulation)

Problem Specification

To define a queuing system, four system components are considered: customer arriving populations such as different type of materials or different age groups, servers such as machines or clerks, queues for buffer storages or waiting lines, or garbage collectors for defectives.

Problem Title:	CAJERAS
Number of System Components:	4
Time Unit:	hora

Data Entry Format

- Spreadsheet
- Graphic Model

OK Cancel Help

Component Names and Types for CAJERAS

Number	Component Name	Type (C/S/Q/G)
1	Cajera1	S
2	Cajera2	S
3	Cliente	C
4	Cola	Q

OK Cancel Help

Queuing System Simulation

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

CAJERAS

Component Name	Type (C/S/Q/G)	Immediate Follower (Name / Prob / TransferTime, separated by ',')	Input Rule	Output Rule	Queue Discipline	Queue Capacity	Attribute Value	Interarrival Time Distribution	Batch Size Distribution	Service Time Distribution
Cajera1	S									Exp//40
Cajera2	S									Exp//40
Cliente	C	Cola						Poisson/30		
Cola	Q	Cajera1, Cajera2			FIFO					

Queuing System Simulation

Based on the specified random seed, simulation time, and/or maximum number of observations, the program simulates the queuing system according to the data entry specification. Press "Simulate" to start the simulation, and press "Cancel" to quit the simulation. Press "Show Analysis" for the result.

Random Seed

- Use default random seed
- Enter a seed number
- Use system clock

Random number seed: 27437

Simulation time in hora: 2400

Data collection start time at hora:

Maximum number of data collections [observations]: M

% of simulation done:

Current time: 2409.7310 horas

Number of observations collected: 75

Simulate Show Analysis Cancel Help

Customer Analysis for CAJERAS

File Format Results Utilities Window Help

	Result	Cliente
1	Total Number of Arrival	80
2	Total Number of Balking	4
3	Average Number in the System (L)	1.3308
4	Maximum Number in the System	3
5	Current Number in the System	1
6	Number Finished	75
7	Average Process Time	39.4605
8	Std. Dev. of Process Time	38.8043
9	Average Waiting Time (Wq)	2.9695
10	Std. Dev. of Waiting Time	13.2949
11	Average Transfer Time	0
12	Std. Dev. of Transfer Time	0
13	Average Flow Time (W)	42.4299
14	Std. Dev. of Flow Time	40.3445
15	Maximum Flow Time	218.5369
	Data Collection: 0 to 2400 horas	
	CPU Seconds = 0.3210	



LÍNEAS DE ESPERA CON PRIORIDADES Y CON INTERRUPCIÓN



Los pacientes llegan a Urgencias de un Hospital de manera aleatoria (proceso entrada de Poisson), por lo que los tiempos entre llegadas siguen una distribución exponencial con una tasa promedio de una media hora.

El tiempo que necesita un equipo para atender a los pacientes sigue aproximadamente una distribución exponencial con un promedio de 20 minutos por paciente.

Los pacientes se clasifican en este orden de prioridad: Críticos (un tratamiento inmediato es vital para la supervivencia), Graves (un tratamiento rápido es importante para prevenir mayor daño) y Estables (el tratamiento puede retrasarse sin consecuencias adversas).

Por lo general, dentro de la misma categoría se atienden a los pacientes según la regla de primero en llegar, primero en salir. Se interrumpe el tratamiento de un paciente si llega un caso nuevo de una categoría de prioridad más alta.

Aproximadamente el 10% de los pacientes caen en la primera categoría, el 30% en la segunda y el 60% en la tercera. Los casos más serios se internan en el Hospital después de recibir el tratamiento urgente, el tiempo promedio de tratamiento en la sala de Urgencias en realidad no difiere mucho entre estas categorías.

Calcular las medidas de rendimiento en el hospital con dos equipos de médicos.

Solución:

Se trata de un sistema de colas de prioridades con interrupción, siendo:

$$\lambda = 2 \text{ pacientes/hora} \quad \mu = 3 \text{ pacientes/hora}$$

$$\lambda_1 = 0,1 \times 2 = 0,2 \text{ pacientes/hora}$$

$$\lambda_2 = 0,3 \times 2 = 0,6 \text{ pacientes/hora}$$

$$\lambda_3 = 0,6 \times 2 = 1,2 \text{ pacientes/hora}$$

Si se tienen dos equipos médicos ($s = 2$) los tiempos de espera para los pacientes Críticos (prioridad 1) no se ven afectados por la presencia de otros pacientes con una prioridad menor. Es decir, W_1 es la misma para cualquiera de los otros valores de λ_2 y λ_3 .

$W_1 = W$ para un modelo de cola M/M/2, $\lambda = 0,2$ y $\mu = 3$

$$\text{Utilización promedio de urgencias: } \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0,2}{3} = 0,0667$$

$$\text{Factor de utilización o congestión de urgencias: } \rho = \frac{\lambda}{s \cdot \mu} = \frac{0,2}{2 \cdot 3} = 0,0333$$

Probabilidad de que ningún paciente crítico se encuentre en el sistema de colas:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\lambda / \mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda / \mu)^s}{s!} \times \left(\frac{1}{1-\rho} \right)} = \frac{1}{\sum_{n=0}^1 \frac{(0,2 / 3)^n}{n!} + \frac{(0,2 / 3)^2}{2!} \left(\frac{1}{1 - 0,3333} \right)} = 0,9355$$



Probabilidad estado n:

$$p_n = \begin{cases} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!} p_0 & n \leq 2 \\ \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{s! s^{(n-s)}} p_0 & n > 2 \end{cases}$$

Estado n	Probabilidad	Probabilidad acumulada
0	0,9355	0,9355
1	0,0624	0,9978
2	0,0021	0,9999
3	0,0001	1
4	0	1

$$p_1 = 0,0677 \times 0,9355 = 0,0624$$

$$p_2 = 0,0677^2 \times \frac{1}{2!} \times 0,9355 = 0,0021$$

$$p_3 = 0,0667^3 \times \frac{1}{2! 2} \times 0,9355 = 0,0001$$

$$p_4 = 0,0667^4 \times \frac{1}{2! 2^2} \times 0,9355 = 0,0000$$

Número promedio de pacientes críticos en el sistema:

$$L_s = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot p_n = \sum_{n=1}^4 n \cdot p_n = 0,0624 + 2 \times 0,0021 + 3 \times 0,0001 = 0,0667$$

$$\text{Tiempo promedio de pacientes críticos en el sistema: } W_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{0,0667}{0,2} = 0,3333 \text{ horas}$$

Número promedio de pacientes críticos en la cola:

$$L_q = \sum_{n=s+1}^{\infty} (n-2) \cdot p_n = \sum_{n=3}^4 (n-2) \cdot p_n = 0,0001$$

$$\text{Tiempo promedio de pacientes críticos en la cola: } W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{0,0001}{0,2} = 0,0004 \text{ horas}$$

Número promedio de pacientes críticos con urgencias ocupadas:

$$L_b = \frac{L_q}{p_w} = \frac{0,0001}{0,0022} = 0,0345 \quad p_w = \sum_{n \geq s}^{\infty} p_n = \sum_{n \geq 2}^4 p_n = 0,0021 + 0,0001 = 0,0022$$

$$\text{Tiempo promedio de pacientes críticos con urgencias ocupadas: } W_b = \frac{W_q}{p_w} = \frac{0,0004}{0,0022} = 0,1724$$


Queuing Analysis

Problem Specification

Problem Title	URGENCIAS
Time Unit	hora
Entry Format	
<input checked="" type="radio"/> Simple M/M System <input type="radio"/> General Queuing System	
OK	Cancel
Help	

Queuing Analysis

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

URGENCIAS	0.00 A																								
Data Description <table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>ENTRY</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Number of servers</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td>Service rate (per server per hour)</td> <td>3</td> </tr> <tr> <td>Customer arrival rate (per hour)</td> <td>0.2</td> </tr> <tr> <td>Queue capacity (maximum waiting space)</td> <td>M</td> </tr> <tr> <td>Customer population</td> <td>M</td> </tr> <tr> <td>Busy server cost per hour</td> <td></td> </tr> <tr> <td>Idle server cost per hour</td> <td></td> </tr> <tr> <td>Customer waiting cost per hour</td> <td></td> </tr> <tr> <td>Customer being served cost per hour</td> <td></td> </tr> <tr> <td>Cost of customer being balked</td> <td></td> </tr> <tr> <td>Unit queue capacity cost</td> <td></td> </tr> </tbody> </table>			ENTRY	Number of servers	2	Service rate (per server per hour)	3	Customer arrival rate (per hour)	0.2	Queue capacity (maximum waiting space)	M	Customer population	M	Busy server cost per hour		Idle server cost per hour		Customer waiting cost per hour		Customer being served cost per hour		Cost of customer being balked		Unit queue capacity cost	
	ENTRY																								
Number of servers	2																								
Service rate (per server per hour)	3																								
Customer arrival rate (per hour)	0.2																								
Queue capacity (maximum waiting space)	M																								
Customer population	M																								
Busy server cost per hour																									
Idle server cost per hour																									
Customer waiting cost per hour																									
Customer being served cost per hour																									
Cost of customer being balked																									
Unit queue capacity cost																									

Queuing Analysis

File Format Results Utilities Window Help

Performance Measure		Result
1	System: M/M/2	From Formula
2	Customer arrival rate (λ) per hora =	0,2000
3	Service rate per server (μ) per hora =	3,0000
4	Overall system effective arrival rate per hora =	0,2000
5	Overall system effective service rate per hora =	0,2000
6	Overall system utilization =	3,3333 %
7	Average number of customers in the system (L) =	0,0667
8	Average number of customers in the queue (L_q) =	0,0001
9	Average number of customers in the queue for a busy system (L_b) =	0,0345
10	Average time customer spends in the system (W) =	0,3337 horas
11	Average time customer spends in the queue (W_q) =	0,0004 horas
12	Average time customer spends in the queue for a busy system (W_b) =	0,1724 horas
13	The probability that all servers are idle (P_0) =	93,5484 %
14	The probability an arriving customer waits (P_w) or system is busy (P_b) =	0,2151 %

Queuing Analysis

File Format Results Utilities Window Help

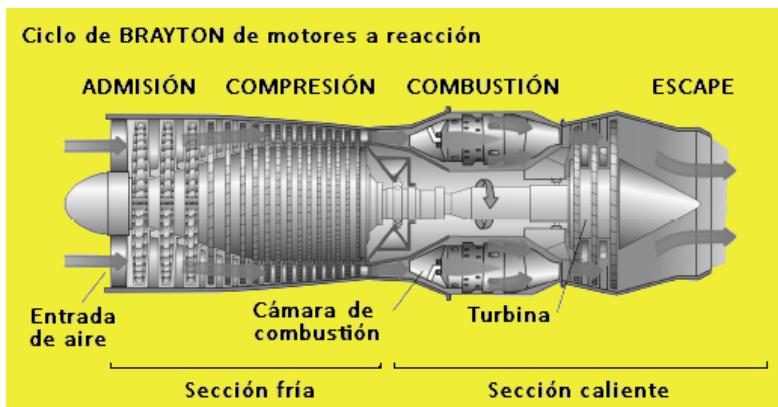
System Probability Summary for URGENCIAS

n	Estimated Probability of n Customers in the System	Cumulative Probability
0	0,9355	0,9355
1	0,0624	0,9978
2	0,0021	0,9999
3	0,0001	1,0000
4	0,0000	1,0000



RED DE COLAS TÁNDEM: CICLO DE BRAYTON

Una vez finalizado, los motores entran en dos secciones que siguen el Ciclo de Brayton: Una sección fría formada por dos circuitos, uno de admisión, y otro de compresión. Posteriormente, entran en una sección caliente formada por otros dos circuitos, uno de combustión y otro de escape. En todos los circuitos hay mecanicos por sección (fría o caliente) por lo que muchas veces admisión revisa tareas de compresión y viceversa así como para combustión y escape.



Actualmente la sección fría opera a un 75% de su capacidad. En la sección caliente se necesitan de media 29,6 minutos por motor y por jornada, de los que un 75% se dedican a la revisión de la combustión. Las llegadas siguen una distribución de Poisson y tiempo de servicio exponencial.

Determinar las siguientes cuestiones para el último día Q3 (tercer trimestre: julio, agosto y septiembre), con una jornada efectiva de 10 horas, donde entran 15 motores en la sección de testeo y 30 motores en el resto de secciones.

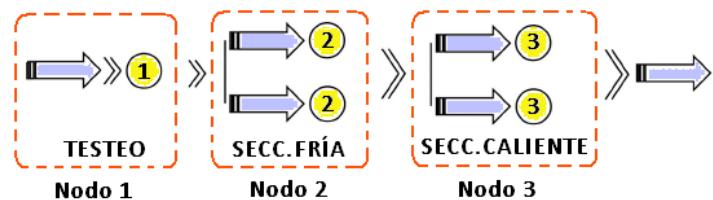
- Longitud media de la cola de motores testados esperando a entrar en la sección fría.
- Tiempo promedio de revisión de un motor en la sección fría.
- Número promedio de motores en la cadena de combustión.
- Los componentes de admisión y combustión presentan mayor desgaste. Estudiar la posibilidad de ampliar de dos a tres circuitos la línea de admisión o la línea de combustión con criterios de tiempo y analizar que sección debe contar con tres circuitos en total.

Solución:

La cadena MRO se modeliza como una red de colas en Tándem con tres nodos o subsistemas:

El nodo 1 con un modelo de cola M/D/1.

Los nodos 2 y 3 con un modelo de cola M/M/2.



- La cola del nodo 1 relativa a cadena de testeo se establece M/D/1 al verificar los parámetros de tarea rutinaria de centralita para todos los motores con un tiempo de servicio constante fijo de 1,5 horas/motor.

15 motores en 10 horas = 1,5 motores a la hora

Para determinar los motores ya testados se debe obtener el número de motores del servidor o nodo 1 de testeo, es decir, L_{s1}

$$\text{Tasa de Llegadas: } \lambda_1 = 1,5 \text{ motores / 60 minutos} = 0,025 \text{ motores / minuto}$$

$$\text{Tasa de servicio: } \mu_1 = 1 / 30 = 0,0333 \text{ motores/minuto}$$



$$\text{Factor de utilización: } \rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1} = \frac{0,025}{0,0333} = 0,75 < 1$$

Verificando la condición de estabilidad.

$$\text{Número promedio motores en la cola: } L_{q1} = \frac{\rho_1^2}{2 \cdot (1 - \rho_1)} = \frac{0,75^2}{2 \cdot (1 - 0,5)} = 1,125 \text{ motores}$$

$$\text{Número promedio de motores en sistema: } L_{s1} = L_{q1} + \rho_1 = 1,125 + 0,75 = 1,755 \approx 2 \text{ motores}$$

b) La sección fría (nodo 2) es un modelo de cola M / M / 2

$$\text{Se revisan 30 motores en 10 horas} = \frac{30}{10} \text{ motores / hora}$$

$$\text{Tasa de Llegadas: } \lambda_2 = 3 \text{ motores / 60 minutos} = 0,05 \text{ motores / minuto}$$

$$\text{Factor de utilización: } \rho_2 = 75\% = 0,75 \text{ de capacidad}$$

$$\rho_2 = \frac{\lambda_2}{s_2 \cdot \mu_2} \rightarrow 0,75 = \frac{0,05}{2 \cdot \mu_2} \Rightarrow \text{Tasa de servicio: } \mu_2 = \frac{0,05}{2 \cdot 0,75} = 0,033$$

$$\text{Utilización promedio del subsistema (nodo 2): } u_{s2} = \frac{\lambda_2}{\mu_2} = \frac{0,05}{0,033} = 1,5$$

$$\text{Número promedio de motores en cola del nodo 2: } L_{q2} = \frac{1}{s_2!} \left(\frac{\lambda_2}{\mu_2} \right)^{s_2} \frac{\rho_2}{(1 - \rho_2)^2} p_{02}$$

Probabilidad de que ningún motor se encuentre en el sistema de colas del nodo 2:

$$p_{02} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s_2-1} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda_2}{\mu_2} \right)^n + \frac{1}{s_2!} \left(\frac{\lambda_2}{\mu_2} \right)^{s_2} \left(\frac{1}{1 - \rho_2} \right)} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{2-1} \frac{1}{n!} 1,5^n + \frac{1}{2!} 1,5^2 \left(\frac{1}{1 - 0,75} \right)} = \\ = \frac{1}{1 + 1,5 + 4,5} = 0,1428$$

$$L_{q2} = \frac{1}{s_2!} \left(\frac{\lambda_2}{\mu_2} \right)^{s_2} \frac{\rho_2}{(1 - \rho_2)^2} p_{02} = \frac{1}{2!} \cdot 1,5^2 \cdot \frac{0,75}{(1 - 0,75)^2} \cdot 0,1428 = 1,9278 \text{ motores}$$

Tiempo promedio de estancia en cola de la sección fría (nodo 2):

$$W_{q2} = \frac{L_{q2}}{\lambda_2} = \frac{1,9278}{0,05} = 38,556 \text{ minutos}$$

c) La cadena de combustión (nodo 3) es un modelo de cola M / M / 2



Se revisan 30 motores en 10 horas = $\frac{30}{10}$ motores / hora

Tasa de Llegadas: $\lambda_3 = 3$ motores / 60 minutos = 0,05 motores / minuto

Servicio: Se necesitan 29,6 minutos por motor en la sección caliente en jornada de 10 horas, dedicando el 75% del tiempo en la línea de combustión, por lo que en 10 horas: $29,6 \times 0,75 = 22,2$ minutos / motor , con lo que el tiempo de combustión en 1 hora resulta: $22,2 / 10 = 2,2$ minutos / motor

Tasa de servicio en minuto: $\mu_3 = 2,2 / 60 = 0,037$ motor/minuto

Factor de utilización: $\rho_3 = \frac{\lambda_3}{s_3 \cdot \mu_3} = \frac{0,05}{2 \times 0,037} = 0,675$ sistema estable

Utilización promedio de combustión (nodo 3) : $u_{s3} = \frac{\lambda_3}{\mu_3} = \frac{0,05}{0,037} = 1,35$

Número promedio de motores en combustión (nodo 3): $L_{q3} = \frac{1}{s_3!} \left(\frac{\lambda_3}{\mu_3} \right)^{s_3} \frac{\rho_3}{(1 - \rho_3)^2} p_{03}$

Probabilidad de que ningún motor se encuentre en la cola de combustión:

$$\begin{aligned} p_{03} &= \frac{1}{\sum_{n=0}^{s_3-1} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda_3}{\mu_3} \right)^n + \frac{1}{s_3!} \left(\frac{\lambda_3}{\mu_3} \right)^{s_3} \left(\frac{1}{1-\rho_3} \right)} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{2-1} \frac{1}{n!} 1,35^n + \frac{1}{2!} 1,35^2 \left(\frac{1}{1-0,675} \right)} = \\ &= \frac{1}{1 + 1,35 + 4,5} = 0,1939 \end{aligned}$$

$$L_{q3} = \frac{1}{s_3!} \left(\frac{\lambda_3}{\mu_3} \right)^{s_3} \frac{\rho_3}{(1 - \rho_3)^2} p_{03} = \frac{1}{2!} \cdot 1,35^2 \cdot \frac{0,675}{(1 - 0,675)^2} \cdot 0,1939 = 1,129 \text{ motores}$$

Tiempo promedio de permanencia en cola de la sección de combustión (nodo 3):

$$W_{q3} = \frac{L_{q3}}{\lambda_3} = \frac{1,129}{0,05} = 22,58 \text{ minutos}$$

d) Atendiendo únicamente a criterios de tiempo, se determina que sección (fría o caliente,) debe contar con tres circuitos.

d.1) Sección fría (nodo 2) : Se analiza un modelo de cola M / M / 3

Tasa de Llegadas: $\lambda_2^* = 0,05$ motores / minuto

Factor de utilización: $\rho_2^* = 75\% = 0,75$ de capacidad



$$\rho_2^* = \frac{\lambda_2^*}{s_2^* \cdot \mu_2^*} \rightarrow 0,75 = \frac{0,05}{3 \cdot \mu_2^*} \Rightarrow \text{Tasa de servicio: } \mu_2^* = \frac{0,05}{3 \cdot 0,75} = 0,0222$$

$$\text{Utilización promedio del subsistema (nodo 2): } u_{s2}^* = \frac{\lambda_2^*}{\mu_2^*} = \frac{0,05}{0,0222} = 2,25$$

$$\text{Número promedio de motores en cola del nodo 2: } L_{q2}^* = \frac{1}{s_2^*!} \left(\frac{\lambda_2^*}{\mu_2^*} \right)^{s_2^*} \frac{\rho_2^*}{(1 - \rho_2^*)^2} p_{02}^*$$

Probabilidad de que ningún motor se encuentre en el sistema de colas del nodo 2:

$$\begin{aligned} p_{02}^* &= \frac{1}{\sum_{n=0}^{s_2^*-1} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda_2^*}{\mu_2^*} \right)^n + \frac{1}{s_2^*!} \left(\frac{\lambda_2^*}{\mu_2^*} \right)^{s_2^*} \left(\frac{1}{1 - \rho_2^*} \right)} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{3-1} \frac{1}{n!} 2,25^n + \frac{1}{3!} 2,25^3 \left(\frac{1}{1 - 0,75} \right)} = \\ &= \frac{1}{\sum_{n=0}^2 \frac{1}{n!} 2,25^n + \frac{1}{3!} 2,25^3 \left(\frac{1}{1 - 0,75} \right)} = \frac{1}{1 + 2,25 + 2,53125 + 7,59375} = 0,0747 \end{aligned}$$

$$L_{q2}^* = \frac{1}{s_2^*!} \left(\frac{\lambda_2^*}{\mu_2^*} \right)^{s_2^*} \frac{\rho_2^*}{(1 - \rho_2^*)^2} p_{02}^* = \frac{1}{3!} \cdot 2,25^3 \cdot \frac{0,75}{(1 - 0,75)^2} \cdot 0,0747 = 1,701 \text{ motores}$$

Tiempo promedio de permanencia en cola de la nueva sección fría (nodo 2):

$$W_{q2}^* = \frac{L_{q2}^*}{\lambda_2^*} = \frac{1,701}{0,05} = 34,02 \text{ minutos}$$

Tiempo optimizado: $W_{q2} - W_{q2}^* = 38,556 - 34,02 = 4,536$ minutos ganados con 3 servidores

d.2) Sección caliente (nodo 3): Se analiza un modelo de cola M/M/3

Tasa de Llegadas: $\lambda_3^* = 3 \text{ motores / 60 minutos} = 0,05 \text{ motores / minuto}$

$$\rho_3^* = \frac{\lambda_3^*}{s_3^* \cdot \mu_3^*} \rightarrow 0,675 = \frac{0,05}{3 \cdot \mu_3^*} \Rightarrow \text{Tasa de servicio: } \mu_3^* = \frac{0,05}{3 \cdot 0,675} = 0,0247$$

$$\text{Utilización promedio del subsistema (nodo 3): } u_{s3}^* = \frac{\lambda_3^*}{\mu_3^*} = \frac{0,05}{0,0247} = 2,024$$

$$\text{Número promedio de motores en cola del nodo 3: } L_{q3}^* = \frac{1}{s_3^*!} \left(\frac{\lambda_3^*}{\mu_3^*} \right)^{s_3^*} \frac{\rho_3^*}{(1 - \rho_3^*)^2} p_{03}^*$$



$$\begin{aligned}
 p_{03}^* &= \sum_{n=0}^{s_3^*-1} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda_3^*}{\mu_3^*} \right)^n + \frac{1}{s_3^*!} \left(\frac{\lambda_3^*}{\mu_3^*} \right)^{s_3^*} \left(\frac{1}{1-\rho_3^*} \right) = \sum_{n=0}^{3-1} \frac{1}{n!} 2,024^n + \frac{1}{3!} 2,024^3 \left(\frac{1}{1-0,675} \right) = \\
 &= \frac{1}{\sum_{n=0}^2 \frac{1}{n!} 2,024^n + \frac{1}{3!} 2,024^3 \left(\frac{1}{1-0,675} \right)} = \frac{1}{1+2,024+2,048+4,252} = 0,107 \\
 L_{q3}^* &= \frac{1}{s_3^*!} \left(\frac{\lambda_3^*}{\mu_3^*} \right)^{s_3^*} \frac{\rho_3^*}{(1-\rho_3^*)^2} \quad p_{03}^* = \frac{1}{3!} \cdot 2,024^3 \cdot \frac{0,675}{(1-0,675)^2} \cdot 0,107 = 0,945 \text{ motores}
 \end{aligned}$$

Tiempo promedio de permanencia en cola de la nueva sección caliente (nodo 3):

$$W_{q3}^* = \frac{L_{q3}^*}{\lambda_{q3}^*} = \frac{0,945}{0,05} = 18,9 \text{ minutos}$$

Tiempo optimizado: $W_{q3} - W_{q3}^* = 22,58 - 18,9 = 3,68$ minutos ganados con 3 servidores

En caso de ampliar una sola sección debe ser la sección fría ya que optimiza mejor el ahorro por minuto en la revisión de motores.



RED DE COLAS TÁNDEM: AEROPUERTO



Los pasajeros de un aeropuerto regional tienen que pasar por tres estaciones antes de llegar al avión: el control de pasaportes donde se sella la documentación, con una capacidad máxima para 50 pasajeros; el mostrador de facturación, compuesto por dos cintas, con una tasa de servicio medio de 75 clientes/hora; y, por último, el control de seguridad, que consta de cuatro puestos de seguridad.

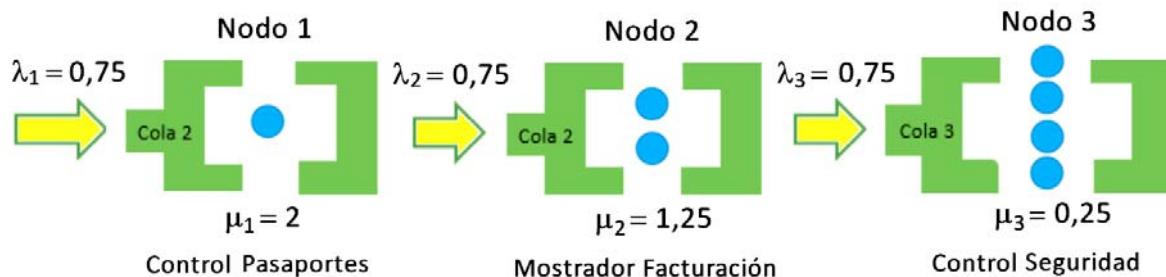
Al mostrador de facturación acuden de media 45 clientes/hora, cuyo empleado atiende a un ritmo medio de 2 clientes/minuto; mientras que los auxiliares de seguridad tardan una media de 4 minutos/cliente. Las llegadas siguen una distribución de Poisson y el tiempo de servicio se distribuye exponencialmente.

Se pide:

- Número promedio de pasajeros en cada sistema: control de pasaportes, mostrador de facturación y control de seguridad.
- Tiempo medio que un cliente desde que pasa el control de pasaportes hasta que finaliza el control de seguridad.
- Para agilizar el proceso el aeropuerto quiere ampliar el número de los puestos del control de pasaportes, así como del control de seguridad en una unidad. Suponiendo que el coste de ampliación en uno u otro lugar fuera equivalente, ¿qué criterio sería más acertado para que el tiempo de servicio del sistema fuera menor?

Solución:

El aeropuerto se puede modelizar como una red de colas Tándem con tres nodos o subsistemas, el nodo 1 un modelo de cola M/M/1, el nodo 2 un modelo de cola M/M/2 y el nodo 3 un modelo de cola M/M/4.



La tasa de llegadas para cada estación (nodo) es la misma, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0,75$ clientes/minuto.

En el apartado (a) se calculan también todas las medidas de rendimiento para ir contestando después a distintos apartados.

- Nodo 1 (Control de pasaportes): Modelo de cola M/M/1

Factor de utilización (intensidad) del tráfico: $\rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1} = \frac{0,75}{2} = 0,375 < 1$, por lo que el subsistema

no se satura y existe un estado estacionario.

Tiempo promedio de estancia en el sistema: $W_{s1} = \frac{1}{\mu_1 - \lambda_1} = \frac{1}{2 - 0,75} = 0,8$ minutos



Número promedio de clientes en el sistema: $L_{s1} = \lambda_1 \cdot W_{s1} = 0,75 \times 0,8 = 0,6$ pasajeros

$$W_{q1} = \rho_1 \cdot W_{s1} = 0,375 \times 0,8 = 0,3 \text{ minutos}$$

Tiempo promedio de clientes en la cola:

$$W_{q1} = W_{s1} - \frac{1}{\mu_1} = 0,8 - \frac{1}{2} = 0,3 \text{ minutos}$$

$$L_{q1} = \rho_1 \cdot L_{s1} = 0,375 \times 0,6 = 0,225 \text{ pasajeros}$$

Número promedio de clientes en la cola:

$$L_{q1} = \frac{\lambda_1^2}{\mu_1 \cdot (\mu_1 - \lambda_1)} = \frac{0,75^2}{2 \cdot (2 - 0,75)} = 0,225 \text{ pasajeros}$$

Nodo 2 (Mostrador de facturación): Modelo de cola M/M/2

Factor de utilización (intensidad) del tráfico: $\rho_2 = \frac{\lambda_2}{s_2 \cdot \mu_2} = \frac{0,75}{2 \times 1,25} = 0,3 < 1$ sistema estable

Utilización promedio del subsistema 2: $u_{s2} = \frac{\lambda_2}{\mu_2} = \frac{0,75}{1,25} = 0,6$

Probabilidad de que ningún pasajero se encuentre en la cola de la estación 2:

$$\begin{aligned} p_{02} &= \frac{1}{\sum_{n=0}^{s_2-1} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda_2}{\mu_2}\right)^n + \frac{1}{s_2!} \left(\frac{\lambda_2}{\mu_2}\right)^{s_2} \left(\frac{1}{1-\rho_2}\right)} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{2-1} \frac{1}{n!} 0,6^n + \frac{1}{2!} 0,6^2 \left(\frac{1}{1-0,3}\right)} = \\ &= \frac{1}{\sum_{n=0}^1 \frac{1}{n!} 0,6^n + \frac{1}{2!} 0,6^2 \left(\frac{1}{1-0,3}\right)} = \frac{1}{1 + 0,6 + 0,257} = 0,5384 \end{aligned}$$

Número promedio de pasajeros en cola del nodo 2:

$$L_{q2} = \frac{1}{s_2!} \left(\frac{\lambda_2}{\mu_2}\right)^{s_2} \frac{\rho_2}{(1-\rho_2)^2} p_{02} = \frac{1}{2!} \times 0,6^2 \times \frac{0,3}{(1-0,3)^2} \times 0,5384 = 0,0593 \text{ pasajeros}$$

Tiempo promedio de estancia en cola del nodo2: $W_{q2} = \frac{L_{q2}}{\lambda_2} = \frac{0,0593}{0,75} = 0,0791 \text{ minutos}$

Número promedio de clientes en el sistema del mostrador de facturación (nodo 2):

$$L_{s2} = L_{q2} + \frac{\lambda_2}{\mu_2} = 0,0593 + 0,6 = 0,6593 \text{ pasajeros}$$

Tiempo promedio de estancia en sistema del nodo2: $W_{s2} = \frac{L_{s2}}{\lambda_2} = \frac{0,6593}{0,75} = 0,8791 \text{ minutos}$


Nodo 3 (Control de seguridad): Modelo de cola M/M/4

Factor de utilización (intensidad) del tráfico: $\rho_3 = \frac{\lambda_3}{s_3 \cdot \mu_3} = \frac{0,75}{4 \times 0,25} = 0,75 < 1$ sistema estable

Utilización promedio del subsistema 3: $u_{s3} = \frac{\lambda_3}{\mu_3} = \frac{0,75}{0,25} = 3$

Probabilidad de que ningún pasajero se encuentre en la cola de la estación 3:

$$\begin{aligned} p_{03} &= \frac{1}{\sum_{n=0}^{s_3-1} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda_3}{\mu_3}\right)^n + \frac{1}{s_3!} \left(\frac{\lambda_3}{\mu_3}\right)^{s_3} \left(\frac{1}{1-\rho_3}\right)} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{4-1} \frac{1}{n!} 3^n + \frac{1}{4!} 3^4 \left(\frac{1}{1-0,75}\right)} = \\ &= \frac{1}{\sum_{n=0}^3 \frac{1}{n!} 3^n + \frac{1}{4!} 3^4 \left(\frac{1}{1-0,75}\right)} = \frac{1}{1+3+4,5+4,5+13,5} = 0,0377 \end{aligned}$$

Número promedio de pasajeros en cola del nodo 3:

$$L_{q3} = \frac{1}{s_3!} \left(\frac{\lambda_3}{\mu_3}\right)^{s_3} \frac{\rho_3}{(1-\rho_3)^2} p_{03} = \frac{1}{4!} \times 3^4 \times \frac{0,75}{(1-0,75)^2} \times 0,0377 = 1,5268 \text{ pasajeros}$$

$$\text{Tiempo promedio de estancia en cola del nodo3: } W_{q3} = \frac{L_{q3}}{\lambda_3} = \frac{1,5268}{0,75} = 2,0357 \text{ minutos}$$

Número promedio de clientes en el sistema del control de seguridad (nodo 3):

$$L_{s3} = L_{q3} + \frac{\lambda_3}{\mu_3} = 1,5268 + 3 = 4,5268 \text{ pasajeros}$$

$$\text{Tiempo promedio de estancia en sistema del nodo3: } W_{s3} = \frac{L_{s3}}{\lambda_3} = \frac{4,5268}{0,75} = 6,0357 \text{ minutos}$$

b) El tiempo total que un pasajero tarda en el aeropuerto viene reflejado por la suma de los tiempos de los tres subsistemas.

$$W_{\text{Aeropuerto}} = \sum_{i=1}^3 W_{si} = 0,8 + 0,8791 + 6,0357 = 7,7148 \text{ minutos}$$

c) Se añade un servidor en el control de pasaportes (nodo 1) y en el control de seguridad (nodo 3), teniendo que recalcular las medidas de rendimiento.

Nodo 1 (Control de pasaportes): Modelo de cola M/M/2

Factor de utilización (intensidad) del tráfico: $\rho_1^* = \frac{\lambda_1}{s_1 \cdot \mu_1} = \frac{0,75}{2 \times 2} = 0,1875 < 1$ sistema estable



$$\text{Utilización promedio del subsistema 1: } u_{s1}^* = \frac{\lambda_1}{\mu_1} = \frac{0,75}{2} = 0,375$$

Probabilidad de que ningún pasajero se encuentre en la cola de la estación 1:

$$p_{01}^* = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s_1-1} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)^n + \frac{1}{s_1^*!} \left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)^{s_1^*} \left(\frac{1}{1-p_1^*}\right)} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{2-1} \frac{1}{n!} 0,375^n + \frac{1}{2!} 0,375^2 \left(\frac{1}{1-0,1875}\right)} = \\ = \frac{1}{\sum_{n=0}^1 \frac{1}{n!} 0,375^n + \frac{1}{2!} 0,375^2 \left(\frac{1}{1-0,1875}\right)} = \frac{1}{1+0,375+0,086} = 0,6842$$

Número promedio de pasajeros en cola del nodo 1:

$$L_{q1}^* = \frac{1}{s_1^*!} \left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)^{s_1^*} \frac{p_1^*}{(1-p_1^*)^2} p_{01}^* = \frac{1}{2!} \times 0,375^2 \times \frac{0,1875}{(1-0,1875)^2} \times 0,6842 = 0,0137 \text{ pasajeros}$$

$$\text{Tiempo promedio de estancia en cola del nodo 1: } W_{q1}^* = \frac{L_{q1}^*}{\lambda_1} = \frac{0,0137}{0,75} = 0,0182 \text{ minutos}$$

Número promedio de clientes en el sistema del control de pasaportes (nodo 1):

$$L_{s1}^* = L_{q1}^* + \frac{\lambda_1}{\mu_1} = 0,0137 + 0,375 = 0,3887 \text{ pasajeros}$$

$$\text{Tiempo promedio de estancia en sistema del nodo 1: } W_{s1}^* = \frac{L_{s1}^*}{\lambda_1} = \frac{0,3887}{0,75} = 0,5183 \text{ minutos}$$

$$\text{Diferencia de tiempo ganado} = W_{s1} - W_{s1}^* = 0,8 - 0,5183 = 0,2817 \text{ minutos}$$

Nodo 3 (Control de seguridad): Modelo de cola M/M/5

$$\text{Factor de utilización (intensidad) del tráfico: } p_3^* = \frac{\lambda_3}{s_3 \cdot \mu_3} = \frac{0,75}{5 \times 0,25} = 0,6 < 1 \text{ sistema estable}$$

$$\text{Utilización promedio del subsistema 3: } u_{s3}^* = \frac{\lambda_3}{\mu_3} = \frac{0,75}{0,25} = 3$$

Probabilidad de que ningún pasajero se encuentre en la cola de la estación 3:

$$p_{03}^* = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s_3-1} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda_3}{\mu_3}\right)^n + \frac{1}{s_3^*!} \left(\frac{\lambda_3}{\mu_3}\right)^{s_3^*} \left(\frac{1}{1-p_3^*}\right)} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{5-1} \frac{1}{n!} 3^n + \frac{1}{5!} 3^5 \left(\frac{1}{1-0,6}\right)} =$$



$$= \frac{1}{\sum_{n=0}^4 \frac{1}{n!} 3^n + \frac{1}{5!} 3^5 \left(\frac{1}{1-0,6} \right)} = \frac{1}{1+3+4,5+4,5+3,375+5,0625} = 0,0466$$

Número promedio de pasajeros en cola del nodo 3:

$$L_{q3}^{\bullet} = \frac{1}{s_3^{\bullet}!} \left(\frac{\lambda_3}{\mu_3} \right)^{s_3^{\bullet}} \frac{\rho_3^{\bullet}}{(1-\rho_3^{\bullet})^2} p_{03}^{\bullet} = \frac{1}{5!} \times 3^5 \times \frac{0,6}{(1-0,6)^2} \times 0,0466 = 0,3538 \text{ pasajeros}$$

$$\text{Tiempo promedio de estancia en cola del nodo 3: } W_{q3}^{\bullet} = \frac{L_{q3}^{\bullet}}{\lambda_3} = \frac{0,3538}{0,75} = 0,4717 \text{ minutos}$$

Número promedio de clientes en el sistema del control de seguridad (nodo 3):

$$L_{s3}^{\bullet} = L_{q3}^{\bullet} + \frac{\lambda_3}{\mu_3} = 0,3538 + 3 = 3,3538 \text{ pasajeros}$$

$$W_{s3}^{\bullet} = \frac{L_{s3}^{\bullet}}{\lambda_3} = \frac{3,3538}{0,75} = 4,4717 \text{ minutos}$$

Tiempo promedio de estancia

en sistema del nodo3:

$$W_{s3}^{\bullet} = W_{q3}^{\bullet} + \frac{1}{\mu_3} = 0,4717 + 4 = 4,4717 \text{ minutos}$$

$$\text{Diferencia de tiempo ganado} = W_{s3} - W_{s3}^{\bullet} = 6,0357 - 4,4717 = 1,564 \text{ minutos}$$



RED DE COLAS JACKSON ABIERTA: PUERTO NAVIERO



Un puerto naviero dispone de cuatro muelles de atraque. Los tres primeros muelles tienen, respectivamente, una tasa de llegada de 60, 45 y 20 toneladas por hora.

Por las dimensiones del puerto, los contenedores se mueven entre los distintos muelles, para priorizar la salida de productos perecederos que son cargados en camiones de distribución terrestre.

El primer muelle dispone de dos grúas capaces de descargar, cada una, 45 toneladas por hora. Cuando acaba el proceso de descarga el 50% es enviado al muelle 4 y resto al muelle 2.

El segundo muelle tiene 3 grúas, con la misma capacidad de descarga que las del primer muelle. Cuando acaba el proceso de descarga, el 30% va al muelle 4 y el otro 70% al muelle 3.

El muelle 3 consta de 2 grúas con capacidad de 50 descargas cada una. Cuando acaba el proceso el 10% vuelve al mismo muelle, porque son contenedores que se cambian de sitio para poder mover otros, el 50% son cargados en camiones y salen del puerto, un 10% vuelve al muelle 1 y el resto van al muelle 4.

El cuarto muelle está equipado con una grúa más potente capaz de cargar y descargar 100 contenedores por hora. Un contenedor = 1 tonelada. Cuando acaba el proceso, los contenedores salen del puerto.

Se pide:

- Número medio de contenedores en cada muelle.
- Número medio de contenedores que visita cada muelle.
- Tiempo medio que pasa un contenedor en la red.
- Sí la grúa del muelle 4 solo pudiese descargar 40 contenedores/hora, ¿cuántas grúas necesitarían?, ¿En este caso, cual sería el tiempo promedio que pasaría un contenedor en la red?

Solución:

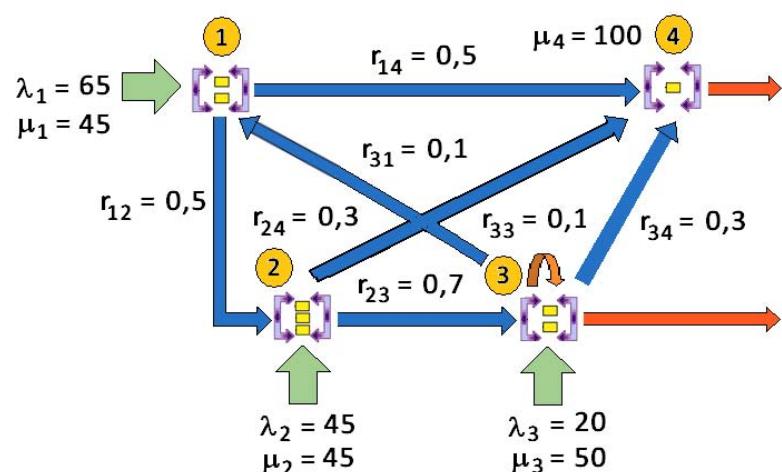
- a) Es una red de Jackson cíclica abierta con $k = 4$ nodos (muelles).

λ_i ≡ Tasa de llegadas de procesos al nodo i desde fuera del sistema.

Λ_i ≡ Tasa de llegadas de procesos al nodo i desde fuera y dentro del sistema.

r_{ji} ≡ Probabilidad de transición del nodo j al nodo i

$\Lambda_j r_{ji}$ ≡ Tasa de procesos que llegan al nodo i desde el nodo j



Ecuaciones de tráfico o ecuaciones de equilibrio: $\Lambda_i = \lambda_i + \sum_{j=1}^4 \Lambda_j r_{ji}$

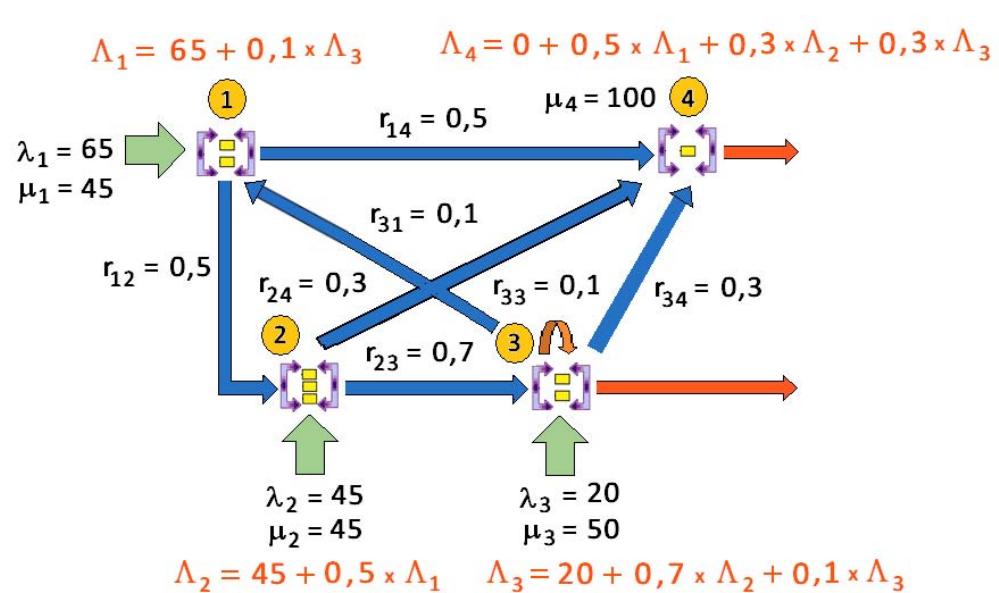


En forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \\ \Lambda_3 \\ \Lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} & r_{41} \\ r_{12} & r_{22} & r_{32} & r_{42} \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} & r_{43} \\ r_{14} & r_{24} & r_{34} & r_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \\ \Lambda_3 \\ \Lambda_4 \end{pmatrix}$$

Las ecuaciones de tráfico o equilibrio son intuitivas.

En cada nodo el flujo de entrada debe ser igual al flujo de salida.



$$\Lambda_1 = 65 + 0,1 \cdot \Lambda_3$$

$$\Lambda_2 = 45 + 0,5 \cdot \Lambda_1$$

$$\Lambda_3 = 20 + 0,7 \cdot \Lambda_2 + 0,1 \cdot \Lambda_3$$

$$\Lambda_4 = 0 + 0,5 \cdot \Lambda_1 + 0,3 \cdot \Lambda_2 + 0,3 \cdot \Lambda_3$$

$$\Lambda_3 = 85,838 \quad \Lambda_1 = 73,584 \quad \Lambda_2 = 81,792 \quad \Lambda_4 = 87,081$$

$$\rightarrow 0,9 \cdot \Lambda_3 = 20 + 0,7 \cdot [45 + 0,5 \cdot (65 + 0,1 \cdot \Lambda_3)] \\ 0,865 \cdot \Lambda_3 = 74,25$$

La tasa global de salidas del sistema coincide con el número de procesos que entran en el sistema:

$$\Lambda_{\text{Puerto}} = \sum_{i=1}^4 \Lambda_i = 73,584 + 81,792 + 85,838 + 87,081 = 328,295$$

Condición de no saturación aplicada a cada uno de los nodos por separado. En la práctica cuando $\rho > 0,85$ se satura el sistema.

Nodo (Muelle) 1: $\rho_1 = \frac{\Lambda_1}{s_1 \cdot \mu_1} = \frac{73,584}{2 \times 45} = 0,818 < 1 \quad s_1 = 2 \text{ servidores}$

Nodo (Muelle) 2: $\rho_2 = \frac{\Lambda_2}{s_2 \cdot \mu_2} = \frac{81,792}{3 \times 45} = 0,606 < 1 \quad s_2 = 3 \text{ servidores}$

Nodo (Muelle) 3: $\rho_3 = \frac{\Lambda_3}{s_3 \cdot \mu_3} = \frac{85,838}{2 \times 50} = 0,858 < 1 \quad s_3 = 2 \text{ servidores}$

Nodo (Muelle) 4: $\rho_4 = \frac{\Lambda_4}{s_4 \cdot \mu_4} = \frac{87,081}{1 \times 100} = 0,870 < 1 \quad s_4 = 1 \text{ servidor}$



- Muelle 1 : Modelo de cola M/M/2

Utilización promedio del sistema: $u_{s1} = \frac{\Lambda_1}{\mu_1} = \frac{73,584}{45} = 1,6352$

Probabilidad de que ningún contenedor se encuentre en la cola del Muelle 1:

$$p_{01} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s_1-1} \frac{1}{n!} \left(\frac{\Lambda_1}{\mu_1}\right)^n + \frac{1}{s_1!} \left(\frac{\Lambda_1}{\mu_1}\right)^{s_1} \left(\frac{1}{1-p_1}\right)} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{2-1} \frac{1}{n!} 1,6352^n + \frac{1}{2!} 1,6352^2 \left(\frac{1}{1-0,818}\right)} = \\ = \frac{1}{\sum_{n=0}^1 \frac{1}{n!} 1,6352^n + \frac{1}{2!} 1,6352^2 \left(\frac{1}{0,182}\right)} = \frac{1}{1 + 1,6352 + 7,3458} = 0,1002$$

Número promedio de contenedores en cola del Muelle 1:

$$L_{q1} = \frac{1}{s_1!} \left(\frac{\Lambda_1}{\mu_1}\right)^{s_1} \frac{p_1}{(1-p_1)^2} p_{01} = \frac{1}{2!} \times 1,6352^2 \times \frac{0,818}{(1-0,818)^2} \times 0,1002 = 3,3082 \text{ contenedores}$$

Número promedio de contenedores en el sistema del Muelle 1:

$$L_{s1} = L_{q1} + u_{s1} = 3,3082 + 1,6352 = 4,9434 \text{ contenedores}$$

- Muelle 2 : Modelo de cola M/M/3

Utilización promedio del sistema: $u_{s2} = \frac{\Lambda_2}{\mu_2} = \frac{81,792}{45} = 1,818$

Probabilidad de que ningún contenedor se encuentre en la cola del Muelle 2:

$$p_{02} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s_2-1} \frac{1}{n!} \left(\frac{\Lambda_2}{\mu_2}\right)^n + \frac{1}{s_2!} \left(\frac{\Lambda_2}{\mu_2}\right)^{s_2} \left(\frac{1}{1-p_2}\right)} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{3-1} \frac{1}{n!} 1,818^n + \frac{1}{3!} 1,818^3 \left(\frac{1}{1-0,606}\right)} = \\ = \frac{1}{\sum_{n=0}^2 \frac{1}{n!} 1,818^n + \frac{1}{3!} 1,818^3 \left(\frac{1}{0,394}\right)} = \frac{1}{1 + 1,818 + 1,653 + 2,542} = 0,1426$$

Número promedio de contenedores en cola del Muelle 2:

$$L_{q2} = \frac{1}{s_2!} \left(\frac{\Lambda_2}{\mu_2}\right)^{s_2} \frac{p_2}{(1-p_2)^2} p_{02} = \frac{1}{3!} \times 1,818^3 \times \frac{0,606}{(1-0,606)^2} \times 0,1426 = 0,5575 \text{ contenedores}$$

Número promedio de contenedores en el sistema del Muelle 2:

$$L_{s2} = L_{q2} + u_{s2} = 0,5575 + 1,818 = 2,3755 \text{ contenedores}$$



- Muelle 3 : Modelo de cola M/M/2

Utilización promedio del sistema: $u_{s3} = \frac{\Lambda_3}{\mu_3} = \frac{85,838}{50} = 1,7168$

Probabilidad de que ningún contenedor se encuentre en la cola del Muelle 3:

$$p_{03} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s_3-1} \frac{1}{n!} \left(\frac{\Lambda_3}{\mu_3}\right)^n + \frac{1}{s_3!} \left(\frac{\Lambda_3}{\mu_3}\right)^{s_3} \left(\frac{1}{1-p_3}\right)} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{2-1} \frac{1}{n!} 1,7168^n + \frac{1}{2!} 1,7168^2 \left(\frac{1}{1-0,858}\right)} = \\ = \frac{1}{\sum_{n=0}^1 \frac{1}{n!} 1,7168^n + \frac{1}{2!} 1,7168^2 \left(\frac{1}{1-0,858}\right)} = \frac{1}{1 + 1,7168 + 10,3782} = 0,0764$$

Número promedio de contenedores en cola del Muelle 3:

$$L_{q3} = \frac{1}{s_3!} \left(\frac{\Lambda_3}{\mu_3}\right)^{s_3} \frac{\rho_3}{(1-\rho_3)^2} p_{03} = \frac{1}{2!} \times 1,7168^2 \times \frac{0,858}{(1-0,858)^2} \times 0,0764 = 4,7909 \text{ contenedores}$$

Número promedio de contenedores en el sistema del Muelle 3:

$$L_{s3} = L_{q3} + u_{s3} = 4,7909 + 1,7168 = 6,5077 \text{ contenedores}$$

- Muelle 4 : Modelo de cola M/M/1

Intensidad tráfico: $\rho_4 = \frac{\Lambda_4}{\mu_4} = \frac{87,081}{100} = 0,870 < 1$

Número promedio de contenedores en la cola del Muelle 4:

$$L_{q4} = \frac{\Lambda_i^2}{\mu_i (\mu_i - \Lambda_i)} = \frac{87,081^2}{100 \times (100 - 87,081)} = 5,8697 \text{ contenedores}$$

Número promedio de contenedores en el sistema del Muelle 4:

$$L_{s4} = \frac{\Lambda_4}{\mu_4 - \Lambda_4} = \frac{87,081}{100 - 87,081} = 6,7405 \text{ contenedores}$$

b) Número medio de contenedores que visita cada muelle:

Muelle 1: $V_1 = \frac{\Lambda_1}{\Lambda_{\text{Puerto}}} = \frac{73,584}{328,295} = 0,2241$

Muelle 2: $V_2 = \frac{\Lambda_2}{\Lambda_{\text{Puerto}}} = \frac{81,792}{328,295} = 0,2491$

Muelle 3: $V_3 = \frac{\Lambda_3}{\Lambda_{\text{Puerto}}} = \frac{85,838}{328,295} = 0,2614$



Muelle 4: $V_4 = \frac{\Lambda_4}{\Lambda_{\text{Puerto}}} = \frac{87,081}{328,295} = 0,2652$

c) Número promedio de contenedores en el sistema del Puerto:

$$L_{s\text{Puerto}} = \sum_{i=1}^4 L_{si} = 4,9434 + 2,3755 + 6,5077 + 6,7405 = 20,5671 \text{ contenedores}$$

d) Gruás que ncesita el Muelle 4 con una tasa de servicio $\mu_4 = 40$ contenedores / hora

Muelle 4: $\rho_4 = \frac{\Lambda_4}{s_4 \cdot \mu_4} = \frac{87,081}{s_4 \times 40} < 1 \rightarrow s_4 > \frac{87,081}{s_4 \times 40} \approx 3 \text{ grúas}$

El Muelle 4 pasa de M/M/1 a M/M/3

Utilización promedio del sistema: $u_{s4} = \frac{\Lambda_4}{\mu_4} = \frac{87,081}{40} = 2,177$

Intensidad del tráfico de Muelle 4: $\rho_4 = \frac{\Lambda_4}{s_4 \cdot \mu_4} = \frac{87,081}{3 \times 40} = 0,7256 \text{ estable}$

Probabilidad de que ningún contenedor se encuentre en la cola del Muelle 4:

$$\begin{aligned} p_{04} &= \frac{1}{\sum_{n=0}^{s_4-1} \frac{1}{n!} \left(\frac{\Lambda_4}{\mu_4}\right)^n + \frac{1}{s_4!} \left(\frac{\Lambda_4}{\mu_4}\right)^{s_4} \left(\frac{1}{1-\rho_4}\right)} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{3-1} \frac{1}{n!} 2,177^n + \frac{1}{3!} 2,177^3 \left(\frac{1}{1-0,7256}\right)} = \\ &= \frac{1}{\sum_{n=0}^2 \frac{1}{n!} 2,177^n + \frac{1}{3!} 2,177^3 \left(\frac{1}{0,2744}\right)} = \frac{1}{1+2,177+2,3697+6,2668} = 0,0846 \end{aligned}$$

Número promedio de contenedores en cola del Muelle 4:

$$L_{q4} = \frac{1}{s_4!} \left(\frac{\Lambda_4}{\mu_4}\right)^{s_4} \frac{\rho_4}{(1-\rho_4)^2} p_{04} = \frac{1}{3!} \times 2,177^3 \times \frac{0,7527}{0,2744^2} \times 0,0846 = 1,4543 \text{ contenedores}$$

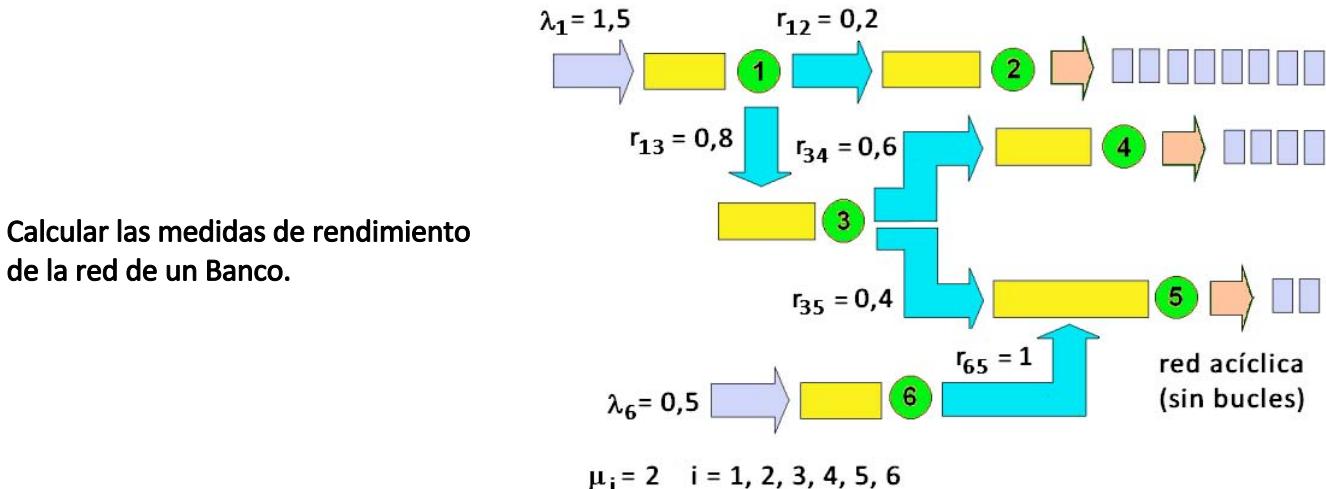
Número promedio de contenedores en el sistema del Muelle 4:

$$L_{s4} = L_{q4} + u_{s4} = 1,4543 + 2,177 = 3,6313 \text{ contenedores}$$

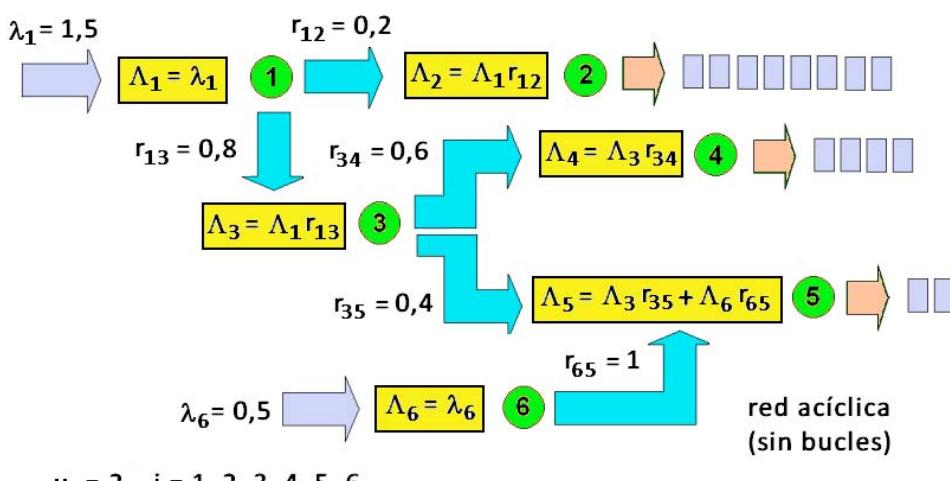
d) Tiempo promedio que pasa un contenedor en el Puerto:

$$L_{s\text{Puerto}} = \sum_{i=1}^4 L_{si} = 4,9434 + 2,3755 + 6,5077 + 3,6313 = 17,4579 \text{ contenedores}$$

$$W_{\text{Puerto}} = \frac{L_{\text{Puerto}}}{\Lambda_{\text{Puerto}}} = \frac{17,4579}{328,295} = 0,0532 \text{ horas} = 3,192 \text{ minutos}$$


RED DE COLAS JACKSON ABIERTA: BANCO

Solución:

Las ecuaciones de tráfico o equilibrio son intuitivas: $\Lambda_i = \lambda_i + \sum_{j=1}^5 \Lambda_j r_{ji}$



$$\begin{cases} \Lambda_1 = \lambda_1 = 1,5 \\ \Lambda_2 = \Lambda_1 r_{12} = 1,5 \cdot 0,2 = 0,3 \\ \Lambda_3 = \Lambda_1 r_{13} = 1,5 \cdot 0,8 = 1,2 \\ \Lambda_4 = \Lambda_3 r_{34} = 1,2 \cdot 0,6 = 0,72 \\ \Lambda_6 = \lambda_6 = 0,5 \\ \Lambda_5 = \Lambda_3 r_{35} + \Lambda_6 r_{65} = 1,2 \cdot 0,4 + 0,5 \cdot 1 = 0,98 \end{cases}$$

$$\Lambda_{\text{red}} = \sum_{i=1}^6 \Lambda_i = 5,2$$

$$\rho_1 = \frac{\Lambda_1}{\mu_1} = \frac{1,5}{2} = 0,75 \quad \rho_2 = \frac{\Lambda_2}{\mu_2} = \frac{0,3}{2} = 0,15 \quad \rho_3 = \frac{\Lambda_3}{\mu_3} = \frac{1,2}{2} = 0,6$$

Las medidas de rendimiento corresponden en cada nodo a las ecuaciones del modelo M/M/1.

Para que la red no se sature en cada nodo

$$(\text{subsistema}): \rho_i = \frac{\Lambda_i}{\mu_i} < 1$$



$$\rho_4 = \frac{\Lambda_4}{\mu_4} = \frac{0,72}{2} = 0,36 \quad \rho_5 = \frac{\Lambda_5}{\mu_5} = \frac{0,98}{2} = 0,49 \quad \rho_6 = \frac{\Lambda_6}{\mu_6} = \frac{0,5}{2} = 0,25$$

La red no se satura en ningún nodo, existe una distribución estacionaria.

MEDIDAS DE RENDIMIENTO

Número medio de clientes en el sistema (cola + servicio):

$$L_{s1} = \frac{\rho_1}{1-\rho_1} = \frac{0,75}{1-0,75} = 3 \quad L_{s2} = \frac{\rho_2}{1-\rho_2} = \frac{0,15}{1-0,15} = 0,1764$$

$$L_{s3} = \frac{\rho_3}{1-\rho_3} = \frac{0,6}{1-0,6} = 1,5 \quad L_{s4} = \frac{\rho_4}{1-\rho_4} = \frac{0,36}{1-0,36} = 0,5625$$

$$L_{s5} = \frac{\rho_5}{1-\rho_5} = \frac{0,49}{1-0,49} = 0,9607 \quad L_{s6} = \frac{\rho_6}{1-\rho_6} = \frac{0,25}{1-0,25} = 0,3333$$

Número medio de trabajos en la red: $L_{red} = \sum_{i=1}^6 L_{si} = 6,5329$

Tiempo medio de espera en cada nodo (subsistema):

$$W_{s1} = \frac{1}{\mu_1 - \Lambda_1} = \frac{1}{2-1,5} = 2 \quad W_{s2} = \frac{1}{\mu_2 - \Lambda_2} = \frac{1}{2-0,3} = 0,5882$$

$$W_{s3} = \frac{1}{\mu_3 - \Lambda_3} = \frac{1}{2-1,2} = 1,25 \quad W_{s4} = \frac{1}{\mu_4 - \Lambda_4} = \frac{1}{2-0,72} = 0,7812$$

$$W_{s5} = \frac{1}{\mu_5 - \Lambda_5} = \frac{1}{2-0,98} = 0,9803 \quad W_{s6} = \frac{1}{\mu_6 - \Lambda_6} = \frac{1}{2-0,5} = 0,6666$$

Tiempo medio de espera en la cola de cada nodo (subsistema):

$$W_{q1} = 2 - \frac{1}{2} = 1,5 \quad W_{q2} = 0,5882 - \frac{1}{2} = 0,0882 \quad W_{q3} = 1,25 - \frac{1}{2} = 0,75$$

$$W_{q4} = 0,7812 - \frac{1}{2} = 0,2812 \quad W_{q5} = 0,9803 - \frac{1}{2} = 0,4803 \quad W_{q6} = 0,6666 - \frac{1}{2} = 0,1666$$

Número medio de clientes que visitan un nodo:

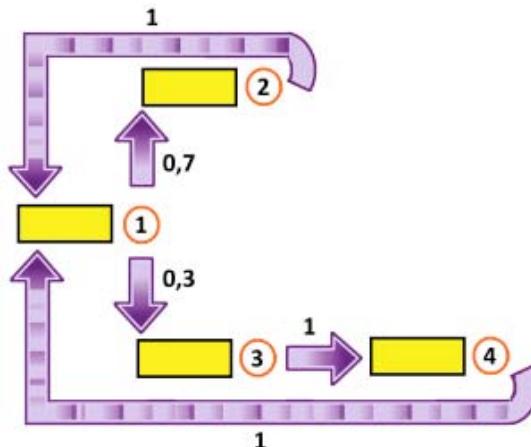
$$V_1 = \frac{\Lambda_1}{\Lambda_{red}} = \frac{1,5}{5,2} = 0,2884 \quad V_2 = \frac{\Lambda_2}{\Lambda_{red}} = \frac{0,3}{5,2} = 0,0576 \quad V_3 = \frac{\Lambda_3}{\Lambda_{red}} = \frac{1,2}{5,2} = 0,2307$$

$$V_4 = \frac{\Lambda_4}{\Lambda_{red}} = \frac{0,72}{5,2} = 0,1384 \quad V_5 = \frac{\Lambda_5}{\Lambda_{red}} = \frac{0,98}{5,2} = 0,1884 \quad V_6 = \frac{\Lambda_6}{\Lambda_{red}} = \frac{0,5}{5,2} = 0,0961$$



RED DE COLAS JACKSON CERRADA

En la red se tienen servidores con tasa individual de servicio $\mu_i = 5$. Econtrar el número medio de clientes y tiempo de espera em cada nodo.



Solución:

Las Ecuaciones de Equilibrio en un nodo se obtienen al ser el flujo total de entrada igual al flujo total de salida:

$$\Lambda_i = \sum_{j=1}^k \Lambda_j r_{ji} \quad \rho_i = \frac{\Lambda_i}{\mu_i} \rightarrow \Lambda_i = \rho_i \cdot \mu_i$$

En forma matricial:
$$\begin{pmatrix} \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \\ \vdots \\ \Lambda_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{21} & \cdots & r_{k1} \\ r_{12} & r_{22} & \cdots & r_{k2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{1k} & r_{2k} & \cdots & r_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \\ \vdots \\ \Lambda_k \end{pmatrix}$$

Las Ecuaciones de Equilibrio se pueden intuir:

$$\Lambda_1 = \Lambda_2 r_{21} + \Lambda_4 r_{41}$$

$$\Lambda_2 = \Lambda_1 r_{12}$$

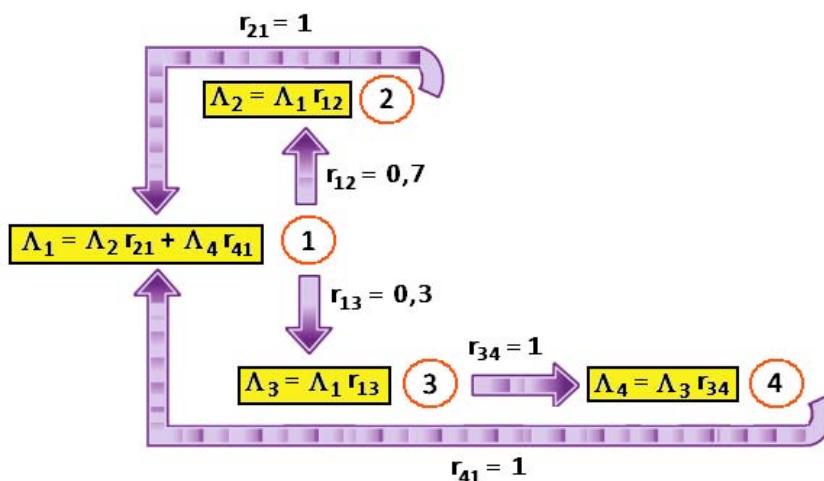
$$\Lambda_3 = \Lambda_1 r_{13}$$

$$\Lambda_4 = \Lambda_3 r_{34}$$

$$r_{12} = 0,7 \quad r_{13} = 0,3$$

$$r_{21} = 1 \quad r_{34} = 1$$

$$r_{41} = 1$$



Sistema compatible indeterminado, que se resuelve para calcular las tasas de llegada relativas a cada nodo Λ_i . Para la resolución se hace arbitrariamente $\Lambda_1 = 1$.

Tomando $\Lambda_1 = 1$:
$$\begin{cases} \Lambda_2 = \Lambda_1 r_{12} \\ \Lambda_3 = \Lambda_1 r_{13} \\ \Lambda_4 = \Lambda_3 r_{34} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \Lambda_2 = 0,7 \\ \Lambda_3 = 0,3 \\ \Lambda_4 = 0,3 \end{cases}$$



En una red cerrada al no haber entradas ni salidas de clientes, resulta indispensable conocer el número de clientes dentro de la red (N), que permanece constante en el tiempo.

Por este motivo, el número medio de clientes en la red $L_{red} = N$ y las cantidades del tiempo medio de espera en la red y en cada nodo carecen de sentido.

Tiempo de espera en el nodo: $W_i(m) = \frac{1 + L_i(m-1)}{\mu_i}$ $i = 1, 2, 3, 4$ nodos m clientes

Número medio de clientes en el nodo: $L_i(m) = \frac{m \sum_{i=1}^k \Lambda_i W_i(m)}{\sum_{i=1}^k \Lambda_i}$ $i = 1, 2, 3, 4$ nodos m clientes

Iterando:

- $m = 1$

$$L_i(1) = 0 \quad i = 1, 2, 3, 4 \text{ nodos} \quad W_i(1) = \frac{1+0}{5} = 0,2 \quad i = 1, 2, 3, 4 \text{ nodos}$$

$$L_1(1) = \frac{\Lambda_1 W_1(1)}{\sum_{i=1}^4 \Lambda_i W_i(1)} = \frac{1 \cdot 0,2}{0,2 + 0,7 \cdot 0,2 + 0,3 \cdot 0,2 + 0,3 \cdot 0,2} = \frac{0,2}{0,2 \cdot 2,3} = 0,4348$$

$$L_2(1) = \frac{\Lambda_2 W_2(1)}{\sum_{i=1}^4 \Lambda_i W_i(1)} = \frac{0,7 \cdot 0,2}{0,2 + 0,7 \cdot 0,2 + 0,3 \cdot 0,2 + 0,3 \cdot 0,2} = \frac{0,7 \cdot 0,2}{0,2 \cdot 2,3} = 0,3043$$

$$L_3(1) = \frac{\Lambda_3 W_3(1)}{\sum_{i=1}^4 \Lambda_i W_i(1)} = \frac{0,3 \cdot 0,2}{0,2 + 0,7 \cdot 0,2 + 0,3 \cdot 0,2 + 0,3 \cdot 0,2} = \frac{0,3 \cdot 0,2}{0,2 \cdot 2,3} = 0,1304$$

$$L_4(1) = \frac{\Lambda_4 W_4(1)}{\sum_{i=1}^4 \Lambda_i W_i(1)} = \frac{0,3 \cdot 0,2}{0,2 + 0,7 \cdot 0,2 + 0,3 \cdot 0,2 + 0,3 \cdot 0,2} = \frac{0,3 \cdot 0,2}{0,2 \cdot 2,3} = 0,1304$$

- $m = 2$

$$W_1(2) = \frac{1 + L_1(1)}{5} = \frac{1,4348}{5} = 0,2870 \quad W_2(2) = \frac{1 + L_2(1)}{5} = \frac{1,3043}{5} = 0,2609$$

$$W_3(2) = \frac{1 + L_3(1)}{5} = \frac{1,1304}{5} = 0,2261 \quad W_4(2) = \frac{1 + L_4(1)}{5} = \frac{1,1304}{5} = 0,2261$$

$$L_1(2) = \frac{2 \Lambda_1 W_1(2)}{\sum_{i=1}^4 \Lambda_i W_i(2)} = \frac{2 \cdot 0,2870}{0,2870 + 0,7 \cdot 0,2609 + 0,3 \cdot 0,2261 + 0,3 \cdot 0,2261} = \frac{0,574}{0,6053} = 0,9483$$



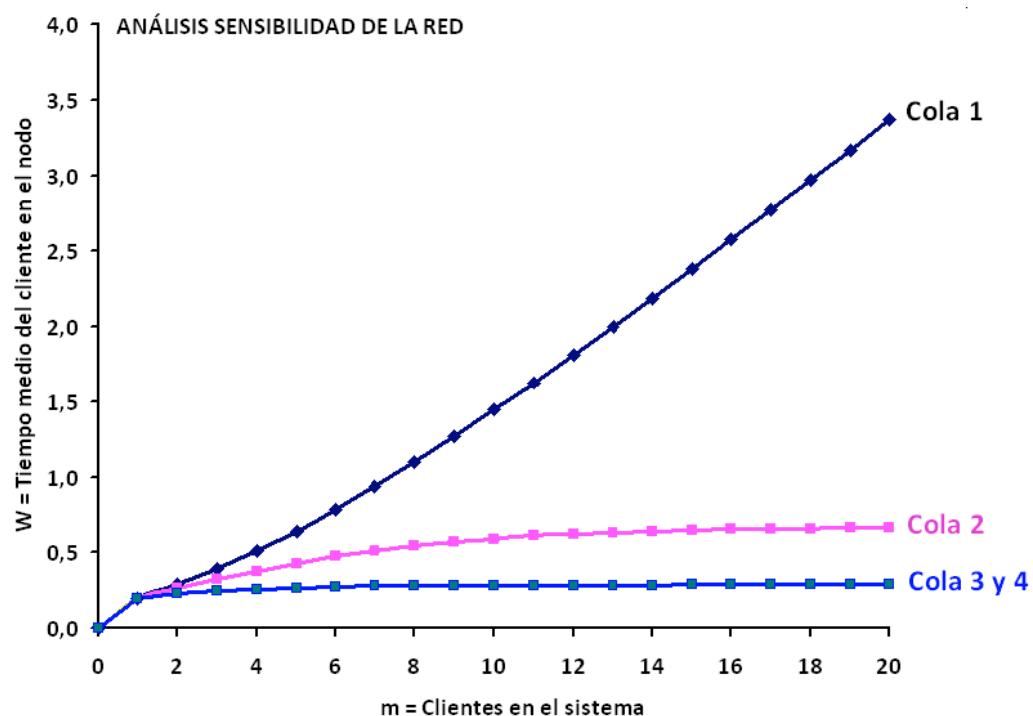
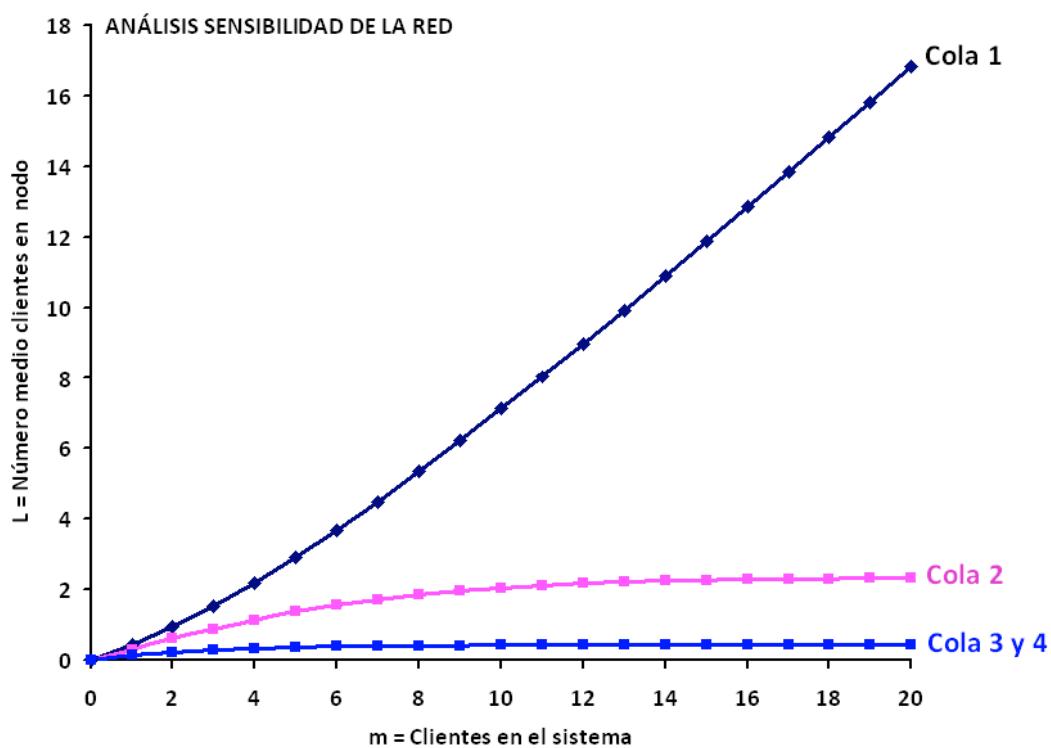
$$L_2(2) = \frac{2 \Lambda_2 W_2(2)}{\sum_{i=1}^4 \Lambda_i W_i(2)} = \frac{2 \cdot 0,7 \cdot 0,2609}{0,2870 + 0,7 \cdot 0,2609 + 0,3 \cdot 0,2261 + 0,3 \cdot 0,2261} = \frac{0,3653}{0,6053} = 0,6034$$

$$L_3(2) = \frac{2 \Lambda_3 W_3(2)}{\sum_{i=1}^4 \Lambda_i W_i(2)} = \frac{2 \cdot 0,3 \cdot 0,2261}{0,2870 + 0,7 \cdot 0,2609 + 0,3 \cdot 0,2261 + 0,3 \cdot 0,2261} = \frac{0,1357}{0,6053} = 0,2241$$

$$L_4(2) = \frac{2 \Lambda_4 W_4(2)}{\sum_{i=1}^4 \Lambda_i W_i(2)} = \frac{2 \cdot 0,3 \cdot 0,2261}{0,2870 + 0,7 \cdot 0,2609 + 0,3 \cdot 0,2261 + 0,3 \cdot 0,2261} = \frac{0,1357}{0,6053} = 0,2241$$

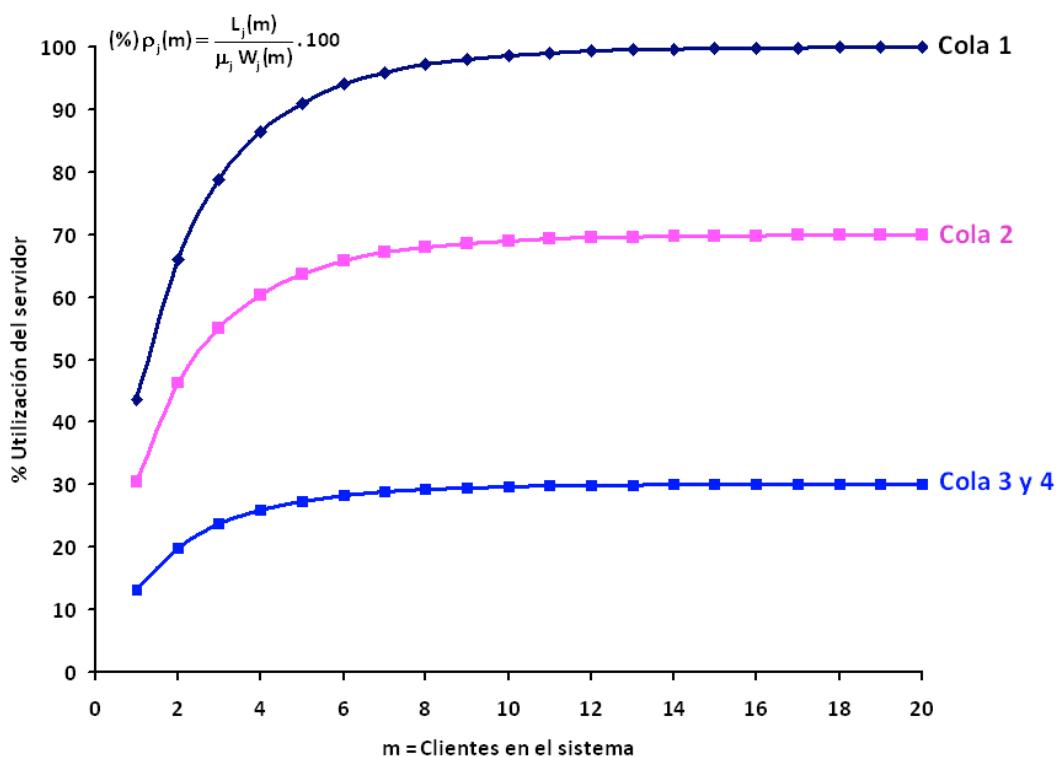
Continúan las iteraciones, con una hoja de cálculo como Excel se obtiene:

m	Tiempo medio espera en nodo				Número medio de clientes en nodo			
	W ₁ (m)	W ₂ (m)	W ₃ (m)	W ₄ (m)	L ₁ (m)	L ₂ (m)	L ₃ (m)	L ₄ (m)
0	0	0	0	0
1	0,2	0,2	0,2	0,2	0,4368	0,3043	0,1304	0,1304
2	0,2870	0,2609	0,2261	0,2261	0,9483	0,6034	0,2241	0,2241
3	0,3897	0,3207	0,2448	0,2448	1,5360	0,8849	0,2895	0,2895
4	0,5072	0,3770	0,2579	0,2579	2,1913	1,1401	0,3343	0,3343
5	0,6383	0,4280	0,2669	0,2669	2,9065	1,3644	0,3646	0,3646
6	0,7813	0,4729	0,2729	0,2729	3,6737	1,5564	0,3850	0,3850
7	0,9347	0,5113	0,2770	0,2770	4,4852	1,7173	0,3987	0,3987
8	1,0970	0,5435	0,2797	0,2797	5,3341	1,8497	0,4081	0,4081
9	1,2668	0,5699	0,2816	0,2816	6,2141	1,9570	0,4144	0,4144
10	1,4428	0,5914	0,2829	0,2829	7,1197	2,0428	0,4188	0,4188
11	1,6239	0,6086	0,2838	0,2838	8,0459	2,1106	0,4218	0,4218
12	1,8092	0,6221	0,2844	0,2844	8,9887	2,1637	0,4228	0,4228
13	1,9977	0,6237	0,2848	0,2848	9,9447	2,2048	0,4253	0,4253
14	2,1889	0,6410	0,2851	0,2851	10,9110	2,2365	0,4263	0,4263
15	2,3822	0,6473	0,2853	0,2853	11,8854	2,2607	0,4270	0,4270
16	2,5771	0,6521	0,2854	0,2854	12,8661	2,2790	0,4274	0,4274
17	2,7732	0,6558	0,2855	0,2855	13,8515	2,2929	0,4278	0,4278
18	2,9703	0,6586	0,2856	0,2856	14,8406	2,3033	0,4280	0,4280
19	3,1681	0,6607	0,2856	0,2856	15,8325	2,3112	0,4282	0,4282
20	3,3665	0,6622	0,2856	0,2856	16,8264	2,3170	0,4283	0,4283





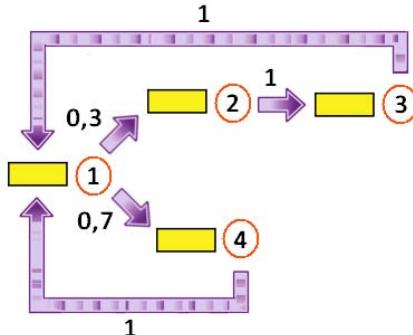
ANÁLISIS SENSIBILIDAD DE LA RED





RED DE COLAS JACKSON CERRADA

En la red se tienen servidores con tasa individual de servicio $\mu_i = 5$. Encontrar el número medio de clientes y tiempo de espera en cada nodo.



Solución:

Un nodo es un cuello de botella cuya capacidad de procesamiento determina el rendimiento del sistema.

Las Ecuaciones de Equilibrio en un nodo se obtienen al considerar que el flujo total de entrada es igual que el flujo total de salida:

$$\Lambda_i = \sum_{j=1}^k \Lambda_j r_{ji} \quad \rho_i = \frac{\Lambda_i}{\mu_i} \rightarrow \Lambda_i = \rho_i \cdot \mu_i$$

En forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \\ \vdots \\ \Lambda_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{21} & \cdots & r_{k1} \\ r_{12} & r_{22} & \cdots & r_{k2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{1k} & r_{2k} & \cdots & r_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \\ \vdots \\ \Lambda_k \end{pmatrix}$$

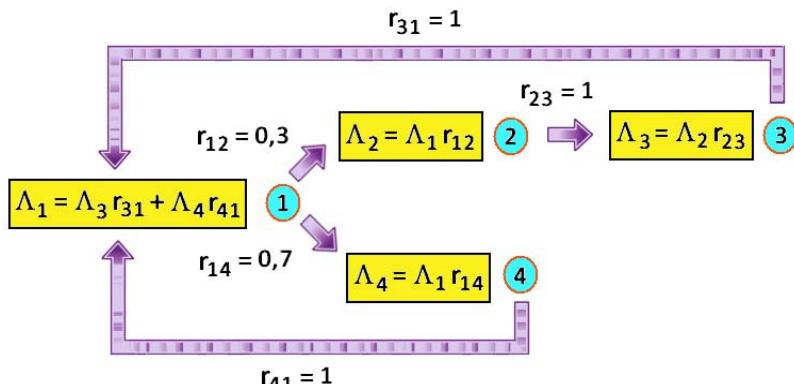
Las Ecuaciones de Equilibrio se pueden intuir:

$$\Lambda_1 = \Lambda_3 + \Lambda_4$$

$$\Lambda_2 = 0,3 \Lambda_3$$

$$\Lambda_3 = \Lambda_2$$

$$\Lambda_4 = 0,7 \Lambda_1$$



Sistema compatible indeterminado, dando el valor $\Lambda_1 = 1$, resulta:

$$\Lambda_1 = 1 \quad \Lambda_2 = 0,3 \quad \Lambda_3 = 0,3 \quad \Lambda_4 = 0,7$$

El nodo 1 trabaja al límite al tener una capacidad del 100%, para mejorar el rendimiento global del sistema habría que aumentar la capacidad del procesamiento del nodo.

En una red de Jackson cerrada el nodo i es un cuello de botella cuando $\lim_{m \rightarrow \infty} L_i(m) \rightarrow \infty$

Tiempo de espera en el nodo: $W_i(m) = \frac{1 + L_i(m-1)}{\mu_i} \quad i = 1, 2, 3, 4 \text{ nodos} \quad m \text{ clientes}$



Número medio de clientes en el nodo: $L_i(m) = \frac{\sum_{i=1}^k \Lambda_i W_i(m)}{\sum_{i=1}^k \Lambda_i}$ $i = 1, 2, 3, 4$ nodos m clientes

Iterando:

- $m = 1$

$$L_i(1) = 0 \quad i = 1, 2, 3, 4 \text{ nodos} \quad W_i(1) = \frac{1+0}{5} = 0,2 \quad i = 1, 2, 3, 4 \text{ nodos}$$

$$L_1(1) = \frac{\Lambda_1 W_1(1)}{\sum_{i=1}^4 \Lambda_i W_i(1)} = \frac{1 \cdot 0,2}{0,2 + 0,3 \cdot 0,2 + 0,3 \cdot 0,2 + 0,7 \cdot 0,2} = \frac{0,2}{0,2 \cdot 2,3} = 0,4348$$

$$L_2(1) = \frac{\Lambda_2 W_2(1)}{\sum_{i=1}^4 \Lambda_i W_i(1)} = \frac{0,3 \cdot 0,2}{0,2 + 0,3 \cdot 0,2 + 0,3 \cdot 0,2 + 0,7 \cdot 0,2} = \frac{0,3 \cdot 0,2}{0,2 \cdot 2,3} = 0,1304$$

$$L_3(1) = \frac{\Lambda_3 W_3(1)}{\sum_{i=1}^4 \Lambda_i W_i(1)} = \frac{0,3 \cdot 0,2}{0,2 + 0,3 \cdot 0,2 + 0,3 \cdot 0,2 + 0,7 \cdot 0,2} = \frac{0,3 \cdot 0,2}{0,2 \cdot 2,3} = 0,1304$$

$$L_4(1) = \frac{\Lambda_4 W_4(1)}{\sum_{i=1}^4 \Lambda_i W_i(1)} = \frac{0,7 \cdot 0,2}{0,2 + 0,3 \cdot 0,2 + 0,3 \cdot 0,2 + 0,7 \cdot 0,2} = \frac{0,7 \cdot 0,2}{0,2 \cdot 2,3} = 0,3043$$

- $m = 2$

$$W_1(2) = \frac{1+L_1(1)}{5} = \frac{1,4348}{5} = 0,2870 \quad W_2(2) = \frac{1+L_2(1)}{5} = \frac{1,1304}{5} = 0,2261$$

$$W_3(2) = \frac{1+L_3(1)}{5} = \frac{1,1304}{5} = 0,2261 \quad W_4(2) = \frac{1+L_4(1)}{5} = \frac{1,3043}{5} = 0,2609$$

$$L_1(2) = \frac{2 \Lambda_1 W_1(2)}{\sum_{i=1}^4 \Lambda_i W_i(2)} = \frac{2 \cdot 0,2870}{0,2870 + 0,3 \cdot 0,2261 + 0,3 \cdot 0,2261 + 0,7 \cdot 0,2609} = \frac{0,5740}{0,6053} = 0,9483$$

$$L_2(2) = \frac{2 \Lambda_2 W_2(2)}{\sum_{i=1}^4 \Lambda_i W_i(2)} = \frac{2 \cdot 0,3 \cdot 0,2261}{0,2870 + 0,3 \cdot 0,2261 + 0,3 \cdot 0,2261 + 0,7 \cdot 0,2609} = \frac{0,1357}{0,6053} = 0,2241$$

$$L_3(2) = \frac{2 \Lambda_3 W_3(2)}{\sum_{i=1}^4 \Lambda_i W_i(2)} = \frac{2 \cdot 0,3 \cdot 0,2261}{0,2870 + 0,3 \cdot 0,2261 + 0,3 \cdot 0,2261 + 0,7 \cdot 0,2609} = \frac{0,1357}{0,6053} = 0,2241$$



$$L_4(2) = \frac{2 \Lambda_4 W_4(2)}{\sum_{i=1}^4 \Lambda_i W_i(2)} = \frac{2 \cdot 0,7 \cdot 0,2609}{0,2870 + 0,3 \cdot 0,2261 + 0,3 \cdot 0,2261 + 0,7 \cdot 0,2609} = \frac{0,3653}{0,6053} = 0,6034$$

- $m = 3$

$$W_1(3) = \frac{1 + L_1(2)}{5} = \frac{1,9483}{5} = 0,3897 \quad W_2(2) = \frac{1 + L_2(2)}{5} = \frac{1,2241}{5} = 0,2448$$

$$W_3(3) = \frac{1 + L_3(2)}{5} = \frac{1,2241}{5} = 0,2448 \quad W_4(3) = \frac{1 + L_4(3)}{5} = \frac{1,6034}{5} = 0,3207$$

$$L_1(3) = \frac{3 \Lambda_1 W_1(3)}{\sum_{i=1}^4 \Lambda_i W_i(3)} = \frac{3 \cdot 0,3897}{0,3897 + 0,3 \cdot 0,2448 + 0,3 \cdot 0,2448 + 0,7 \cdot 0,3207} = \frac{1,1691}{0,7611} = 1,5360$$

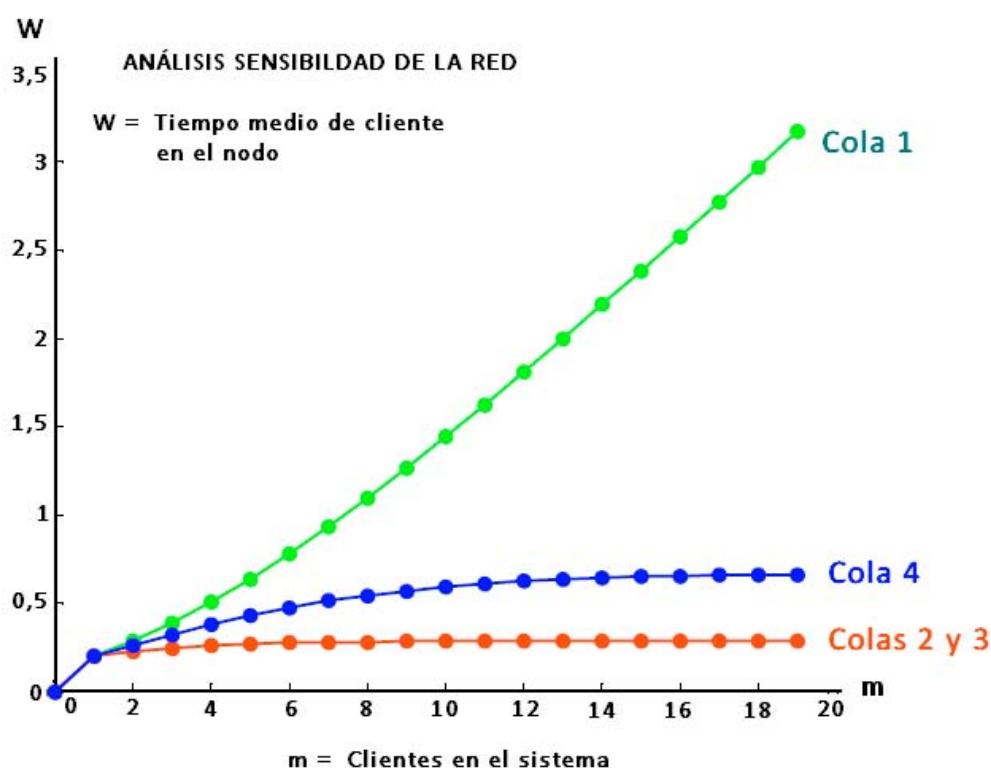
$$L_2(3) = \frac{3 \Lambda_2 W_2(3)}{\sum_{i=1}^4 \Lambda_i W_i(3)} = \frac{3 \cdot 0,3 \cdot 0,2448}{0,3897 + 0,3 \cdot 0,2448 + 0,3 \cdot 0,2448 + 0,7 \cdot 0,3207} = \frac{0,2203}{0,7611} = 0,2895$$

$$L_3(3) = \frac{3 \Lambda_3 W_3(3)}{\sum_{i=1}^4 \Lambda_i W_i(3)} = \frac{3 \cdot 0,3 \cdot 0,2448}{0,3897 + 0,3 \cdot 0,2448 + 0,3 \cdot 0,2448 + 0,7 \cdot 0,3207} = \frac{0,2203}{0,7611} = 0,2895$$

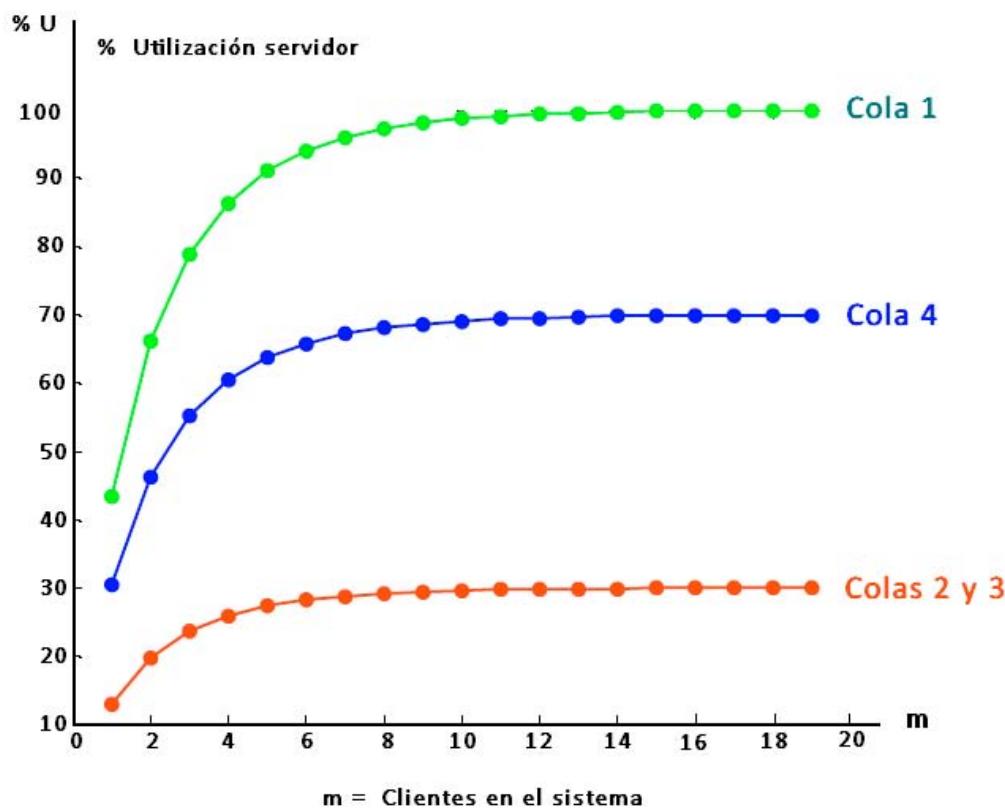
$$L_4(3) = \frac{3 \Lambda_4 W_4(3)}{\sum_{i=1}^4 \Lambda_i W_i(3)} = \frac{3 \cdot 0,7 \cdot 0,3207}{0,3897 + 0,3 \cdot 0,2448 + 0,3 \cdot 0,2448 + 0,7 \cdot 0,3207} = \frac{0,6735}{0,7611} = 0,8849$$

Continúan las iteraciones, con una hoja de cálculo como Excel se obtiene:

m	Tiempo medio espera en nodo				Número medio de clientes en nodo			
	W ₁ (m)	W ₂ (m)	W ₃ (m)	W ₄ (m)	L ₁ (m)	L ₂ (m)	L ₃ (m)	L ₄ (m)
0	0	0	0	0
1	0,2	0,2	0,2	0,2	0,4368	0,1304	0,1304	0,3043
2	0,2870	0,2261	0,2261	0,2609	0,9483	0,2241	0,2241	0,6034
3	0,3897	0,2448	0,2448	0,3207	1,5360	0,2895	0,2895	0,8849
4	0,5072	0,2579	0,2579	0,3770	2,1913	0,3343	0,3343	1,1401
5	0,6383	0,2669	0,2669	0,4280	2,9065	0,3646	0,3646	1,3644
6	0,7813	0,2729	0,2729	0,4729	3,6737	0,3850	0,3850	1,5564
7	0,9347	0,2770	0,2770	0,5113	4,4852	0,3987	0,3987	1,7173



$$\rho_i(m) \equiv \text{Utilización del servidor en el nodo } i - \text{ésimo: } \rho_i(m) = \frac{\Lambda_i(m)}{\mu_i} = \frac{L_i(m)}{\mu_i W_i(m)}$$







ARENA: SIMULACIÓN DE SISTEMAS DE COLAS

Simulación 1 SIMULACIÓN EN UN BANCO: Un banco posee dos cajeros (1 y 2) que atienden a un cliente en un promedio de 15 minutos con una desviación de 0,01.

La tasa de llegada de clientes es de 1 cada 10 minutos, y hacen una sola cola cuya capacidad es de máximo 15 clientes. Se considera que la llegada de los clientes se comporta de forma similar a una distribución Poisson y los cajeros con una distribución normal.

Simular con 100 minutos el tiempo del modelo descrito.

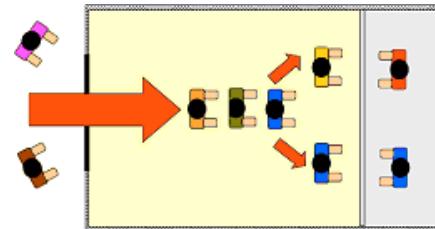
Solución:

Tasa de llegada: $\lambda = 0,1$ cliente/minuto en cada cajero

Tasa de servicio: $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{15} = 0,06667$ cliente/minuto cajero

$\sigma = 0,01$

Capacidad = 15 personas/fila



Se observan tres actores principales:

- Dos cajeros, los cuales serán considerados como servidores.
- Los clientes, representados por una tasa de llegada.
- La cola o línea de espera, a donde los clientes llegan para ser atendidos.

Se considera que el Banco utiliza un sistema de espera tipo PEPS (FIFO – First In First Out), es decir, los primeros clientes que entran serán los primeros en ser atendidos.

WinQSB/ Queuing System Simulation

QSS es un simulador de WinQSB que permite imitar un sistema de colas con múltiples servidores, diversos tipos de clientes y varias colas. Cada tipo de clientes puede tener distintos tipos de llegadas y tiempos de servicio que habrá que especificar.

Cuando un cliente sale de un servidor, éste pasa a la siguiente cola o servidor o acaba el servicio. Si la cola está llena, el cliente se queda en el servidor que está hasta que haya espacio. Si el cliente se va a unir a otra cola, se le puede asignar un tiempo fijo de llegada a esa cola (tiempo de transferencia).

QSS siempre supone que la población es infinita, por tanto, no permite simular situaciones donde la población es finita.

Al abrir un nuevo problema, aparece una pantalla donde hay que dar el número total de Componentes del sistema de colas (nº de tipos de clientes + nº de colas + nº de servidores) y la unidad de tiempo en la que se va a trabajar.

Al ejecutar Qss.exe se accede al procedimiento de simulación de sistemas de colas. En la barra de menú aparece la opción File donde se puede abrir un problema nuevo o cargar los datos de uno que se tenga definido con anterioridad.



Se introducen los datos en un formato de matriz (Spreadsheet).

Problem Specification

To define a queuing system, four system components are considered: customer arriving populations such as different type of materials or different age groups, servers such as machines or clerks, queues for buffer storages or waiting lines, or garbage collectors for defectives.

Problem Title:	BANCO	
Number of System Components:	4	
Time Unit:	minuto	
Data Entry Format		
<input checked="" type="radio"/> Spreadsheet <input type="radio"/> Graphic Model		
OK	Cancel	Help

Component Names and Types for BANCO

Number	Component Name	Type (C/S/Q/G)
1	Cajero 1	S
2	Cajero 2	S
3	Clientes	C
4	Cola	Q

OK Cancel Help

Para realizar una simulación se cuenta con cuatro actores dentro del sistema:

- Tasa de llegada de clientes (C)
- Servidores (S)
- Colas (Q)
- Colectores de basura (G): Indica la posibilidad que el cliente abandone el proceso sin terminarlo. Puede ser considerado como un defecto en el sistema.

Las colas son las mismas líneas de espera, en colas se especifica el número de servidores en el sistema y los colectores de basura indican la posibilidad de que un cliente se retire del proceso antes de terminarlo.

Para este ejercicio, se tienen 4 componentes en el sistema: Dos cajeros, una cola y clientes.

Aparece una matriz donde hay que introducir los datos del sistema de colas, por columnas.

Queuing System Simulation

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

Toolbar icons: File, Edit, Format, Solve and Analyze, Results, Utilities, Window, WinQSB, Help, etc.

BANCO

Component Name	Type (C/S/Q/G)	Immediate Follower (Name / Prob / TransferTime, separated by ',')	Input Rule	Output Rule	Queue Discipline	Queue Capacity	Attribute Value	Interarrival Time Distribution	Batch Size Distribution	Service Time Distribution
Cajero 1	S									
Cajero 2	S									
Clientes	C									
Cola	Q									

1^a columna: Tipo de componente, que ya se ha rellenado en la pantalla anterior.

2^a columna (**Inmmediate follower**), con formato completo Inmmediate follower/Prob/transfer time. Lo primero que hay que indicar para cada componente del sistema es el siguiente componente al que éste se encuentra conectado.

Prob se utiliza sólo cuando los componentes del sistema están conectados con cierta probabilidad. Si no es así, dejar en blanco (//). El tiempo de transferencia es el tiempo que se tarda en llegar de un componente al siguiente. Si éste se considera despreciable, no se indica.

3^a - 4^a columnas (**Input rule - Ouput rule**): Solo hay que rellenarlas en caso de que se puede acceder a un servidor desde varios componentes (**Input**) o la salida de un servidor se puede dirigir a varios componentes (**Ouput**). Como reglas de selección para una situación dada, QSS utiliza las siguientes:



1. Random: Elección aleatoria (es la establecida por defecto)
2. Probability: Se elige basado en una regla de probabilidad
3. RoundRobin: Se elige en orden round robin
4. Assembly: El servidor elige un individuo de cada cola a la vez. Hay que esperar a que todas las colas tengan al menos un cliente.
5. DisAssembly: Cuando un servidor acaba el servicio, manda un cliente a cada una de las colas
6. LongestQueue: Se elige la cola más larga
7. ShortestQueue: Se elige la cola más corta
8. MaxQueueCapacity: Se elige la cola con mayor capacidad
9. MinQueueCapacity: Se elige la cola con menor capacidad

Se pueden escribir solo las tres primeras letras.

5^a columna (**Queue discipline**): Solo se rellena para las componentes tipo cola indicando con qué regla los clientes de una cola van a pasar al servidor. Las reglas que están implementadas en QSS son:

1. FIFO: Se sirve primero al que llegó primero a la cola
2. LIFO: Se sirve primero al último que llegó a la cola
3. Random: Se sirve de manera aleatoria
4. PriorityIndex: Se sirve primero a los clientes en cola que tengan un índice de prioridad mayor.
5. SPT: Se sirve primero a los clientes que necesiten menor tiempo de procesamiento.
6. LPT: Se sirve primero a los clientes que necesiten un mayor tiempo de procesamiento.
7. MaxWorkDone: Se sirve primero al que mayor tiempo de procesamiento total lleva.
8. MinWorkDone: Se sirve primero al que menor tiempo de procesamiento total lleva.

Se pueden escribir solo las tres primeras letras. La opción por defecto es FIFO, en cuyo caso no hace falta rellenarlo.

6^a columna (**Queue capacity**): QSS reserva, por defecto, un espacio de 50 clientes para el tamaño de las colas, pero es imprescindible introducir un número en la capacidad de cualquier cola.

7^a columna (**Attribute value**): Solamente se rellena en las colas cuya disciplina sea Priority Index: se sirve primero al que mayor índice de prioridad tenga.

8^a columna (**Interarrival Time distribution**): Distribución del tiempo entre llegadas consecutivas de los clientes al sistema. Habitualmente son:

Exp/a/b: Exponencial de media b, tomando valores para $x > a$. Normalmente, $a = 0$

Erlang/a/b/k: Erlang con k entero, kb = media , tomando valores para $x > a$. Normalmente, $a = 0$

Normal/ μ/σ : Normal con $\mu = \text{media}$ y $\sigma = \text{desviación típica}$.



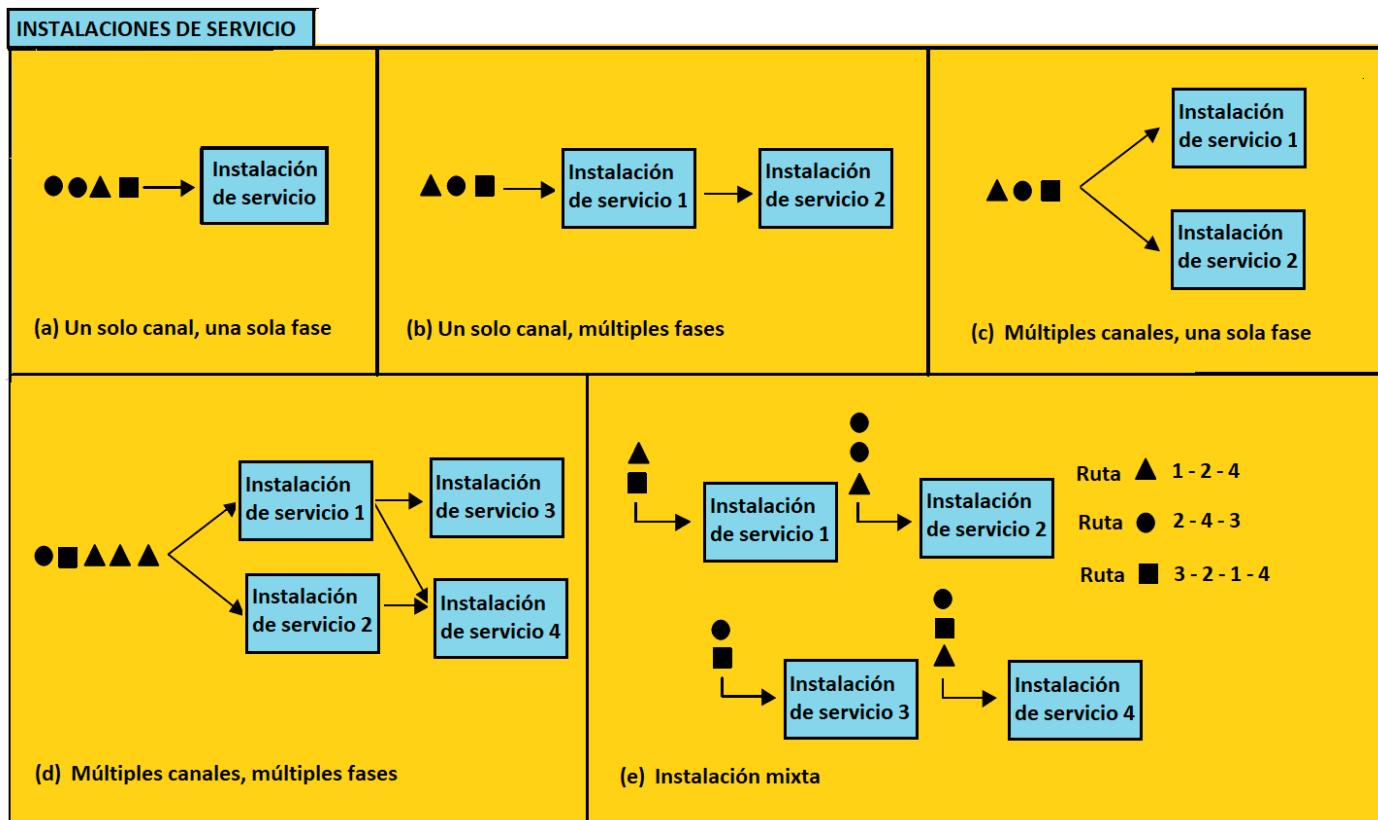
Constante: No hace falta poner Constante, solo el valor de la constante.

Información sobre posibles distribuciones en QSS: [Help/About QSS/Probability distributions](#)

9^a columna (**Batch size distribution**): Los clientes llegan al sistema solos o en grupo. Si la llegada es en grupo, el tamaño del grupo se considera una variable aleatoria discreta y hay que dar la distribución. Consultar la ayuda para ver que distribuciones discretas admite QSS y cómo se introducen.

10^a columna (**Service time distribution**): Para cada servidor hay que dar la distribución del tiempo de servicio. Puede ocurrir que un servidor tenga tiempos de servicio diferentes para clientes de distinto tipo. Entonces, se indicará la distribución del tiempo de servicio para cada cliente, separada por comas: Cliente A/exp/0/0.3, Cliente B/normal/1/5

DISTRIBUCIÓN DE TIEMPOS DE SERVICIO: La primera corresponde a la conexión con los clientes, la segunda a la distribución de probabilidad de los servidores y los siguientes datos (parámetros) son utilizados de acuerdo a la información requerida por la distribución (por ejemplo, la distribución Normal requiere de dos parámetros: media y desviación típica).



Las instalaciones de servicio están formadas por el personal y el equipo necesario para realizar el servicio requerido por el cliente. Considerando el número de clientes y la naturaleza de los servicios a realizar se debe ajustar un arreglo, algunos de los servicios requieren de un solo paso (fase), mientras que otros requieren de una secuencia de pasos.

Las distribuciones disponibles son:



- Beta (Beta)
- Binomial (Binomial)
- Constante (Constant)
- Discreta (Discrete)
- Erlang (Erlang)
- Exponencial (Exponential)
- Gamma (Gamma)
- Hypergeométrica (Hypergeometric)
- Laplace (Laplace)
- Normal (Normal)
- Pareto (Pareto)
- Poisson (Poisson)
- Función de poder (Power Function)
- Triangular (Triangular)
- Uniforme (Uniform)
- Weibull (Weibull)

Se comienza introduciendo los datos para los Cajeros, denotando que los Cajeros dependen de los Clientes:
Nombre predecesor/Distribución/Parámetro 1/Parámetro 2/Parámetro 3

CAJERO 1: Clientes/Normal/0.06667/0.01

CAJERO 2: Clientes/Normal/0.06667/0.01

A continuación, se completan los parámetros para los clientes. Primero se indica la dependencia de una de las colas en la columna Sucesor inmediato (**Immediate Follower**).

Posteriormente, en la columna Distribución del tiempo entre llegada (**Interarrival Time Distribution**) con el siguiente formato: **Distribución/Parámetro 1/Parámetro 2/Parámetro 3**

☒ En este caso, la distribución quedaría: Poisson/0.1

Los parámetros 2 y 3 no son requeridos para esta distribución

Queuing System Simulation										
File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help										
										
BANCO										
Component Name	Type (C/S/Q/G)	Immediate Follower (Name / Prob / TransferTime, separated by ':')	Input Rule	Output Rule	Queue Discipline	Queue Capacity	Attribute Value	Interarrival Time Distribution	Batch Size Distribution	Service Time Distribution
Cajero 1	S									Cajeros/Normal/ 0.06667/0.01
Cajero 2	S									Cajeros/Normal/ 0.06667/0.01
Clientes	C	Cola						Poisson/0.1		
Cola	Q									

La columna Distribución de los tamaños de los lotes (**Batch Size Distribution**), indica si los clientes llegan de forma agrupada o individual. En este caso, la columna se rellena con **Constant/1**, indicando que los Clientes llegan al Banco de uno a uno.

Para programar la Cola, hay que indicar que los dos Cajeros se alimentarán de ella colocando los nombres en las casillas correspondientes a la columna Sucesor inmediato (**Immediate Follower**).

En Disciplina de la cola (**Queue Discipline**) se marca FIFO y en Capacidad de la Cola (**Queue Capacity**) su capacidad (máximo 15 personas en espera).

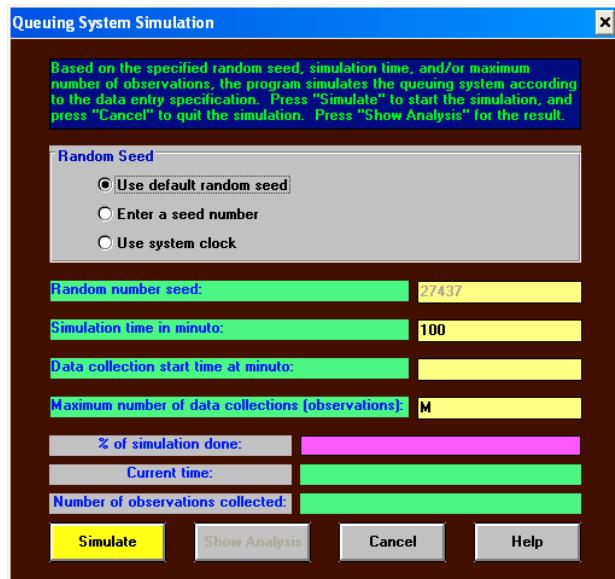


Queuing System Simulation

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

0.00 A

Component Name	Type (C/S/Q/G)	Immediate Follower (Name / Prob / TransferTime, separated by ',')	Input Rule	Output Rule	Queue Discipline	Queue Capacity	Attribute Value	Interarrival Time Distribution	Batch Size Distribution	Service Time Distribution
Cajero 1	S									Cliente/Normal/0.06667/0.1
Cajero 2	S									Cliente/Normal/0.06667/0.1
Cliente	C	Cola						Poisson/0.1	Constant/1	
Cola	Q	Cajero 1 , Cajero 2			FIFO	15				



En los 100 minutos llegaron 1139 clientes (Total Number of Arrival).

El tiempo de espera promedio (Average Waiting Time) es de 0.1878

Número máximo de clientes en el sistema (Maximum Number in the System) es de 17 (15 es espera y 2 siendo atendidos).

Número promedio de clientes en el sistema (Average Number in the System) es de 2,4213

El tipo de semilla que utiliza por defecto es de 27437.

Se pulsa: [Simulate / Show Analysis](#)

Customer Analysis for BANCO

	Result	Cliente
1	Total Number of Arrival	1139
2	Total Number of Balking	204
3	Average Number in the System (L)	2,4213
4	Maximum Number in the System	17
5	Current Number in the System	1
6	Number Finished	941
7	Average Process Time	0,0695
8	Std. Dev. of Process Time	0,0984
9	Average Waiting Time (Wq)	0,1878
10	Std. Dev. of Waiting Time	0,1904
11	Average Transfer Time	0
12	Std. Dev. of Transfer Time	0
13	Average Flow Time (W)	0,2573
14	Std. Dev. of Flow Time	0,2110
15	Maximum Flow Time	1,2615
	Data Collection: 0 to 100 minutos	
	CPU Seconds = 2,8430	



La opción **Results>Show Server Analysis** facilita información de los Cajeros

	Server Name	Server Utilization	Average Process Time	Std. Dev. Process Time	Maximum Process Time	Blocked Percentage	# Customers Processed
1	Cajero 1	33,64%	0,0727	0,0961	0,3287	0,00%	463
2	Cajero 2	31,76%	0,0664	0,1005	0,4225	0,00%	478
	Overall	32,70%	0,0695	0,0984	0,4225	0,00%	941
Data	Collection:	0 to 100 minutos		CPU	Seconds =	2,8430	

Los cajeros tuvieron un promedio de utilización (Server Utilization) del 32,70%.

El Cajero 1 atendió 463 Clientes y el Cajero 2 a 478 Clientes, siendo un total (Customer Processed) de 941 Clientes atendidos.

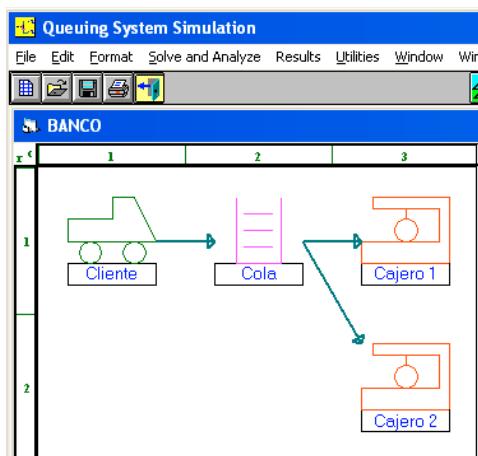
La opción **Results>Show Queue Analysis** facilita información sobre la Cola

	Queue Name	Average Q. Length (Lq)	Current Q. Length	Maximum Q. Length	Average Waiting (Wq)	Std. Dev. of Wq	Maximum of Wq
1	Cola	1,7673	0	15	0,1880	0,1904	0,9859
Data	Collection:	0 to 100 minutos		CPU	Seconds =	2,8430	

El promedio de Clientes en la Cola (Average Q. Length) es de 1,7673

El máximo de Clientes en la Cola (Maximum Q. Length) es de 15

Simulación en Modo Gráfico: **Format/Switch Graphic Model**



Para intercambiar los Modos: **Format/Switch to Matrix Form**


**Simulación
2**

Simulación en 200 horas el modelo descrito.

P502

Component Name	Type (C/S/Q/G)	Immediate Follower (Name / Prob / TransferTime, separated by ',')	Input Rule	Output Rule	Queue Discipline	Queue Capacity	Attribute Value	Interarrival Time Distribution	Batch Size Distribution	Service Time Distribution
Fuente	S									Exp//1.7
Nava	S									Exp//2
Customer	C	Queue						Exp/0/1.2	Constant/1	
Queue	Q	Fuente,Nava			FIFO	100				

Queuing System Simulation

Based on the specified random seed, simulation time, and/or maximum number of observations, the program simulates the queuing system according to the data entry specification. Press "Simulate" to start the simulation, and press "Cancel" to quit the simulation. Press "Show Analysis" for the result.

Random Seed:

- Use default random seed
- Enter a seed number
- Use system clock

Random number seed: 27437

Simulation time in hour: 200

Data collection start time at hour:

Maximum number of data collections (observations): M

% of simulation done:

Current time: 200.8046 hours

Number of observations collected: 158

Buttons: Simulate, Show Analysis, Cancel, Help

Customer Analysis for P502

	Result	Customer
1	Total Number of Arrival	158
2	Total Number of Balking	0
3	Average Number in the System (L)	2.1504
4	Maximum Number in the System	10
5	Current Number in the System	0
6	Number Finished	158
7	Average Process Time	1.6698
8	Std. Dev. of Process Time	1.7377
9	Average Waiting Time (Wq)	1.0522
10	Std. Dev. of Waiting Time	1.3681
11	Average Transfer Time	0
12	Std. Dev. of Transfer Time	0
13	Average Flow Time (W)	2.7220
14	Std. Dev. of Flow Time	2.1173
15	Maximum Flow Time	10.7641
	Data Collection: 0 to 200 horas	
	CPU Seconds = 0.5470	

**Simulación
3**

Simulación en el modelo de una tienda durante 3600 segundos.

TIENDA

Component Name	Type (C/S/Q/G)	Immediate Follower (Name / Prob / TransferTime, separated by ',')	Input Rule	Output Rule	Queue Discipline	Queue Capacity	Attribute Value	Interarrival Time Distribution	Batch Size Distribution	Service Time Distribution
Caja	S									Caja/Erlang/5.74/3
Clientes	C	Cola						Clientes/Beta/3.98/0.398		
Cola	Q	Caja			FIFO	12				

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Caja / Erlang / 5.74 / 3} \\ \text{Clientes / Beta / 3.98 / 0.398} \end{array} \right.$$



Queuing System Simulation

Based on the specified random seed, simulation time, and/or maximum number of observations, the program simulates the queuing system according to the data entry specification. Press "Simulate" to start the simulation, and press "Cancel" to quit the simulation. Press "Show Analysis" for the result.

Random Seed

- Use default random seed
- Enter a seed number
- Use system clock

Random number seed: 27437

Simulation time in segundo: 3600

Data collection start time at segundo:

Maximum number of data collections (observations): M

% of simulation done:

Current time: 3601.3480 segundos

Number of observations collected: 597

Buttons: Simulate, Show Analysis, Cancel, Help

Introducidos los datos se procede a la simulación, se introduce el tipo de semilla que se va a utilizar, cuenta con una fija de 27437, y se introduce el tiempo durante el que se desea que corra la simulación que será de 3600 segundos (una hora).

Como primer dato, el número de observaciones recogidas en 3600 segundos es de 597.

En los 3600 segundos llegaron 846 clientes a la cola, esperando un tiempo promedio de 54,5829 segundos.

El número máximo de clientes en el sistema fue de 13 y en promedio permanecieron en el sistema 10,1495 clientes.

Queuing System Simulation

File Format Results Utilities Window Help

Customer Analysis for TIENDA

	Result	Cientes
1	Total Number of Arrival	846
2	Total Number of Balking	236
3	Average Number in the System (L)	10.1495
4	Maximum Number in the System	13
5	Current Number in the System	13
6	Number Finished	597
7	Average Process Time	5.9521
8	Std. Dev. of Process Time	5.9301
9	Average Waiting Time (Wq)	54.5829
10	Std. Dev. of Waiting Time	26.1513
11	Average Transfer Time	0
12	Std. Dev. of Transfer Time	0
13	Average Flow Time (W)	60.5350
14	Std. Dev. of Flow Time	26.9800
15	Maximum Flow Time	150.9370
	Data Collection: 0 to 3600 segundos	
	CPU Seconds = 1.8700	

Un estudio sobre la Caja refleja un promedio de utilización del 98,71%.

Queuing System Simulation

File Format Results Utilities Window Help

Server Analysis for TIENDA

	Server Name	Server Utilization	Average Process Time	Std. Dev. Process Time	Maximum Process Time	Blocked Percentage	# Custom Processes
1	Caja	98.71%	5.9521	5.9301	37.7493	0.00%	
Data	Collection: 0 to 3600 segundos				CPU Seconds = 1.8		



**Estudio sobre la Cola
específica que el
número de clientes en
cola fue de 9,1617**

Queue Analysis for TIENDA							
	Queue Name	Average Q. Length (Lq)	Current Q. Length	Maximum Q. Length	Average Waiting (Wq)	Std. Dev. of Wq	Maximum of Wq
1	Cola	9.1617	12	12	54.5719	26.1308	135.5524
Data	Collection:	0 to 3600 segundos	CPU	Seconds	1.8700		

Simulación 4

Simulación del modelo de lavado de coches durante 100 horas.

LAVADO CADENA											
Component Name	Type (C/S/Q/G)	Immediate Follower (Name / Prob / TransferTime, separated by ',')	Input Rule	Output Rule	Queue Discipline	Queue Capacity	Attribute Value	Interarrival Time Distribution	Batch Size Distribution	Service Time Distribution	
A	C	Buffer 1						Exp//2	Cons/1		
B	C	Buffer 3						Normal/2/1	const/1		
Buffer 1	Q	Estacion 1				50					
Buffer 3	Q	Estacion 3				50					
Estacion 1	S	Buffer 2//2								A/Exp//1.8	
Estacion 3	S	Buffer 4//1								B/Uniform/1.5/2	
Buffer 2	Q	Estacion 2				50					
Buffer 4	Q	Estacion 4				50					
Estacion 2	S	Buffer 5//2								A/Exp/1/1	
Estacion 4	S	Buffer 6//3								B/const/1.5	
Buffer 5	Q	Estacion 5				50					
Buffer 6	Q	Estacion 5				50					
Estacion 5	S	Assembly								A/Tri/1/1.5/2,B/Tri/1/1.5/2	

Distribución tiempos:

A: Exp / /2	Const / 1
B: Normal / 2 / 1	Const / 1
A / Exp / /1.8	
B / Uniform / 1.5 / 2	
A / Exp / 1 / 1	
B / Const / 1.5	
A / Tri / 1.5 / 2.8 , B / Tri / 1 / 1.5 / 2	



Queuing System Simulation

Based on the specified random seed, simulation time, and/or maximum number of observations, the program simulates the queuing system according to the data entry specification. Press "Simulate" to start the simulation, and press "Cancel" to quit the simulation. Press "Show Analysis" for the result.

Random Seed

- Use default random seed
- Enter a seed number
- Use system clock

Random number seed: 27437

Simulation time in hora: 100

Data collection start time at hora:

Maximum number of data collections (observations): M

% of simulation done:

Current time: 100.2211 horas

Number of observations collected: 43

Buttons: Simulate, Show Analysis, Cancel, Help

Introducidos los datos se procede a la simulación, se introduce el tipo de semilla que se va a utilizar, cuenta con una fija de 27437, y se introduce el tiempo durante el que se desea que corra la simulación que será de 100 horas.

Como primer dato, el número de observaciones recogidas en 100 horas es de 43.

Queuing System Simulation

File Format Results Utilities Window Help

Customer Analysis for LAVADO CADENA

	Result	A	B	Overall
1	Total Number of Arrival	65	50	115
2	Total Number of Balking	0	0	0
3	Average Number in the System (L)	13.9921	4.6635	18.6555
4	Maximum Number in the System	23	9	32
5	Current Number in the System	22	6	28
6	Number Finished	43	0	43
7	Average Process Time	8.3236	0	8.3236
8	Std. Dev. of Process Time	1.6796	0	1.6796
9	Average Waiting Time (Wq)	25.7713	0	25.7713
10	Std. Dev. of Waiting Time	12.0340	0	12.0340
11	Average Transfer Time	0.8000	0	0.8000
12	Std. Dev. of Transfer Time	0.0006	0	0.0006
13	Average Flow Time (W)	24.9216	0	24.9216
14	Std. Dev. of Flow Time	7.5815	0	7.5815
15	Maximum Flow Time	34.6371	0	34.6371
	Data Collection: 0 to 100 horas			
	CPU Seconds = 0.8160			

Queuing System Simulation

File Format Results Utilities Window Help

Server Analysis for LAVADO CADENA

	Server Name	Server Utilization	Average Process Time	Std. Dev. Process Time	Maximum Process Time	Blocked Percentage	# Customers Processed
1	Estacion 1	79.00%	1.5193	1.6045	8.3486	0.00%	52
2	Estacion 3	83.66%	1.7430	0.1493	1.9880	0.00%	48
3	Estacion 2	93.29%	2.1203	1.0684	5.4210	0.00%	44
4	Estacion 4	72.00%	1.5000	0.0004	1.5000	0.00%	48
5	Estacion 5	62.89%	1.4626	0.2070	1.8687	0.00%	43
	Overall	78.17%	1.6632	0.9239	8.3486	0.00%	235
Data	Collection:	0 to 100 hours		CPU	Seconds = 0.8160		



Queuing System Simulation

File Format Results Utilities Window Help

0.00 A

Queue Analysis for LAVADO CADENA

	Queue Name	Average Q. Length (Lq)	Current Q. Length	Maximum Q. Length	Average Waiting (Wq)	Std. Dev. of Wq	Maximum of Wq
1	Buffer 1	3.4392	12	14	4.7505	5.5256	15.8047
2	Buffer 3	0.3046	1	3	0.6217	0.9467	3.6506
3	Buffer 2	7.6926	7	12	16.0967	8.8687	30.2277
4	Buffer 4	0	0	1	0	0	0
5	Buffer 5	0.3492	0	3	0.7936	1.1824	4.2102
6	Buffer 6	2.5715	3	7	5.7229	4.8774	14.1670
	Overall	14.3571	23	14	4.5700	7.2177	30.2277
	Data Collection:	0 to 100 hours	CPU	Seconds = 0.8160			



ARENA: SIMULACIÓN DE UN NEGOCIO CON COLA M/M/1

Un negocio con una tasa de llegada exponencial 3 clientes/minuto, tasa de servicio exponencial 2 cliente/minuto, con un empleado (1 servidor), con disciplina FIFO (primero en entrar y primero en salir). Realizar una simulación del funcionamiento del negocio durante 2días y 24 horas/día.

Solución:

Arena Training & Evaluation Mode (Student) - Commercial Use Prohibited - [COLA-MM1.doe]

ORGANIGRAMA ATENCIÓN DEL NEGOCIO

09:00:00

Creado por: _____

Clientes que ingresan: 0

Clientes atendidos: 0

Flujo del proceso:

```

graph LR
    A[Llegada Clientes] -- Create --> B[Atención al Cliente]
    B -- Process --> C[Salida]
    
```

Detalles del proceso Atención al Cliente:

Create

Name:	Llegada Clientes	Entity Type:	Cliente		
Type:	Random (Expo)	Value:	3	Units:	Minutes
Entities per Arrival:	1	Max Arrivals:	Infinite	First Creation:	0.0

Process

Name: Atención al Cliente | Type: Standard

Action: Seize Delay Release | Priority: Medium(2)

Resources: Tomar el recurso y luego liberarlo

Resource: Empleado, 1

Delay Type: Expression | Units: Minutes | Allocation: Value Added

Expression: EXP(2)

Report Statistics:



Dispose

Name: Salida

Record Entity Statistics

OK Cancel Help

→ Al aceptar la Replication Parameters ya está preparado para simular.

Se pueden incorporar aspectos gráficos:

Variable:

Clientes que ingresan / Clientes atendidos

Entity: Picture Pearson

Añade personas recorriendo la simulación.

Clock: Permite ver lo que acontece durante la simulación de 2 horas.

Run Setup

Run Speed Run Control Reports Project Parameters

Replication Parameters

Number of Replications: 1 Initialize Between Replications

Statistics System

Start Date and Time:

Warm-up Period: 0.0 Time Units: Hours

Replication Length: 2 Time Units: Hours

Hours Per Day: 24 Se simulan 2 horas

Base Time Units: Minutes

Terminating Condition:

Aceptar Cancelar Aplicar Ayuda



Después de 2 horas de simulación, con 38 clientes que ingresan en el negocio y 33 clientes atendidos, se pregunta si se quieren ver los resultados.



Arena Training & Evaluation Mode (Student) - Commercial Use Prohibited - [COLA-MM1.doe - Category Overview]

File Edit View Tools Arrange Object Run Window Help

Project Bar

- Advanced Transfer
- Advanced Process
- Basic Process
- Flow Process
- Packaging
- Reports
- Activity Areas
- Category Overview
- Category by Replic
- Entities
- Frequencies
- Processes
- Queues
- Resources
- Transfers
- User Specified
- Tanks

Informe principal

Entity

Time

	Average	Half Width	Minimum Value	Maximum Value
Cliente	2.5030	(Insufficient)	0.1203	11.8745
NVA Time	Average	Half Width	Minimum Value	Maximum Value
Cliente	0.00	(Insufficient)	0.00	0.00
Wait Time	Average	Half Width	Minimum Value	Maximum Value
Cliente	2.0523	(Insufficient)	0.00	12.4035
Transfer Time	Average	Half Width	Minimum Value	Maximum Value
Cliente	0.00	(Insufficient)	0.00	0.00
Other Time	Average	Half Width	Minimum Value	Maximum Value
Cliente	0.00	(Insufficient)	0.00	0.00
Total Time	Average			
Cliente	4.5553	(Insufficient)	0.1203	18.5814

Tiempo promedio de un cliente en el sistema

Arena Training & Evaluation Mode (Student) - Commercial Use Prohibited - [COLA-MM1.doe - Category Overview]

File Edit View Tools Arrange Object Run Window Help

Project Bar

- Advanced Transfer
- Advanced Process
- Basic Process
- Flow Process
- Packaging
- Reports
- Activity Areas
- Category Overview
- Category by Replic
- Entities
- Frequencies
- Processes
- Queues
- Resources
- Transfers
- User Specified
- Tanks

Informe principal

Other

	Value			
Cliente	38.0000	Total de clientes que han ingresado		
Number Out	Value			
Cliente	33.0000	Total de clientes que han salido		
WIP	Average	Half Width	Minimum Value	Maximum Value
Cliente	1.3774	(Insufficient)	0.00	5.0000

Promedio de clientes en el sistema



Arena Training & Evaluation Mode (Student) - Commercial Use Prohibited - [COLA-MM1.doe - Queues]

File Edit View Tools Arrange Object Run Window Help

Project Bar

- ▷ Advanced Transfer
- ▷ Advanced Process
- ▷ Basic Process
- ▷ Flow Process
- ▷ Packaging
- ▷ Reports
- Activity Areas
- Category Overview
- Category by Replic
- Entities
- Frequencies
- Processes
- Queues
- Resources
- Transfers
- User Specified
- Tanks

Informe principal

Queues

Negocio

Replications: 1

Replication 1

Start Time: 0,00 Stop Time: 120,00 Time Units: Minutes

Atención al Cliente.Queue

Time	Average	Half Width	Minimum	Maximum
Waiting Time	Tiempo promedio de un cliente en cola	2.1041	(Insufficient)	0 12.4035
Other	Número promedio de clientes en cola	Average	Half Width	Minimum Maximum
	Number Waiting	0.6759	(Insufficient)	0 4.0000

Arena Training & Evaluation Mode (Student) - Commercial Use Prohibited - [COLA-MM1.doe - Resources]

File Edit View Tools Arrange Object Run Window Help

Project Bar

- ▷ Advanced Transfer
- ▷ Advanced Process
- ▷ Basic Process
- ▷ Flow Process
- ▷ Packaging
- ▷ Reports
- Activity Areas
- Category Overview
- Category by Replic
- Entities
- Frequencies
- Processes
- Queues
- Resources
- Transfers
- User Specified
- Tanks

Informe principal

Resources

Negocio

Replications: 1

Replication 1

Start Time: 0,00 Stop Time: 120,00 Time Units: Minutes

Empleado

Usage	Value
Total Number Seized	34.0000
Scheduled Utilization	0.7015 Utilización del servidor (empleado)
Number Scheduled	1.0000 (Insufficient) 1.0000 1.0000
Number Busy	0.7015 (Insufficient) 0 1.0000
Instantaneous Utilization	0.7015 (Insufficient) 0 1.0000



ARENA: SIMULACIÓN DE SOLICITUD DE UNA HIPÓTECA

Las solicitudes (entidades) de una hipoteca se realizan o llegan a la sucursal bancaria de forma aleatoria siguiendo una distribución exponencial de media 2 horas entre llegadas de solicitudes.

El proceso de revisión y evaluación de una solicitud lo realiza un oficinista (recurso o servidor).

Cada solicitud que llega al oficinista (proceso) sigue una distribución triangular, en la que el tiempo mínimo es una hora, el tiempo más probable es de 1,75 horas y el tiempo máximo es de 3 horas.

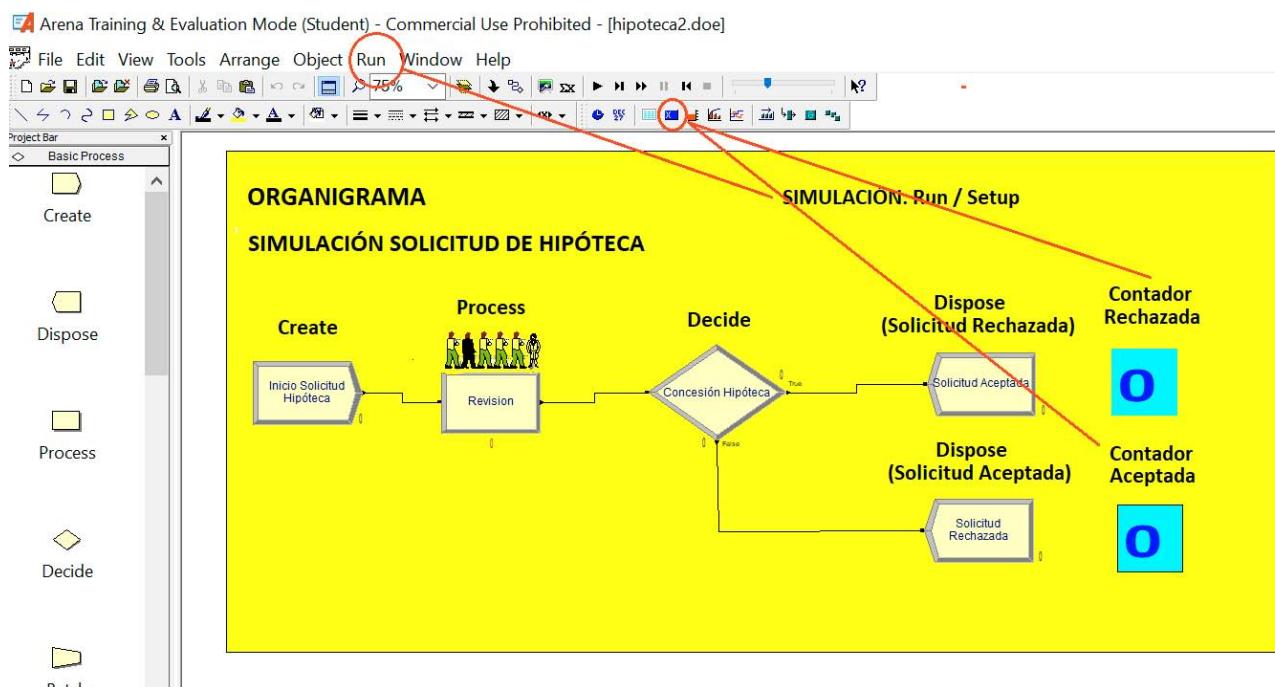
Las solicitudes son revisadas y evaluadas con una aceptación el 88 %.

Los costes del oficinista se fijan en 12 euros/hora (se encuentre ocupado o desocupado).

Realizar una simulación del funcionamiento de la sucursal bancaria durante 20 días y 24 horas/día.

Solución:

ARENA de Rockwell Software Inc. es una Simulación Visual Interactiva que posibilita la creación gráfica de modelos de simulación, permitiendo mostrar en pantalla dinámicamente el sistema simulado, así como la interacción entre el usuario y el programa en ejecución. La interacción implica que o bien se detiene la simulación y solicita información al usuario, o bien que éste puede parar la simulación a su voluntad e interaccionar con el mencionado programa.





Create

Name: Inicio Solicitud Hipoteca Entity Type: Solicitud

Time Between Arrivals

Type: Random (Expo) Value: 2 Units: Hours

Entities per Arrival: 1 Max Arrivals: Infinite First Creation: 0.0

OK Cancel Help

Process

Name: Revision Type: Standard

Logic

Action: Seize Delay Release Priority: Medium(2)

Resources:

Resource, Oficinista, 1 <End of list>

Add... Edit... Delete

Delay Type: Triangular Units: Hours Allocation: Value Added

Minimum: 1 Value (Most Likely): 1.75 Maximum: 3

Report Statistics

OK Cancel Help

Decide

Name: Concesión Hipoteca Type: 2-way by Chance

Percent True (0-100): 88 %

OK Cancel Help

Dispose

Name: Solicitud Aceptada

Record Entity Statistics

OK Cancel Help

Dispose

Name: Solicitud Rechazada

Record Entity Statistics

OK Cancel Help



Run Setup

Replication Parameters	Array Sizes	Arena Visual Designer
Run Speed	Run Control	Reports
Project Parameters		

Project Title:
Análisis de la Solicitud de Hipoteca

Analyst Name:
UTSI

Project Description:

Statistics Collection

<input type="checkbox"/> Costing	<input checked="" type="checkbox"/> Queues	<input type="checkbox"/> Transporters
<input checked="" type="checkbox"/> Entities	<input type="checkbox"/> Processes	<input type="checkbox"/> Conveyors
<input checked="" type="checkbox"/> Resources	<input type="checkbox"/> Stations	<input type="checkbox"/> Activity Areas
<input type="checkbox"/> Tanks		

Run Setup

Run Speed **Run Control** **Reports** **Project Parameters**

Replication Parameters **Array Sizes** **Arena Visual Designer**

Number of Replications: Initialize Between Replications
 Statistics System

Start Date and Time:

Warm-up Period: **Time Units:**

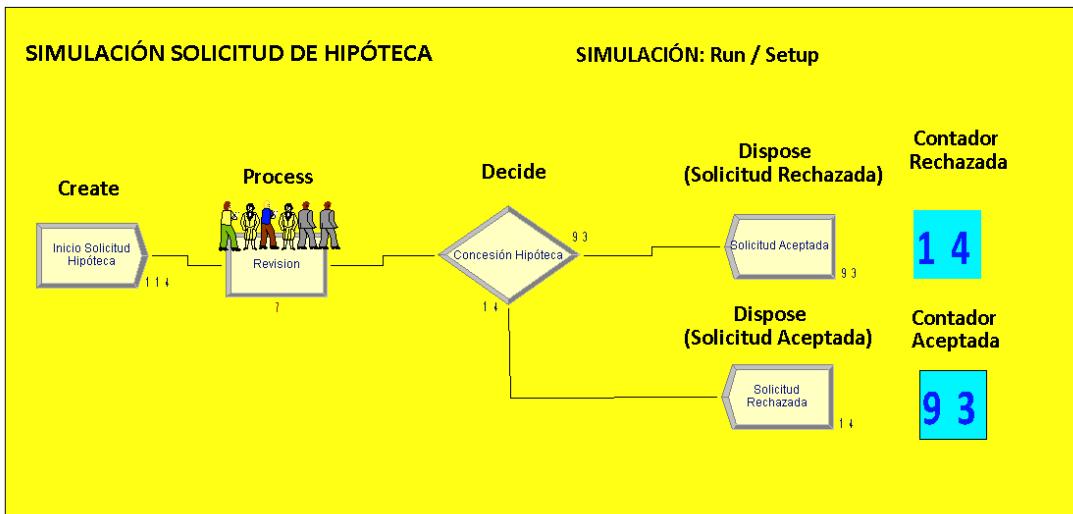
Replication Length: **Time Units:**

Hours Per Day:

Base Time Units:

Terminating Condition:

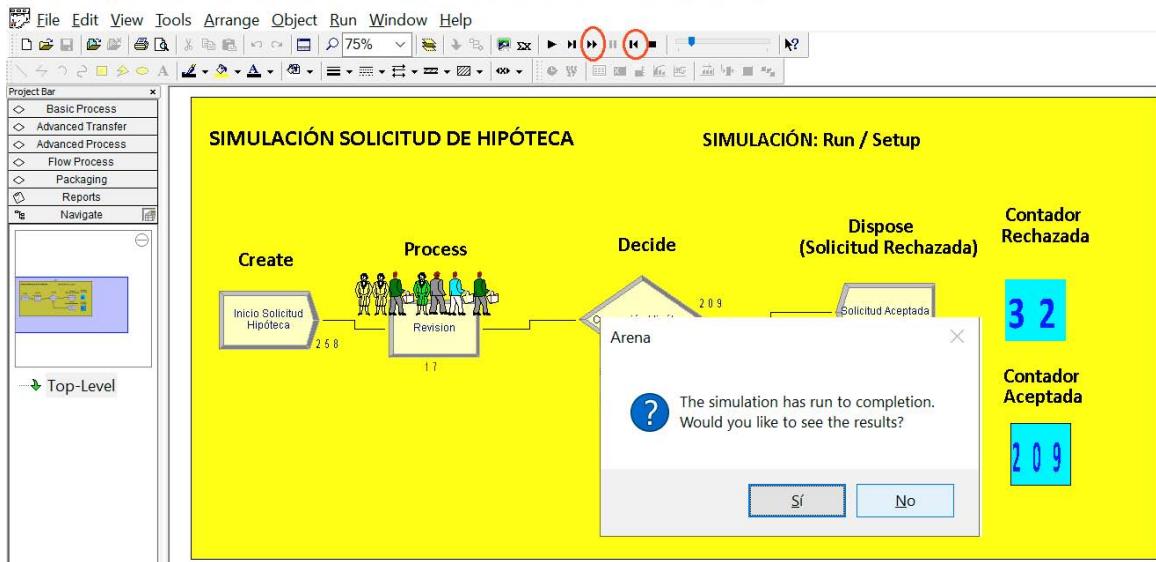
Aceptar **Cancelar** **Aplicar** **Ayuda**



La velocidad de la animación se puede disminuir o aumentar, respectivamente, pulsando la tecla “<” o la tecla “>”.

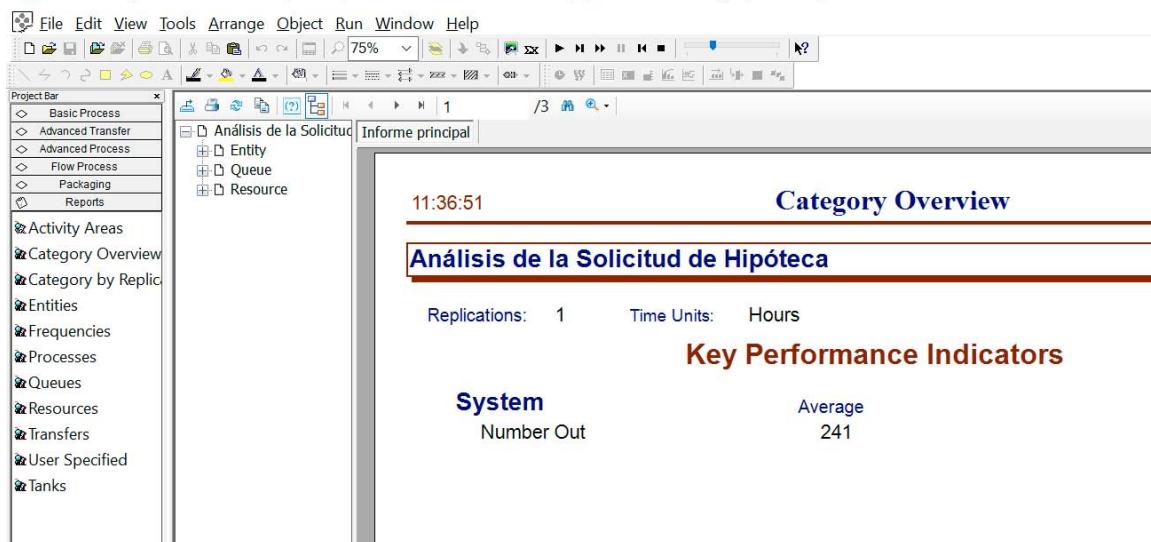


Arena Training & Evaluation Mode (Student) - Commercial Use Prohibited - [hipoteca2.doe - Run Mode]



Para realizar la simulación sin animación se elige la opción Run/Fast-Forward y pulsar su correspondiente ícono Fast-Forward.

Arena Training & Evaluation Mode (Student) - Commercial Use Prohibited - [hipoteca2.doe - Category Overview]





Entity

Time

VA Time	Average	Half Width	Minimum Value	Maximum Value
Solicitud	1.9160	(Insufficient)	1.0461	2.8730
NVA Time	Average	Half Width	Minimum Value	Maximum Value
Solicitud	0.00	(Insufficient)	0.00	0.00
Wait Time	Average	Half Width	Minimum Value	Maximum Value
Solicitud	14.5984	(Insufficient)	0.00	31.3134
Transfer Time	Average	Half Width	Minimum Value	Maximum Value
Solicitud	0.00	(Insufficient)	0.00	0.00
Other Time	Average	Half Width	Minimum Value	Maximum Value
Solicitud	0.00	(Insufficient)	0.00	0.00
Total Time	Average	Half Width	Minimum Value	Maximum Value
Solicitud	16.5144	(Insufficient)	1.4216	33.4522

Queue

Time

Waiting Time	Average	Half Width	Minimum Value	Maximum Value
Revision.Queue	14.6615	(Insufficient)	0.00	31.3134
Other				
Number Waiting	Average	Half Width	Minimum Value	Maximum Value
Revision.Queue	8.0177	(Correlated)	0.00	21.0000

Resource

Usage

Instantaneous Utilization	Average	Half Width	Minimum Value	Maximum Value
Oficinista	0.9654	(Insufficient)	0.00	1.0000
Number Busy	Average	Half Width	Minimum Value	Maximum Value
Oficinista	1.0000	(Insufficient)	1.0000	1.0000
Scheduled Utilization	Value			
Oficinista	0.9654			
Total Number Seized	Value			
Oficinista	242.00			



ARENA: MODELAR UN HOSPITAL PARA UN NÚMERO FIJO DE PACIENTES



La tasa de llegada de revisión de pacientes al Hospital es de 6 minutos, llegan en grupos de 1, 2 y 3 personas, con probabilidades de 20%, 60% y 20% respectivamente. Existen dos tipos de pacientes, el 15% son de Tipo I y tienen prioridad máxima a ser atendidos (personas de tercera edad, embarazadas, discapacitados físicos), y pacientes normales de Tipo II con menor prioridad.

Los clientes de Tipo I son atendidos solo por la Recepción I, y los de Tipo II son atendidos por ambas Recepciones, con una media exponencial de media de 8 y 5 minutos respectivamente. La Recepción I trabaja 3 horas, descansa 1 hora, luego reanuda su trabajo 4 horas, y la Recepción II trabaja solamente 4 horas, después se retira.

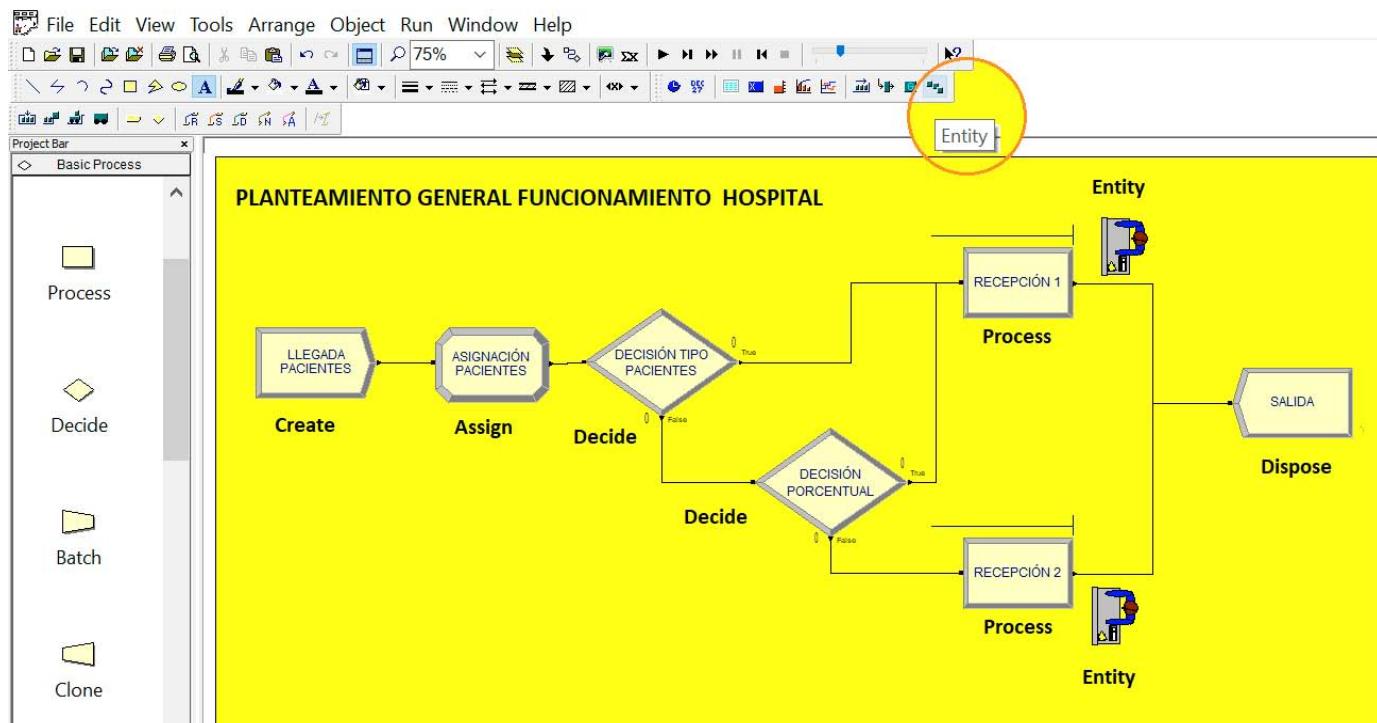
- Modelar una réplica para 100 pacientes y calcular las medidas de rendimiento.

Solución:

Planteamiento Inicial



La tasa de llegada de revisión de pacientes al Hospital es de 6 minutos, llegan en grupos de 1, 2 y 3 personas, con probabilidades de 20%, 60% y 20% respectivamente. Existen dos tipos de pacientes, el 15% son de Tipo I y tienen prioridad máxima a ser atendidos (personas de tercera edad, embarazadas, discapacitados físicos), y pacientes normales de Tipo II con menor prioridad.





Create

Name: Entity Type:

Time Between Arrivals

Type: Value: Units:

Entities per Arrival: Max Arrivals: First Creation:



Assign

Name:

Assignments:

Assignments

Type: Attribute Name:

New Value:

Assignments

Type: Attribute Name:

New Value:



Decide

Name: Type:

If:

Value:



Decide

Name: DECISIÓN PORCENTUAL Type: 2-way by Chance

Percent True (0-100): 50 %

OK Cancel Help



Process

Name: RECEPCIÓN 1 Type: Standard

Action: Seize Delay Release Priority: Medium(2)

Resources:

- Resource, RECEPCIÓN1, 1
- <End of list>

Add... Edit... Delete

De momento se deja por defecto

Delay Type: Units: Allocation:
Expression Minutes Value Added

Expression: TIPO

Report Statistics

OK Cancel Help

Resources

Type: Resource

Resource Name: RECEPCIÓN1 Units to Seize/Release: 1

OK Cancel Help



Dispose

Name: SALIDA

Record Entity Statistics

OK Cancel Help

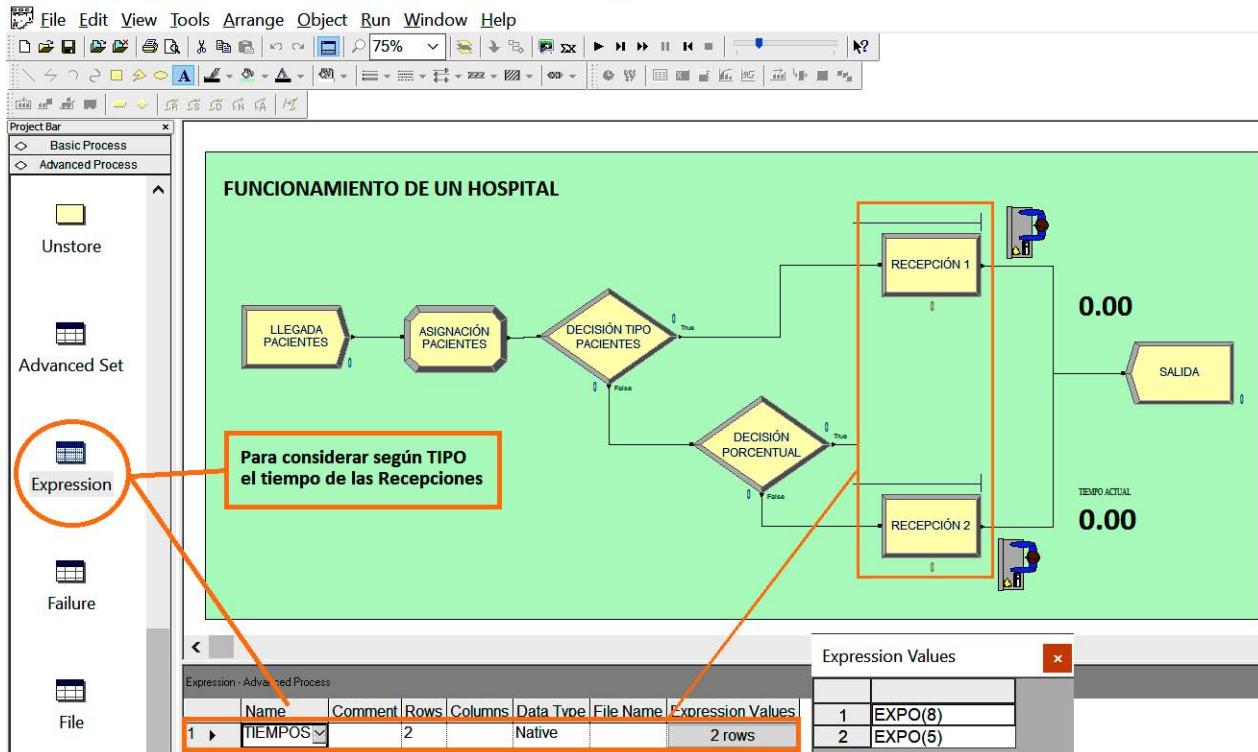


Planteamiento Definitivo

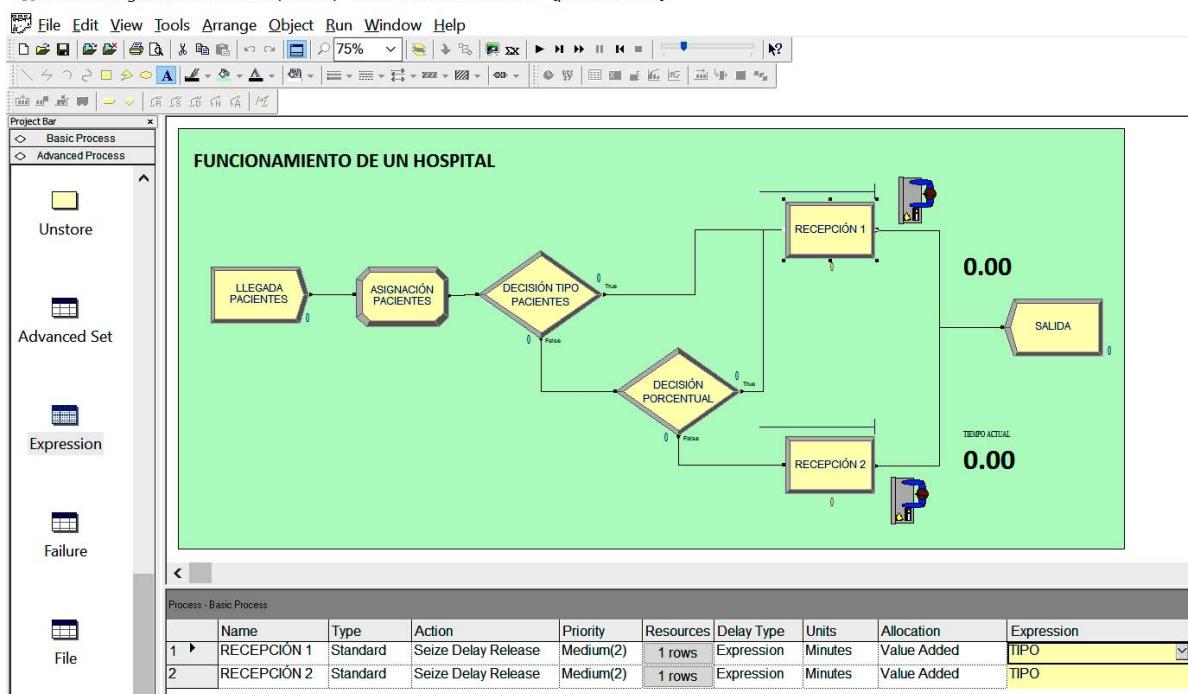


Los clientes de Tipo I son atendidos solo por la Recepción I, y los de Tipo II son atendidos por ambas Recepciones, con una media exponencial de media de 8 y 5 minutos respectivamente. La Recepción I trabaja 3 horas, descansa 1 hora, luego reanuda su trabajo 4 horas, y la Recepción II trabaja solamente 4 horas, después se retira.

Arena Training & Evaluation Mode (Student) - Commercial Use Prohibited - [pacientes1.doe]

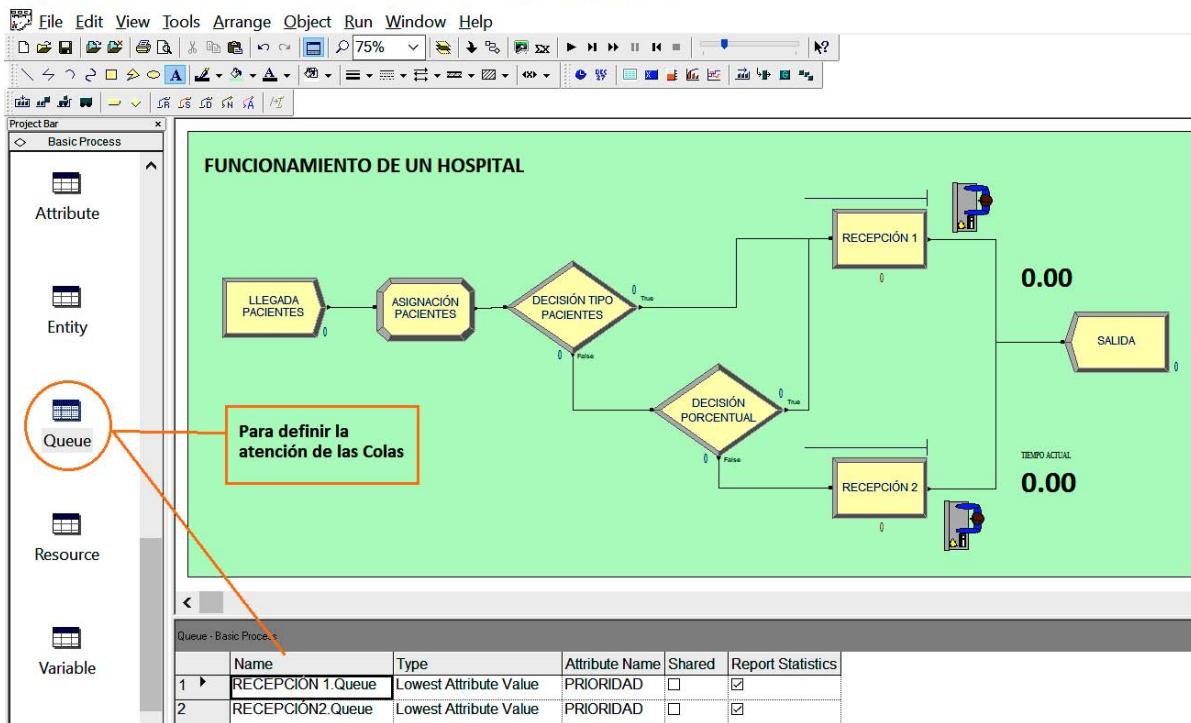


Arena Training & Evaluation Mode (Student) - Commercial Use Prohibited - [pacientes1.doe]

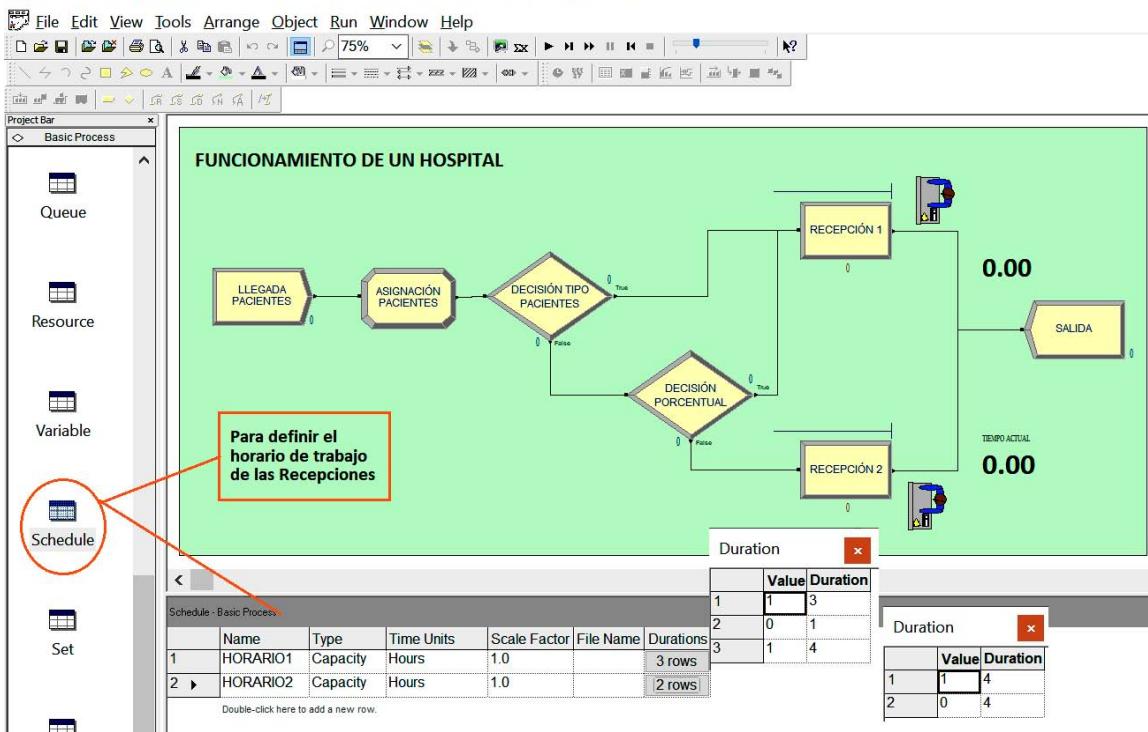




Arena Training & Evaluation Mode (Student) - Commercial Use Prohibited - [pacientes1.doe]

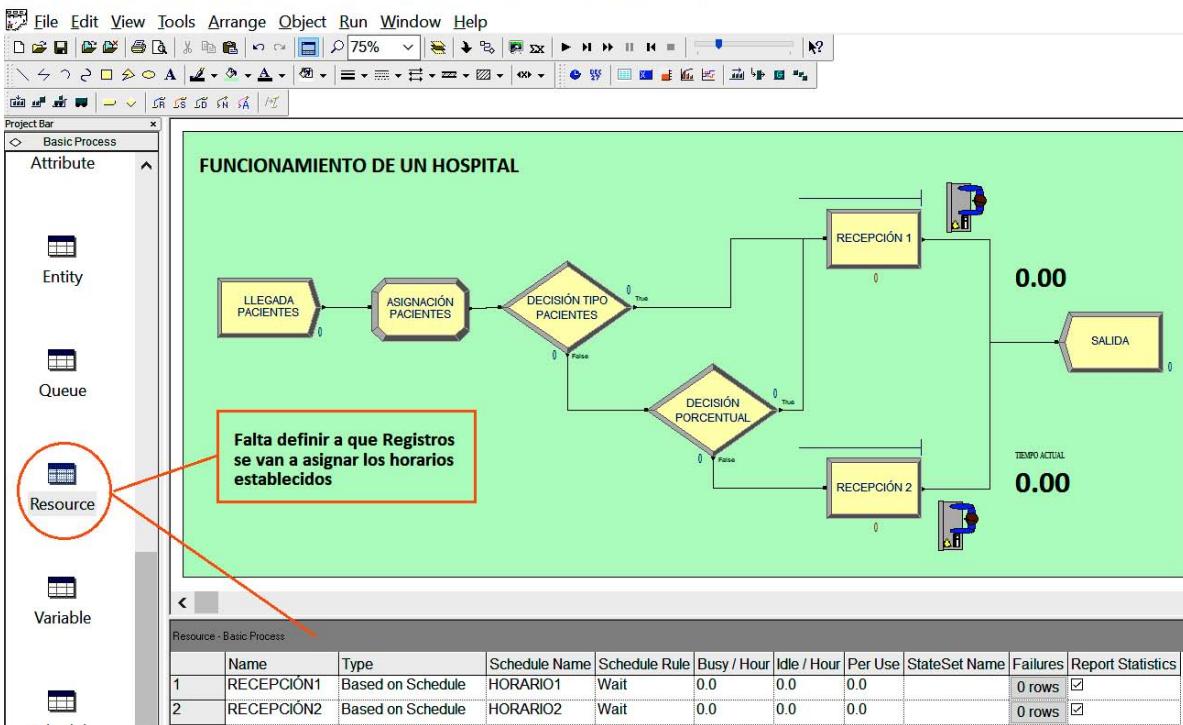


Arena Training & Evaluation Mode (Student) - Commercial Use Prohibited - [pacientes1.doe]





Arena Training & Evaluation Mode (Student) - Commercial Use Prohibited - [pacientes1.doe]



Modelar una réplica para 100 pacientes y medidas de rendimiento.

Run Setup

Number of Replications: 1

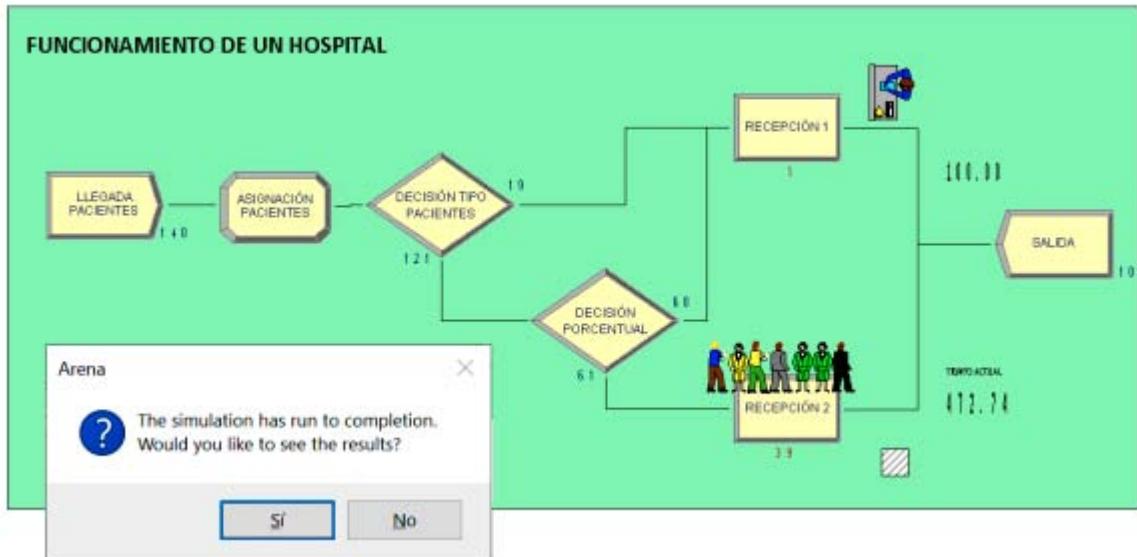
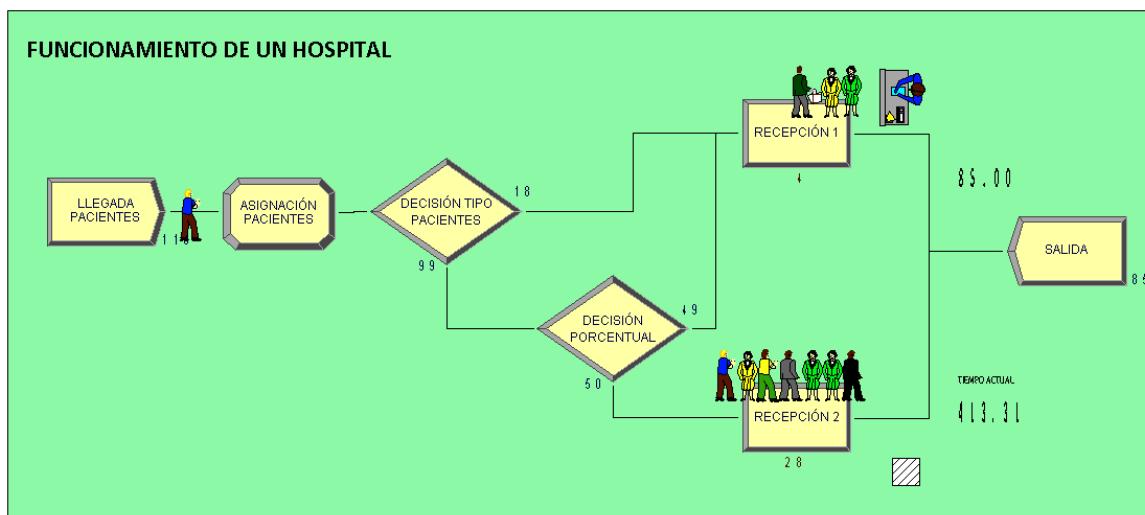
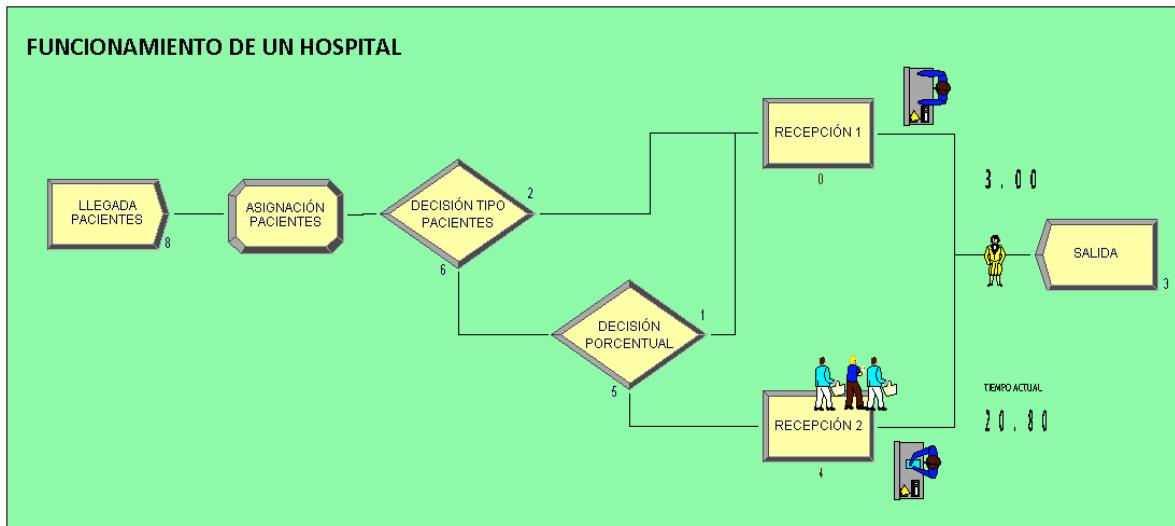
Terminating Condition: SALIDA.NumberOut==100

Simulación para 100 pacientes
SALIDA.NumberOut==100

Aceptar Cancelar Aplicar Ayuda



Funcionamiento del Hospital ...





Informe principal | 4 /4

Category Overview

HOSPITAL

Replications: 1 Time Units: Minutes

Resource

Usage

	Average	Half Width	Minimum Value
RECEPCIÓN1	0.2919	(Insufficient)	0.00
RECEPCIÓN2	0.0931	(Insufficient)	0.00

	Average	Half Width	Minimum Value
RECEPCIÓN1	0.2919	(Insufficient)	0.00
RECEPCIÓN2	0.0931	(Insufficient)	0.00

	Average	Half Width	Minimum Value
RECEPCIÓN1	0.8731	(Insufficient)	0.00
RECEPCIÓN2	0.5077	(Insufficient)	0.00

	Value
RECEPCIÓN1	0.3343
RECEPCIÓN2	0.1833

Total Number Seized	Value
RECEPCIÓN1	79.0000
RECEPCIÓN2	22.0000



Category Overview

HOSPITAL

Replications: 1 Time Units: Minutes

Queue

Time

Waiting Time	Average	Half Width	Minimum Value	Maximum Value
RECEPCIÓN 1.Queue	2.4483	(Insufficient)	0.00	36.3616
RECEPCIÓN 2.Queue	1.1342	(Insufficient)	0.00	5.9009

Other

Number Waiting	Average	Half Width	Minimum Value	Maximum Value
RECEPCIÓN 1.Queue	0.4091	(Insufficient)	0.00	4.0000
RECEPCIÓN 2.Queue	8.4896	(Insufficient)	0.00	39.0000
RECEPCIÓN2.Queue	0.00	(Insufficient)	0.00	0.00

Run Setup

At the end of the simulation run, display default report ...

Always Never Prompt me

Default Report:
SIMAN Summary Report(.out file)

Display SIMAN summary report (.out file) using:
notepad.exe

Disable generation of report database

**Se ejecuta el Modelo y sale en formato de texto.
No es tan visual que el formato General pero
resume y lo da más rápido.**

Aceptar **Cancelar** **Aplicar** **Ayuda**



Project: HOSPITAL
Analyst: Estadística

Replication ended at time: 472.74373 Minutes
Base Time Units: Minutes

TALLY VARIABLES

Identifier	Average	Half Width	Minimum	Maximum	Observation
PACIENTE.VATime	1.8200	(Insuf)	1.0000	2.0000	100
PACIENTE.NVATime	.00000	(Insuf)	.00000	.00000	100
PACIENTE.WaitTime	2.1731	(Insuf)	.00000	36.361	100
PACIENTE.TranTime	.00000	(Insuf)	.00000	.00000	100
PACIENTE.OtherTime	.00000	(Insuf)	.00000	.00000	100
PACIENTE.TotalTime	3.9931	(Insuf)	1.0000	38.361	100
RECEPCIÓN 1.Queue.WaitingTime	2.4483	(Insuf)	.00000	36.361	79
RECEPCIÓN2.Queue.WaitingTime	--	--	--	--	0
RECEPCIÓN 2.Queue.WaitingTime	1.1341	(Insuf)	.00000	5.9009	22

DISCRETE-CHANGE VARIABLES

Identifier	Average	Half Width	Minimum	Maximum	Final Value
PACIENTE.WIP	9.2837	(Insuf)	.00000	41.000	40.000
RECEPCIÓN2.NumberBusy	.09307	(Insuf)	.00000	1.0000	.00000
RECEPCIÓN2.NumberScheduled	.50767	(Insuf)	.00000	1.0000	.00000
RECEPCIÓN2.Utilization	.09307	(Insuf)	.00000	1.0000	.00000
RECEPCIÓN1.NumberBusy	.29191	(Insuf)	.00000	1.0000	1.0000
RECEPCIÓN1.NumberScheduled	.87308	(Insuf)	.00000	1.0000	1.0000
RECEPCIÓN1.Utilization	.29191	(Insuf)	.00000	1.0000	1.0000
RECEPCIÓN 1.Queue.NumberInQueue	.40914	(Insuf)	.00000	4.0000	.00000
RECEPCIÓN2.Queue.NumberInQueue	.00000	(Insuf)	.00000	.00000	.00000
RECEPCIÓN 2.Queue.NumberInQueue	8.4895	(Insuf)	.00000	39.000	39.000

OUTPUTS

Identifier	Value
PACIENTE.NumberIn	140.00
PACIENTE.NumberOut	100.00
RECEPCIÓN2.NumberSeized	22.000
RECEPCIÓN2.ScheduledUtilization	.18333
RECEPCIÓN1.NumberSeized	79.000
RECEPCIÓN1.ScheduledUtilization	.33435
System.NumberOut	100.00



ARENA: CONTROL DE PASAJEROS DE UN AEROPUERTO



En el counter de una aerolínea en el aeropuerto se forman dos colas de pasajeros que esperan por el check in. Una de las colas se destina a pasajeros de primera clase, la otra cola es para pasajeros de segunda clase.

En el counter se dispone de 6 agentes para la atención de pasajeros. La distribución de pasajeros es la siguiente:

El agente 1 y el agente 2 atienden de forma exclusiva a los pasajeros de primera clase.

Al llegar un pasajero al mostrador, si ambos agentes están disponibles, la prioridad de atención es del agente 2.

- El agente 3 y el agente 4 atienden de forma exclusiva a los pasajeros de segunda clase. Cuando llega un pasajero al mostrador, si ambos agentes están disponibles, el agente 3 tiene prioridad de atención.
- El agente 5 y el agente 6 son comodines, es decir, atienden a ambos tipos de pasajeros, cuando no existe disponibilidad de los agentes asignados exclusivamente, se conviene que el agente 5 tenga prioridad de atención respecto al agente 6.

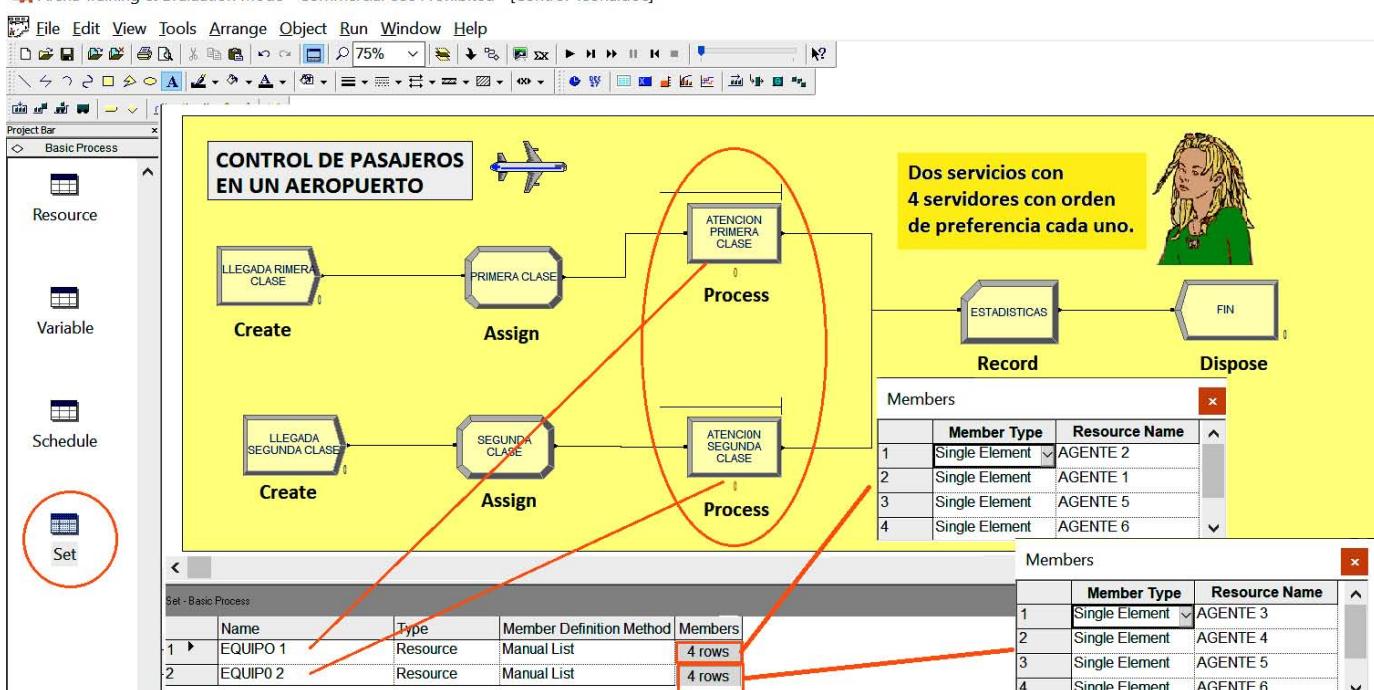
Los pasajeros de primera clase llegan con una distribución exponencial de media 5 minutos. Los pasajeros de segunda clase llegan con una exponencial de media 2 minutos.

El tiempo de atención en el mostrador varía según la clase de ticket: Los pasajeros de primera clase tienen un tiempo de atención uniforme distribuido entre 2 y 20 minutos. Los pasajeros de segunda clase siguen una distribución triangular con una moda de 6 minutos, con valores mínimo y máximo de 3 y 12 minutos.

Simular el sistema durante 5 horas. Calcular las medidas de rendimiento.

Solución:

Arena Training & Evaluation Mode - Commercial Use Prohibited - [Control-Teoria.doe]




LLEGADA RIMERA CLASE

Create

Create

Name: Entity Type:
LLEGADA RIMERA CLASE 1_CLASE

Time Between Arrivals
Type: Value: Units:
Random (Expo) 5 Minutes

Entities per Arrival: Max Arrivals: First Creation:
1 Infinite 0.0

OK Cancel Help

PRIMERA CLASE

Assign

Assign

Name: PRIMERA CLASE

Assignments:
Attribute, LLEGADA, TNOW
Attribute, TIPO, 1
<End of list>

Add... Edit... Delete

OK Cancel Help

Assignments

Type: Attribute Name:
Attribute LLEGADA

New Value:
TNOW

OK Cancel Help

Assignments

Type: Attribute Name:
Attribute TIPO

New Value:
1

OK Cancel Help

ATENCION PRIMERA CLASE

Process

Process

Name: Type:
ATENCION PRIMERA CLASE Standard

Logic
Action: Priority:
Seize Delay Release Medium(2)

Resources:
Set, EQUIPO 1, 1, Preferred Order,
<End of list>

Add... Edit... Delete

Delay Type: Units: Allocation:
Uniform Minutes Value Added

Minimum: Maximum:
2 20

Report Statistics

OK Cancel Help

Distribución de la llegada de pasajeros de primera clase.

Tiene dos Atributos importantes:
Registrar la hora de llegada actual (TNOW) en la simulación.
Clasificar que son de primera clase (TIPO).

Tiene tres partes:

Action: Seize Delay Release (Tomar el recurso, ocuparlo y luego liberarlo).

Resources: Declara quien lo hace.

Delay Type: Se define el tiempo de servicio de los pasajeros de primera clase, una distribución uniforme U(2, 20) minutos.



Resources

Type: Set

Set Name: EQUIPO 1

Selection Rule: Preferred Order

Para definir como se reparten los recursos hay que ir al módulo Set

Units to Seize/Release: 1

Save Attribute:

OK Cancel Help

Members

	Name	Type	Member Definition Method	Members
1	EQUIPO 1	Resource	Manual List	4 rows
2				
3				
4				

LLEGADA SEGUNDA CLASE

Create

Name: LLEGADA SEGUNDA CLASE Entity Type: 2_CLASE

Type: Random (Expo) Value: 2 Units: Minutes

Entities per Arrival: 1 Max Arrivals: Infinite First Creation: 0.0

OK Cancel Help

Distribución de la llegada de pasajeros de segunda clase.

SEGUNDA CLASE

Assign

Name: SEGUNDA CLASE

Assignments:

Attribute, LLEGADA, TNOW
Attribute, TIPO, 2
<End of list>

Add... Edit... Delete

OK Cancel Help

Tiene dos Atributos importantes:
Registrar la hora de llegada actual (TNOW) en la simulación.
Clasificar que son de primera clase (TIPO).

Assignments

Type: Attribute Attribute Name: LLEGADA

New Value: TNOW

OK Cancel Help

Assignments

Type: Attribute Attribute Name: TIPO

New Value: 2

OK Cancel Help



ATENCIÓN SEGUNDA CLASE

Process

Process ? X

Name: ATENCIÓN SEGUNDA CLASE Type: Standard

Logic

Action: Seize Delay Release Priority: Medium(2)

Resources:

Set, EQUIPO 2, 1, Preferred Order, <End of list>

Add... Edit... Delete

Delay Type: Triangular Units: Minutes Allocation: Value Added

Minimum: 3 Value (Most Likely): 6 Maximum: 12

Report Statistics

OK Cancel Help

Resources ? X

Type: Set

Set Name: EQUIPO 2 Units to Seize/Release: 1

Selection Rule: Preferred Order Save Attribute:

OK Cancel Help

Para definir como se reparten los recursos hay que ir al módulo Set

Set - Basic Process				
Set	Name	Type	Member Definition Method	Members
2	EQUIPO 2	Resource	Manual List	4 rows

Members		
	Member Type	Resource Name
1	Single Element	AGENTE 3
2	Single Element	AGENTE 4
3	Single Element	AGENTE 5
4	Single Element	AGENTE 6

ESTADÍSTICAS

Record

Record ? X

Name: ESTADÍSTICAS

Statistic Definitions:

Count, 1, No, NUMERO TOTAL PASAJEROS
Time Interval, LLEGADA, No, TIEMPO EN EL SISTEMA
Time Interval, LLEGADA, Yes, TS, TIPO
Count, 1, Yes, TIPO PASAJERO, TIPO
<End of list>

Add... Edit... Delete

OK Cancel Help

Tiene tres partes:

Action: Seize Delay Release (Tomar el recurso, ocuparlo y luego liberarlo).

Resources: Declara quien lo hace.

Delay Type: Se define el tiempo de servicio de los pasajeros de segunda clase, una distribución triangular (3, 6, 12) minutos.

Se crean dos Set:

TIPO DE PASAJERO para saber cuántos pasajeros ha habido de cada tipo.

LLEGADA EN EL SISTEMA PARA CADA TIPO DE PASAJERO (TS)

Los Set además de trabajar con Recursos pueden utilizarse para contabilizar (Contador)



Statistic Definition

Type: Count

Type NOTE: Increments / Decrments the Counter Name by the Value specified

Value: 1 Record into Set

Counter Name: NUMERO TOTAL PASAJEROS

OK Cancel Help

Statistic Definition

Type: Time Interval

Type NOTE: Records the difference between the current simulation time and

Attribute Name: LLEGADA Record into Set

Tally Name: TIEMPO EN EL SISTEMA

OK Cancel Help

Statistic Definition

Type: Count

Value: 1 Record into Set

Counter Set Name: TIPO PASAJERO Set Index: TIPO

TIPO 1: Primera Clase
TIPO 2: Segunda Clase

OK Cancel Help

Statistic Definition

Type: Time Interval

Type NOTE: Records the difference between the current simulation time and

Attribute Name: LLEGADA Record into Set

Tally Set Name: TS Set Index: TIPO

TIPO 1: Primera Clase
TIPO 2: Segunda Clase

OK Cancel Help

Set - Basic Process

Name	Type	Member Definition Method	Members
1 EQUIPO 1	Resource	Manual List	4 rows
2 EQUIPO 2	Resource	Manual List	4 rows
3 TIPO PASAJERO	Counter	Manual List	2 rows
4 TS	Tally	Manual List	2 rows

Double-click here to add a new row.

Tiempo en Sistema

Members

Counter Name
ATENCION 1_CLASE
ATENCION 2_CLASE

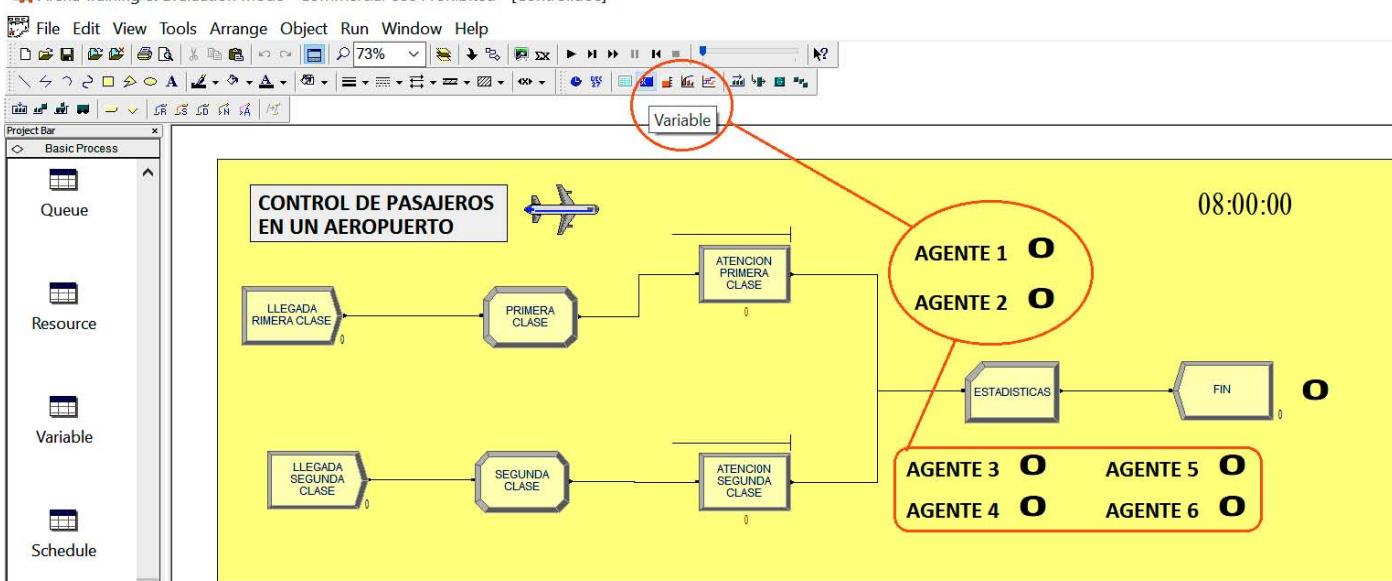
Double-click here to add a new row.

Members

Counter Name
ATENCION 1_CLASE
ATENCION 2_CLASE

Double-click here to add a new row.

Arena Training & Evaluation Mode - Commercial Use Prohibited - [Control.doe]





Variable

Expression: **Construir Expresión**

FIN.NumberOut

Build Expression...

ATENCION SEGUNDA CLASE.Number
ATENCION SEGUNDA CLASE.Number
ATENCION PRIMERA CLASE.Number
ATENCION PRIMERA CLASE.Number
FIN.NumberOut
LLEGADA RIMERA CLASE.Number
LLEGADA SEGUNDA CLASE.Number

Alignment: Left Right

Title:

Use Title

Percent Height: 25.0 Vert. Alignment: Top Horiz. Alignment: Left

Title Text: Font...

OK Cancel Help

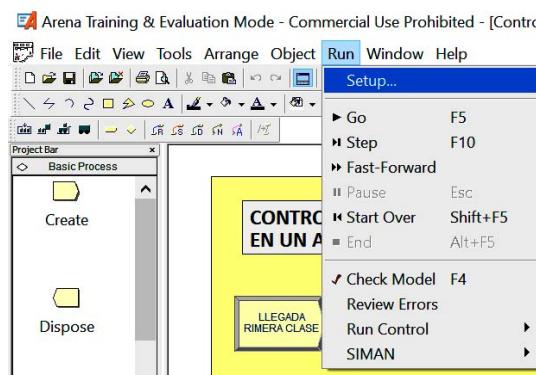
Expression Builder

Resource Name: AGENTE 1

Expression Type:

- Advanced Process Variables
- Basic Process Variables
 - Attribute
 - Entity
 - Process
 - Queue
 - Record
 - Resource
 - Costs
 - State
 - Usage
 - Current Number Scheduled
 - Average Number Scheduled
 - Current Number Busy**
 - Average Number Busy
 - Current Utilization
 - Scheduled Utilization
 - Total Number Seized
- Set

Current Expression: NR(AGENTE 1)



Run Setup

Run Speed Run Control Reports Project Parameters

Replication Parameters Array Sizes Arena Visual Designer

Number of Replications: 1 Initialize Between Replications
 Statistics System

Start Date and Time: Estadística

Warm-up Period: 0.0 Time Units: Hours

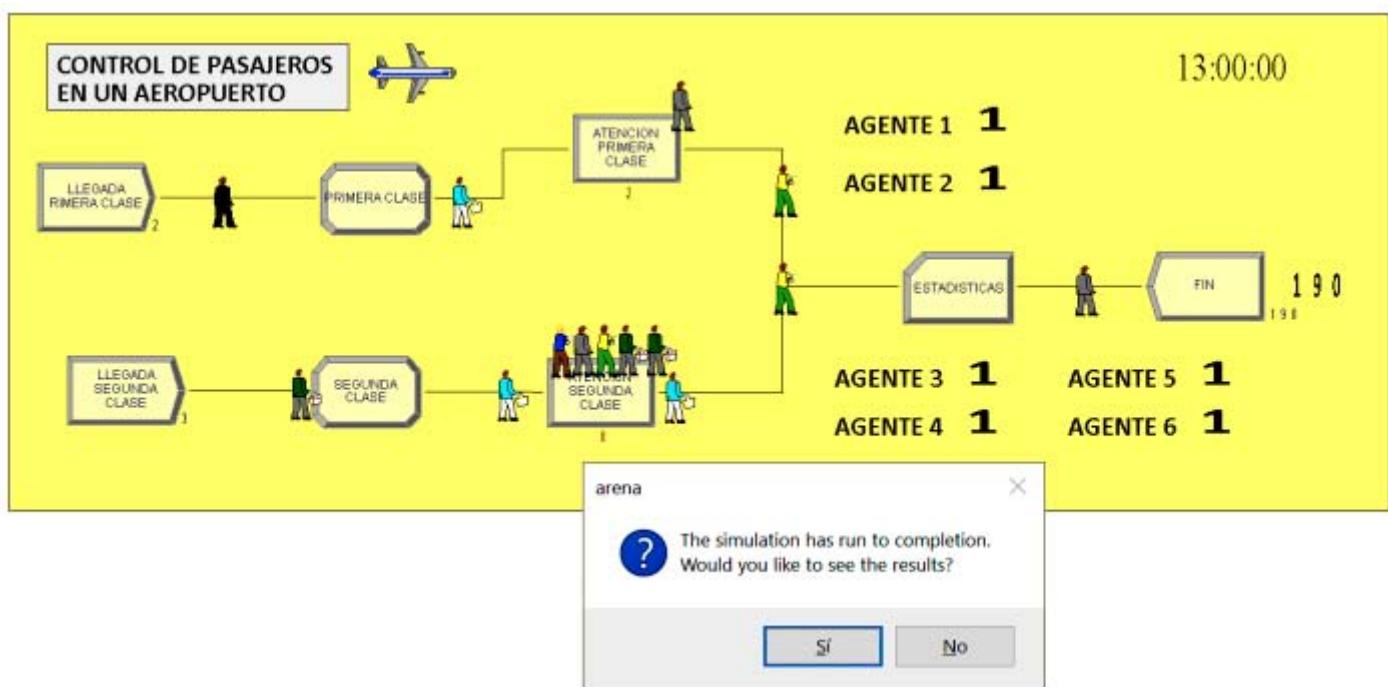
Replication Length: 5 Time Units: Hours

Hours Per Day: 24

Base Time Units: Minutes

Terminating Condition:

Aceptar Cancelar Aplicar Ayuda



Control Pasajeros Cke | Informe principal | /6

Category Overview

Control Pasajeros Ccheck in

Replications: 1 Time Units: Minutes

User Specified

Tally

Interval	Tiempo promedio en el sistema global	Average	Half Width	Minimum Value	Maximum Value
TIEMPO EN EL SISTEMA	14.9724	(Insufficient)	3.1128	34.4554	

Counter

Count	Value
ATENCION 1_CLASE	53.0000
ATENCION 2_CLASE	137.00
NUMERO TOTAL PASAJEROS	190.00

Bar chart showing the average time spent in the system for different classes:

- ATENCION 1_CLASE (Blue bar)
- ATENCION 2_CLASE (Orange bar)
- NUMERO TOTAL PASAJEROS (Yellow bar)

Usage

None	Tiempo en el sistema por clases de pasajeros	Average	Half Width	Minimum Value	Maximum Value
TS 1_CLASE	15.7203	(Insufficient)	3.1128	34.4554	
TS 2_CLASE	14.6831	(Insufficient)	3.5811	30.1047	



Informe principal | 5 /6 🔍

Control Pasajeros Ccheck

- Entity
- Queue
- Resource**
 - Usage
 - Instantaneous U
 - Number Busy
 - Number Schedu
 - Scheduled Utiliz
 - Total Number S
 - User Specified

Category Overview

Control Pasajeros Ccheck in

Replications: 1 Time Units: Minutes

Resource

Usage

Scheduled Utilization	Value	Porcentaje alto de utilización (pasado el 75%)
AGENTE 1	0.8413	
AGENTE 2	0.8157	
AGENTE 3	0.9430	
AGENTE 4	0.9302	
AGENTE 5	0.9349	
AGENTE 6	0.8964	

Porcentajes de utilización de los recursos.

Total Number Seized	Value
AGENTE 1	23.0000
AGENTE 2	22.0000
AGENTE 3	40.0000
AGENTE 4	42.0000
AGENTE 5	33.0000
AGENTE 6	36.0000



Control Pasajeros Check | Informe principal | 3 /6

Category Overview

Control Pasajeros Ccheck in

Replications: 1 Time Units: Minutes

Entity

Other

	Number Out	Value
1_CLASE	53.0000	
2_CLASE	137.00	

	Average	Half Width	Minimum Value	Maximum Value
1_CLASE	2.8232	(Insufficient)	0.00	7.0000
2_CLASE	7.0564	(Insufficient)	0.00	14.0000

Queue

Time

	Waiting Time	Average	Half Width	Minimum Value	Maximum Value
ATENCION SEGUNDA CLASE.Queue	Tiempo promedio esperando en cola	7.8374	(Insufficient)	0.00	21.2768
ATENCION PRIMERA CLASE.Queue		4.0607	(Insufficient)	0.00	17.7738

Other

	Number Waiting	Average	Half Width	Minimum Value	Maximum Value
ATENCION SEGUNDA CLASE.Queue		3.7714	(Insufficient)	0.00	11.0000
ATENCION PRIMERA CLASE.Queue		0.7467	(Insufficient)	0.00	4.0000



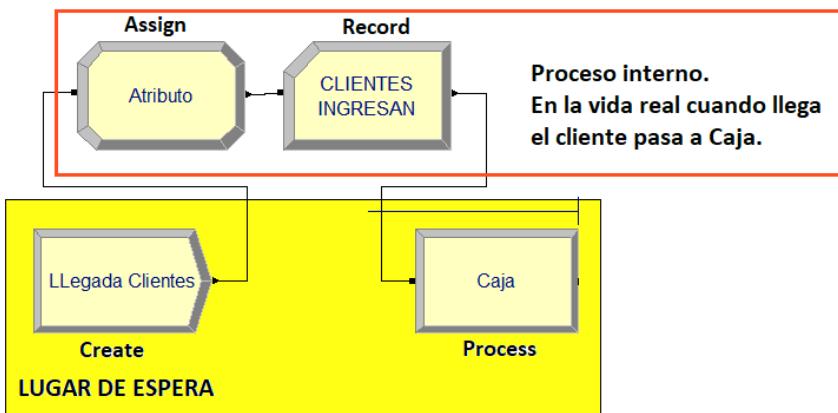
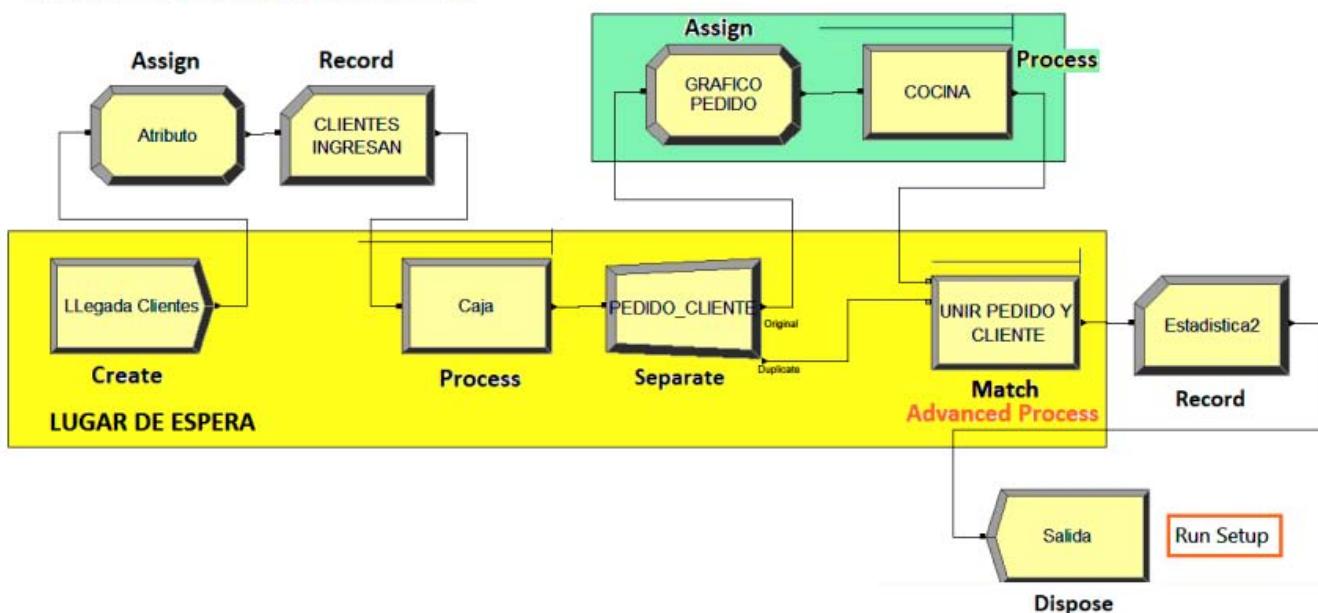
ARENA: MODELAR RESTAURANTE DE COMIDA RÁPIDA



En un restaurante de comida rápida, donde el flujo del proceso es pedir, esperar y llevar), llegan 0.9 clientes/minuto. El tiempo de servicio en Caja sigue una distribución normal $N(1.5, 0.2)$ minutos. El tiempo de servicio en Cocina sigue una distribución uniforme (1.4 , 2.5) minutos. Hay dos empleados (servidores) en Caja y Cocina. La disciplina de cola es FIFO. Modelar y simular el sistema durante 2 horas.

Solución:

RESTAURANTE COMIDA RÁPIDA





Create

Name: LLegada Clientes Entity Type: Cliente

Time Between Arrivals

Type: Random (Expo) Value: 0.9 Units: Minutes

Entities per Arrival: Max Arrivals: First Creation:

1 Infinite EXPO(0.9)

OK Cancel Help

**La primera llegada se da
según una Expo(0.9) minutos.**

PROCESO INTERNO -----

Assign

Name: Atributo

Assignments:

Attribute, Hora de llegada, TNOW
<End of list>

Add... Edit... Delete

OK Cancel Help

Assignments

Type: Attribute Name: Hora de llegada

New Value: TNOW HORA ACTUAL

OK Cancel Help

Record

Name: CLIENTES INGRESAN

Statistic Definitions:

Count, 1, No. CLIENTES INGRESAN
<End of list>

Add... Edit... Delete

OK Cancel Help

Statistic Definition

Type: Count

Type NOTE: Increments / Decrements the Counter Name by the Value specified

Value: 1 Record into Set

Counter Name: CLIENTES INGRESAN

OK Cancel Help



Process

Name: Caja Type: Standard

Action: Seize Delay Release Priority: Medium(2)

Resources:

- Resource, Cajero, 1
- <End of list>

Add... Edit... Delete

Delay Type: Normal Units: Minutes Allocation: Value Added

Value (Mean): 1.5 Std Dev: 0.2

Report Statistics

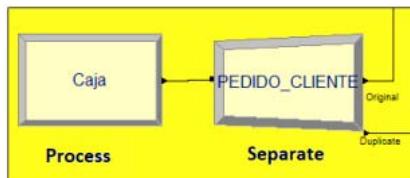
OK Cancel Help

Resources

Type: Resource

Resource Name: Cajero Units to Seize/Release: 1

OK Cancel Help



Separate desdobra al pedido del Cliente.
Cuando se hace el pedido una parte va a la Caja, mientras que el Cliente va a un lugar de espera.

Separate

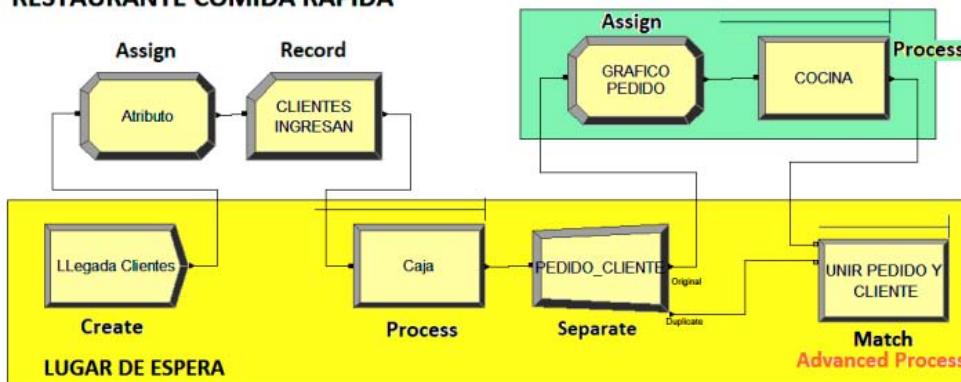
Name: PEDIDO_CLIENTE Type: Duplicate Original

Percent Cost to Duplicates (0-100): # of Duplicates:

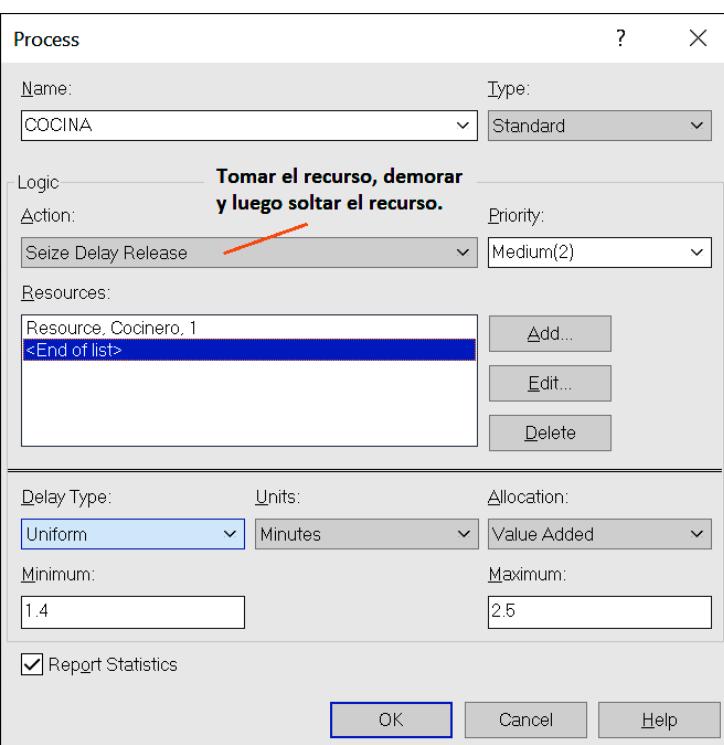
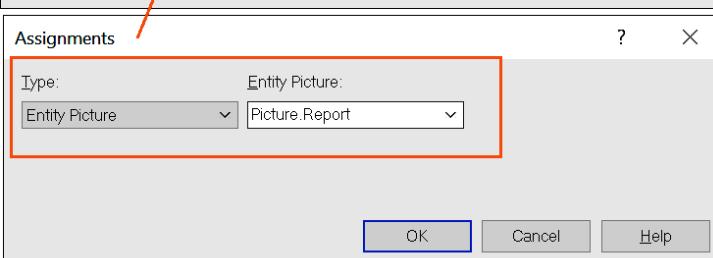
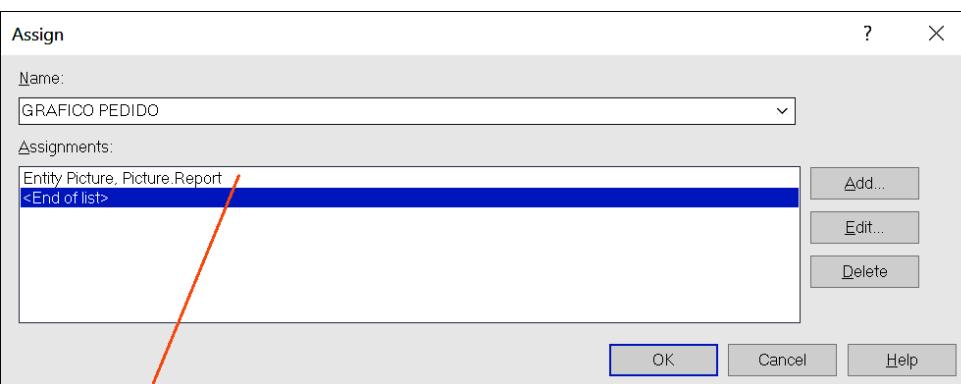
50 % 1

OK Cancel Help

**Se duplica el pedido.
 El Costo no se utiliza.**

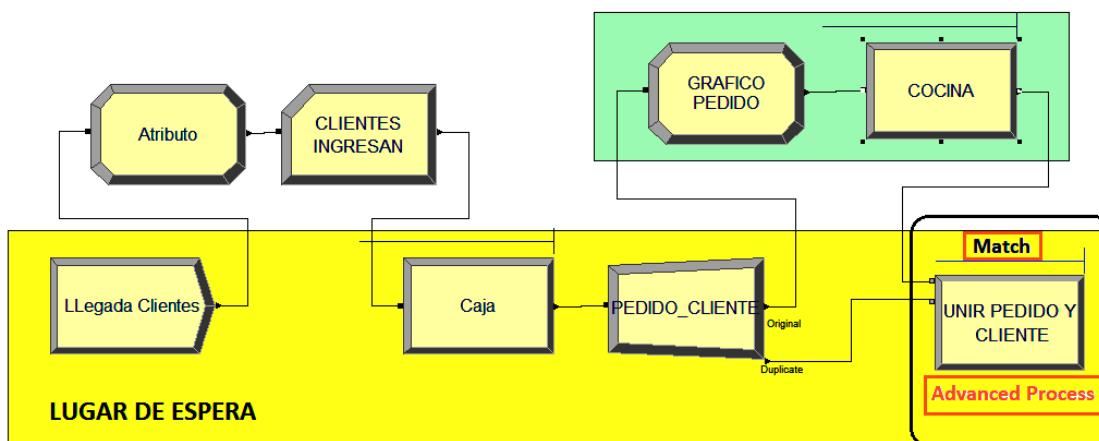

RESTAURANTE COMIDA RÁPIDA


Antes de entrar en el Proceso de Cocina se da cierta característica gráfica con un Assign (Gráfico Pedido) para que en el momento de simular se pueda diferenciar esta parte.



Se da el aspecto gráfico porque se va a duplicar la entidad y que tenga la forma de una figura.

El pedido llega al proceso de Cocina.



Match Advanced Process

Name:	Number to Match:
UNIR PEDIDO Y CLIENTE	2
Type:	Attribute Name:
Based on Attribute	Hora de llegada
Batch Action after Matching:	
Permanent Batch	
Save Criterion:	Representative Entity Type:
First	
<input type="button" value="OK"/> <input type="button" value="Cancel"/> <input type="button" value="Help"/>	

Une las entidades: la entidad del Cliente que quedó esperando (no fue a Cocina) y la entidad que viene por el pedido.

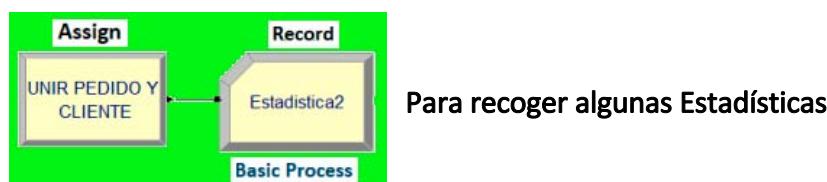
2 Match (el Cliente con su pedido)

Type: Basado en Atributo (tiene que juntar Cliente con su pedido).

La forma de hacerlo es con la Hora de llegada (los dos llegaron a la misma hora).

Batch Action: Permanent (Cuando el pedido se junta con el Cliente es una sola entidad).

Criterio: First (primera entidad que llega) para que se mantenga gráficamente la figura del Cliente.



Record

Name:	Estadistica2
Statistic Definitions:	
Time Interval, Hora de llegada, No, Tiempo en Sistema Count, 1, No, Clientes Atendidos <End of list>	
<input type="button" value="Add..."/> <input type="button" value="Edit..."/> <input type="button" value="Delete"/>	
<input type="button" value="OK"/> <input type="button" value="Cancel"/> <input type="button" value="Help"/>	



Statistic Definition

Type: **Contador Clientes Atendidos**

Count

Type NOTE: Increments / Decrements the Counter Name by the Value specified

Value: 1

Counter Name: Clientes Atendidos

Record into Set

OK Cancel Help

Statistic Definition

Type: **Tiempo en Sistema**

Time Interval

Type NOTE: Records the difference between the current simulation time and

Attribute Name: Hora de llegada

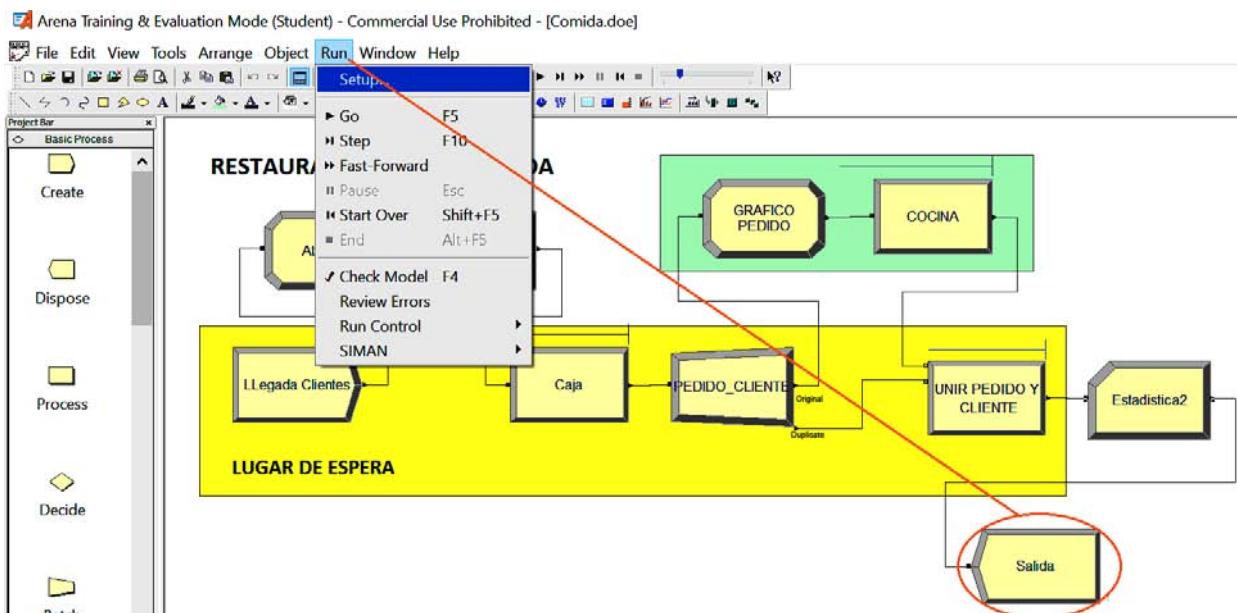
Record into Set

Tally Name: Tiempo en Sistema

OK Cancel Help



Dispose para cerrar el proceso.





Run Setup

Replication Parameters	Array Sizes	Arena Visual Designer
Run Speed	Run Control	Reports
Project Parameters		

Project Title: COMIDA RAPIDA

Analyst Name: ESTADISTICA

Project Description:

Statistics Collection

<input type="checkbox"/> Costing	<input checked="" type="checkbox"/> Queues	<input type="checkbox"/> Transporters
<input checked="" type="checkbox"/> Entities	<input type="checkbox"/> Processes	<input type="checkbox"/> Conveyors
<input checked="" type="checkbox"/> Resources	<input type="checkbox"/> Stations	<input type="checkbox"/> Activity Areas
<input type="checkbox"/> Tanks		

Aceptar **Cancelar** **Aplicar** **Ayuda**

Run Setup

Run Speed	Run Control	Reports	Project Parameters
Replication Parameters	Array Sizes	Arena Visual Designer	

Number of Replications: 1

Initialize Between Replications

Statistics System

Start Date and Time: Estadística

Warm-up Period: 0.0

Time Units: Hours

Replication Length: 2 2 horas de simulación

Time Units: Hours

Hours Per Day: 24

Base Time Units: Minutes

Terminating Condition:

Aceptar **Cancelar** **Aplicar** **Ayuda**

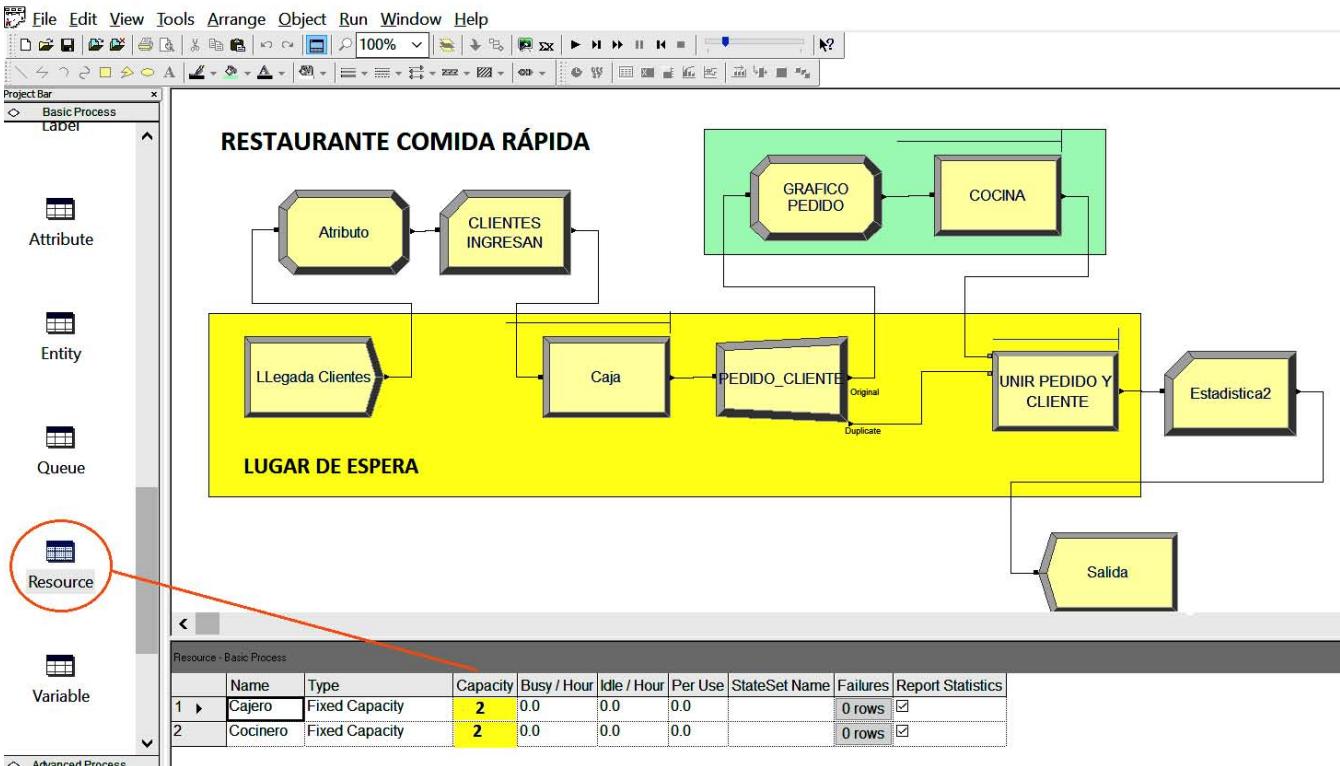


Había 2 empleados (servidores) en Caja y en Cocina.



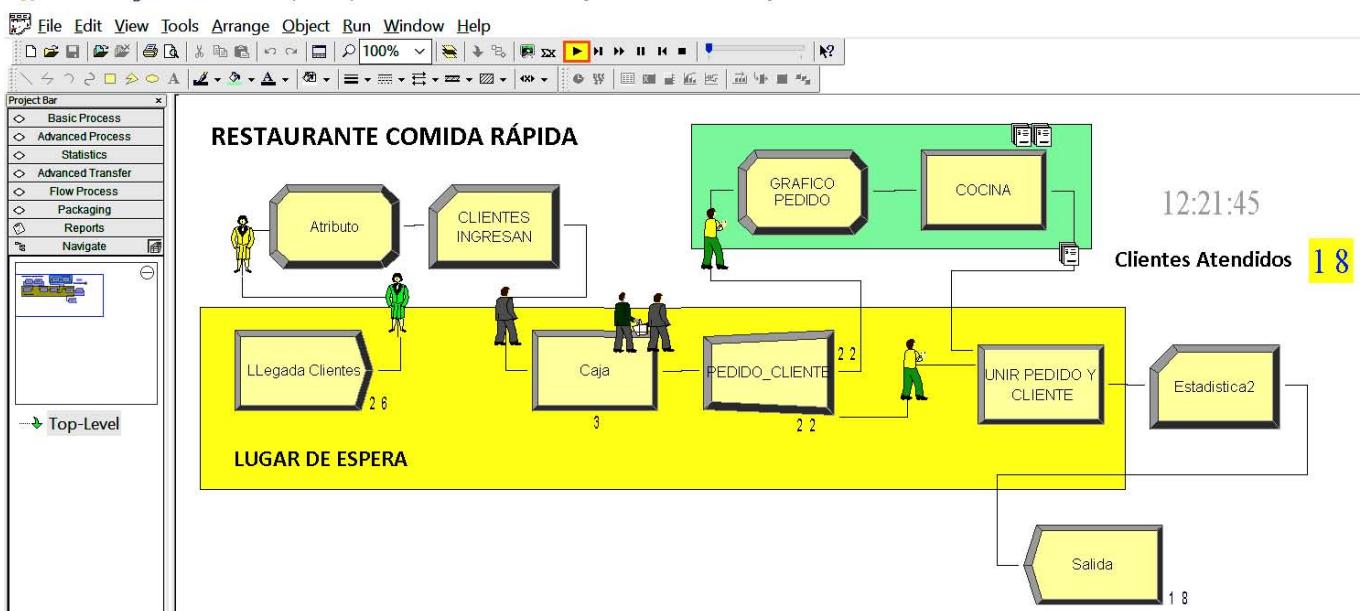
Hay que ir a Resource (Recursos) para aumentar el número de servidores.

Arena Training & Evaluation Mode (Student) - Commercial Use Prohibited - [Comida.doe]

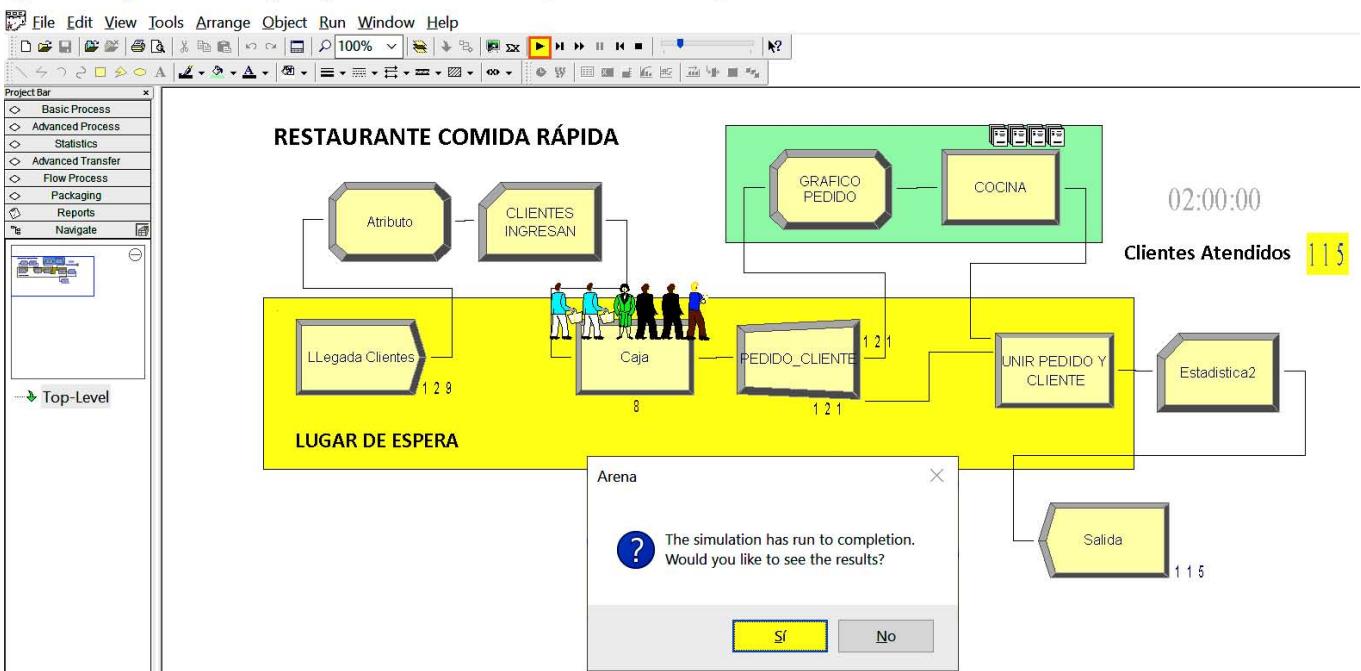




Arena Training & Evaluation Mode (Student) - Commercial Use Prohibited - [Comida.doe - Run Mode]



Arena Training & Evaluation Mode (Student) - Commercial Use Prohibited - [Comida.doe - Run Mode]





Arena Training & Evaluation Mode (Student) - Commercial Use Prohibited - [Comida.doe - Category Overview]

File Edit View Tools Arrange Object Run Window Help

Project Bar: Basic Process, Advanced Process, Statistics, Advanced Transfer, Flow Process, Packaging, Reports, Activity Areas, Category Overview, Category by Replic, Entities, Frequencies, Processes, Queues, Resources, Transfers, User Specified, Tanks.

Category Overview: COMIDA RAPIDA (Entity, Queue, Resource, User Specified).

Entity: Replications: 1, Time Units: Minutes.

Time (Estadística que ofrece Arena):

	Tiempo promedio en el servicio	Para pasar a Caja y para pasar a Cocina
VA Time	Average: 3.4666 (Insufficient)	Half Width, Minimum Value, Maximum Value
NVA Time	Average: 0.00 (Insufficient)	Half Width, Minimum Value, Maximum Value
Wait Time	Average: 8.2489 (Insufficient)	Half Width, Minimum Value, Maximum Value
Transfer Time	Average: 0.00 (Insufficient)	Half Width, Minimum Value, Maximum Value
Other Time	Average: 0.00 (Insufficient)	Half Width, Minimum Value, Maximum Value
Total Time	Average: 7.1215 (Insufficient)	Half Width, Minimum Value, Maximum Value

User Specified (Se recomienda utilizar el especificado como usuario.):

	Tiempo promedio del Cliente en espera
Cliente	Average: 7.1215 (Insufficient)

Arena Training & Evaluation Mode (Student) - Commercial Use Prohibited - [Comida.doe - Category Overview]

File Edit View Tools Arrange Object Run Window Help

Project Bar: Basic Process, Advanced Process, Statistics, Advanced Transfer, Flow Process, Packaging, Reports, Activity Areas, Category Overview, Category by Replic, Entities, Frequencies, Processes, Queues, Resources, Transfers, User Specified, Tanks.

Category Overview: COMIDA RAPIDA (Entity, Queue, Resource, User Specified).

User Specified (Tiempo en el sistema):

	Coincide con el mostrado por Arena
Interval	Average: 7.1215 (Insufficient)

Counter:

	Cliente que salió más rápido	Cliente que más tarde
Count	Value: 115.00	Value: 129.00
Clientes Atendidos	Value: 2.9477	Value: 13.0042
CLIENTES INGRESAN	Value: 2.9477	Value: 13.0042

Figure: Bar chart showing Clientes Atendidos (blue bar) and CLIENTES INGRESAN (orange bar) over time.


[EA] Arena Training & Evaluation Mode (Student) - Commercial Use Prohibited - [Comida.doe - Category Overview]

File Edit View Tools Arrange Object Run Window Help

Project Bar

- ◇ Basic Process
- ◇ Advanced Process
- ◇ Statistics
- ◇ Advanced Transfer
- ◇ Flow Process
- ◇ Packaging
- ◇ Reports

Activity Areas

- Category Overview
- Category by Replic
- Entities
- Frequencies
- Processes
- Queues
- Resources
- Transfers
- User Specified
- Tanks

COMIDA RAPIDA

- Entity
- Queue**
- Resource
- User Specified

Informe principal | /5

Category Overview

COMIDA RAPIDA

Replications: 1 Time Units: Minutes

Queue

Waiting Time	Average	Half Width	Minimum Value	Maximum Value
Caja.Queue	1.0544	(Insufficient)	0.00	4.2032
COCINA.Queue	2.6582	(Insufficient)	0.00	8.0147
UNIR PEDIDO Y CLIENTE.Queue1	0.00	(Insufficient)	0.00	0.00
UNIR PEDIDO Y CLIENTE.Queue2	4.5940	(Insufficient)	1.5170	9.7263

Time

Number Waiting	Average	Half Width	Minimum Value	Maximum Value
Caja.Queue	1.1697	(Insufficient)	0.00	8.0000
COCINA.Queue	2.6384	(Insufficient)	0.00	9.0000
UNIR PEDIDO Y CLIENTE.Queue1	0.00	(Insufficient)	0.00	1.0000
UNIR PEDIDO Y CLIENTE.Queue2	4.5075	(Insufficient)	0.00	11.0000



ARENA: MODELAR COLA BLOQUEADA EN UN SUPERMERCADO

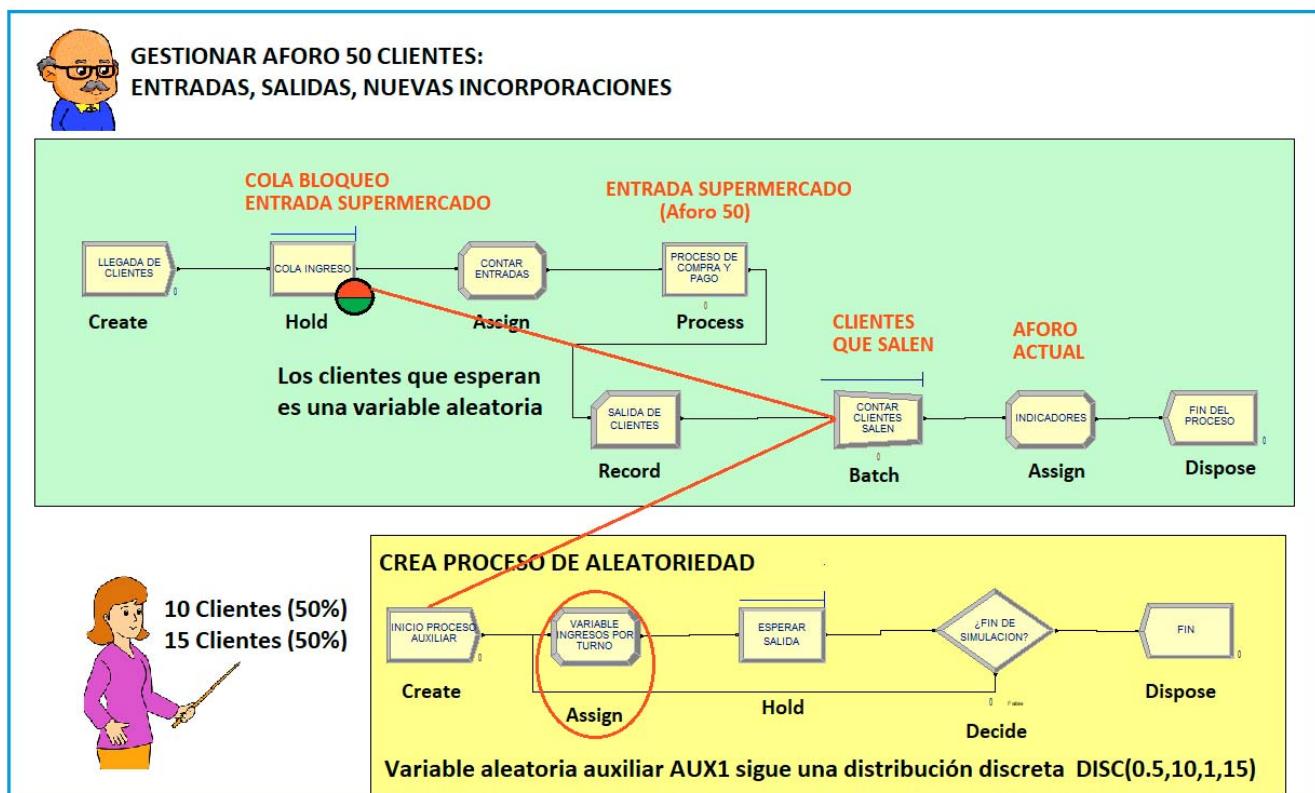
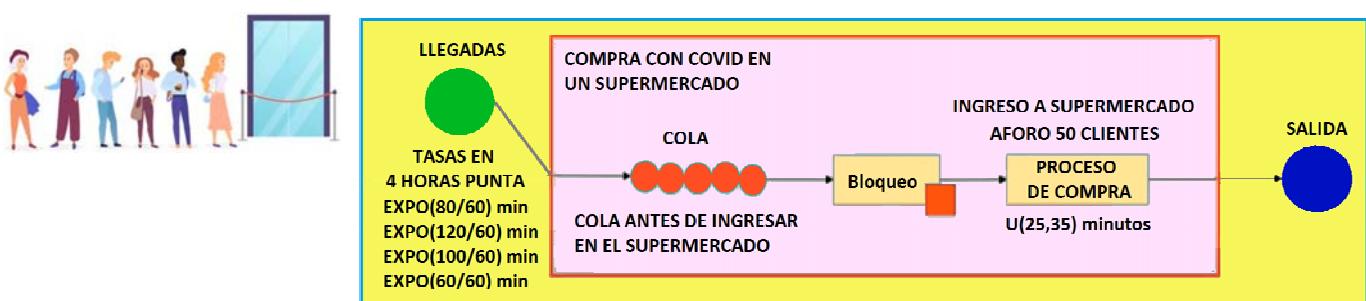


Un Supermercado con el Covid tiene un aforo limitado a 50 personas. Los clientes al llegar tienen que esperar antes de ingresar. En el gráfico adjunto se describe la situación con llegadas en cuatro horas punta, con sus respectivas tasas de llegadas.

El proceso de compra sigue una distribución uniforme U(25, 35) minutos. Los clientes ingresan de 10 o 15 de forma aleatoria.

Calcular las medidas de rendimiento en una simulación de cuatro horas.

Solución:





Create

Name: LLEGADA DE CLIENTES Entity Type: CLIENTE

Type: Schedule Name: HORARIO

Entities per Arrival: Max Arrivals: 1 Infinite

OK Cancel Help

Se introduce la distribución de llegada de clientes.



Double-click here to: Capacity Arrival Other

	Name	Type	Time Units	
1	HORARIO	Arrival	Hours	1.0

Insert Row Delete Row Build Expression... Edit via Dialog... Properties...

Name: HORARIO Type: Arrival Time Units: Scale Factor: Hours 1.0

File Name: El factor va a cambiar cada hora

Durations:

80, 1	Add...
120, 1	Edit...
100, 1	Delete
60, 1	
<End of list>	

OK Cancel Help



Process

Name: PROCESO DE COMPRA Y PAGO Type: Standard

Logic:

Action: Delay

Delay Type: Uniform Units: Minutes Allocation: Value Added

Minimum: 25 Maximum: 35

Report Statistics

OK Cancel Help

El proceso de compra sigue una distribución uniforme U(25, 35) minutos.



Record

Name: SALIDA DE CLIENTES

Statistic Definitions:

- Count, 1, No, SALIDA CLIENTES
- <End of list>

Add... Edit... Delete

OK Cancel Help

Statistic Definition

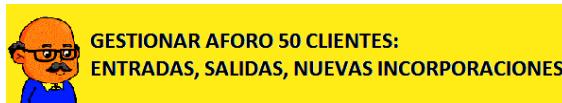
Type: Count

Type NOTE: Increments / Decrements the Counter Name by the Value

Value: 1 Record into Set

Counter Name: SALIDA CLIENTES

OK Cancel Help



Hold

Name: COLA INGRESO Type: Scan for Condition

Condition: Aforo<50

Queue Type: Existe una variable Aforo

Queue: Queue

Queue Name: COLA INGRESO.Queue

OK Cancel Help

**Escanear con la condición de
Aforo<50,
queriendo decir que existe
una variable Aforo.**



Assign

Name: CONTAR ENTRADAS

Assignments:

- Variable, Aforo, Aforo+1
- Attribute, LLEGADA, TNOW
- <End of list>

Add... Edit... Delete

OK Cancel Help

Assignments

Type: Variable Variable Name: Aforo

New Value: Aforo+1

Con la variable Aforo
cuando el Cliente sale
del Bloqueo se suma 1

OK Cancel Help

Assignments

Type: Attribute Attribute Name: LLEGADA

New Value: TNOW

Se registra la hora
actual de llegada
del Cliente

OK Cancel Help



Batch

Name: **CONTAR CLIENTES SALEN** Type: **Permanent**

Batch Size: **AUX1** Save Criterion: **Last**

Rule: **Any Entity**

Representative Entity Type:

Se introduce la variable auxiliar AUX1, donde los Clientes pueden ingresar de 10 o 15.

OK Cancel Help

Se define que los Clientes que van a ingresar de 10 o 15 es una variable aleatoria (AUX1).

Se puede considerar la entrada fija.

En este caso, la aleatoriedad se introduce con un proceso: Se inicia el proceso introduciendo la variable auxiliar AUX1.



Cuando se juntan los Clientes en el Batch (alimentado por el proceso auxiliar) la persona encargada del Supermercado da el PASE en el Assing cuando salga la entidad.



Assign

Name: **INDICADORES**

Assignments:

Variable, Aforo, Aforo-AUX1
Variable, AUX2, 1
<End of list>

Add... Edit... Delete

OK Cancel Help

Se actualiza la variable Aforo, que es el Aforo menos las personas que salieron: $Aforo - AUX1$

Como el Aforo se redujo libera la Cola inicial bloqueada para que una cantidad de Clientes ingresen en Cola (Assing)

Assignments

Type: Variable Variable Name: **Aforo**

New Value: **Aforo-AUX1**

OK Cancel Help

Se actualiza la variable auxiliar AUX2 = 1 permitiendo que el Hold del proceso auxiliar pase la entidad y si todavía no acaba la simulación TNOW == 240 minutos (4 x 60) vuelve a generar cuántos Clientes por turnos van a ingresar.

Assignments

Type: Variable Variable Name: **AUX2**

New Value: **1**

OK Cancel Help

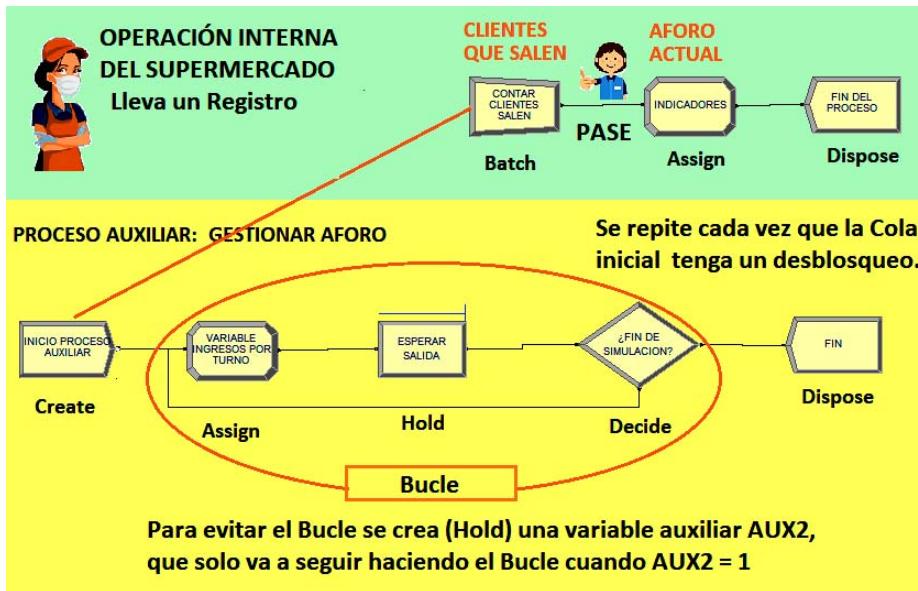


Dispose

Name: FIN DEL PROCESO

Record Entity Statistics

OK Cancel Help



Create

Name: INICIO PROCESO AUXILIAR Entity Type: AUXILIAR

Time Between Arrivals

Type: Constant Value: 1 Units: Minutes

Entities per Arrival: 1 Max Arrivals: 1 First Creation: 0.0

OK Cancel Help

Ingresá una sola entidad, siguiendo un bucle en el proceso de aleatoriedad para indicar en qué momento ingresan más Clientes en el sistema.



Assign

Name: VARIABLE INGRESOS POR TURNO

Assignments:

Variable, AUX2, 0
Variable, AUX1, DISC(0.5,10,1,15)
<End of list>

Add... Edit... Delete

OK Cancel Help



Assignments

Type: Variable Variable Name: AUX2

New Value: 0

OK Cancel Help

La variable auxiliar
AUX2 se pone a 0.

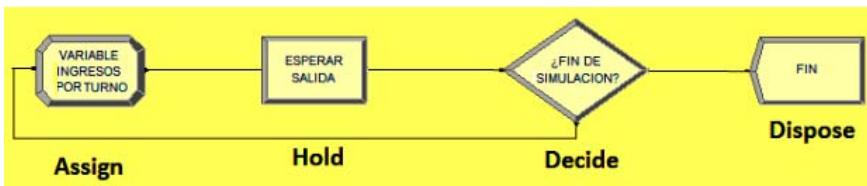
Assignments

Type: Variable Variable Name: AUX1

New Value: DISC(0.5,10,1,15)

OK Cancel Help

Se define que los Clientes que van a ingresar de 10 o 15 es una variable aleatoria (AUX1).
DISC (0.5,10,1,15)



Hold

Name: ESPERAR SALIDA Type: Scan for Condition

Condition: AUX2==1

Queue Type: Queue

Queue Name: ESPERAR SALIDA.Queue

OK Cancel Help

El proceso auxiliar se repite cada vez que se haga un PASE o un desbloqueo a la Cola inicial.

Para evitar un bucle en cada momento se introduce un Hold, creando una variable AUX2 que solo va a continuar con el bucle cuando AUX2 == 1

Decide

Name: ¿FIN DE SIMULACION? Type: 2-way by Condition

If: Expression

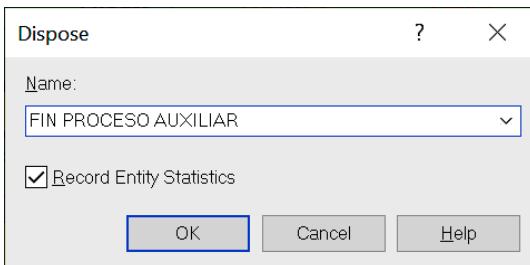
Value: TNOW==240

OK Cancel Help

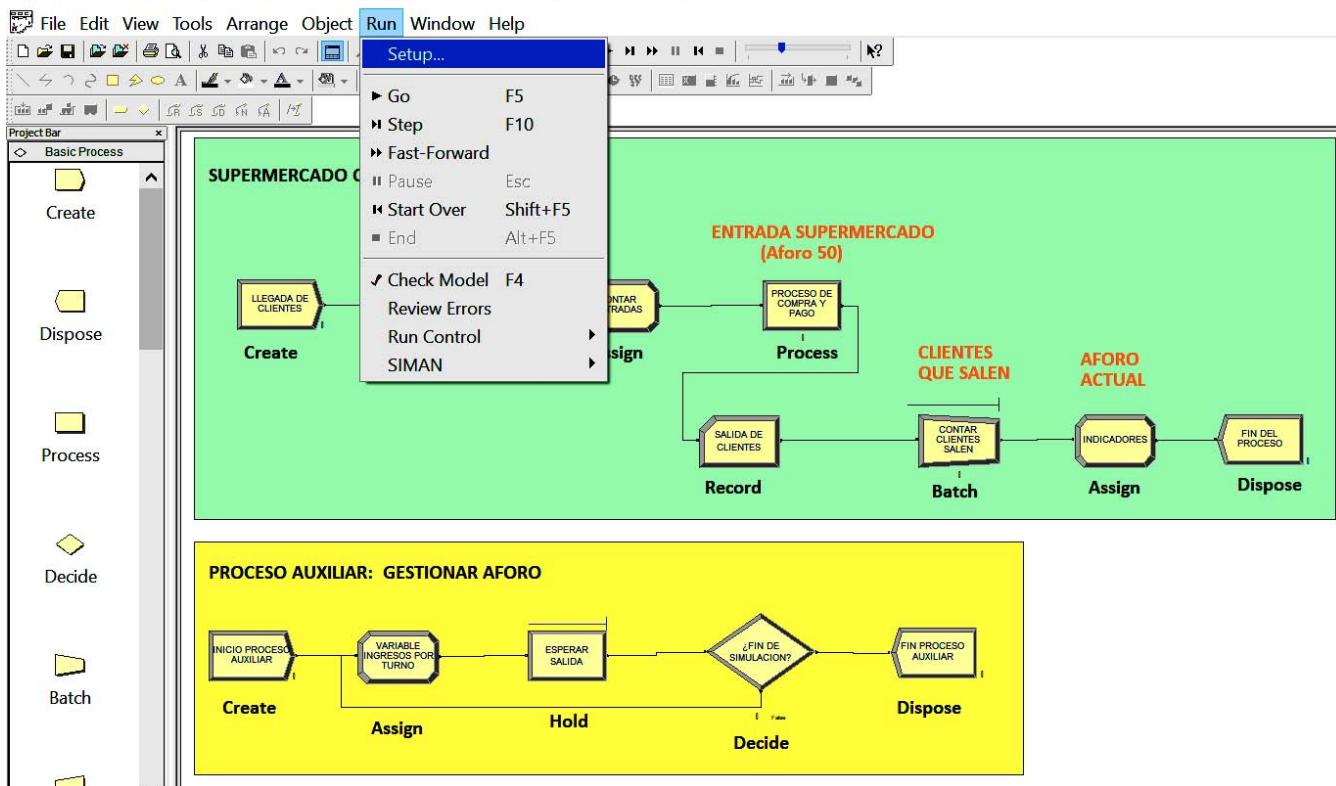
La simulación finaliza cuando transcurren 4 horas (240 minutos)

TNOW == 240

En otro caso, se reitera el proceso.



EA Arena Training & Evaluation Mode - Commercial Use Prohibited - [COMPRA~1.DOE]





Run Setup

Replication Parameters	Array Sizes	Arena Visual Designer
Run Speed	Run Control	Reports
Project Parameters		

Project Title: SUPERMERCADO

Analyst Name: Estadística

Project Description:

Statistics Collection

<input type="checkbox"/> Costing	<input checked="" type="checkbox"/> Queues	<input type="checkbox"/> Transporters
<input checked="" type="checkbox"/> Entities	<input type="checkbox"/> Processes	<input type="checkbox"/> Conveyors
<input checked="" type="checkbox"/> Resources	<input type="checkbox"/> Stations	<input type="checkbox"/> Activity Areas
<input type="checkbox"/> Tanks		

Aceptar Cancelar Aplicar Ayuda

Run Setup

Run Speed	Run Control	Reports	Project Parameters
Replication Parameters	Array Sizes	Arena Visual Designer	

Number of Replications: 1

Initialize Between Replications: Statistics System

Start Date and Time:

Warm-up Period: 0.0

Time Units: Hours

Replication Length: 4

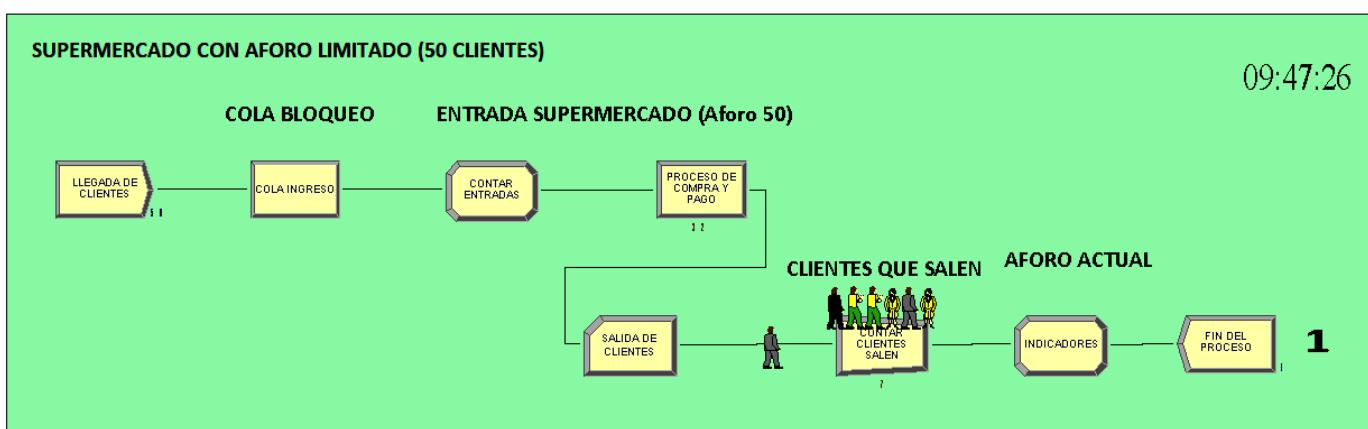
Time Units: Hours

Hours Per Day: 24

Base Time Units: Hours

Terminating Condition:

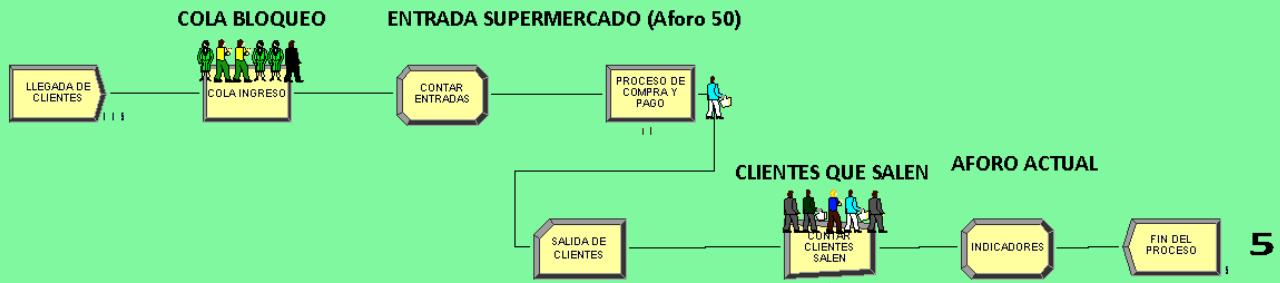
Aceptar Cancelar Aplicar Ayuda



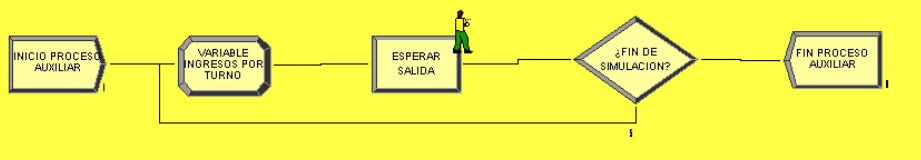


SUPERMERCADO CON AFORO LIMITADO (50 CLIENTES)

10:29:28

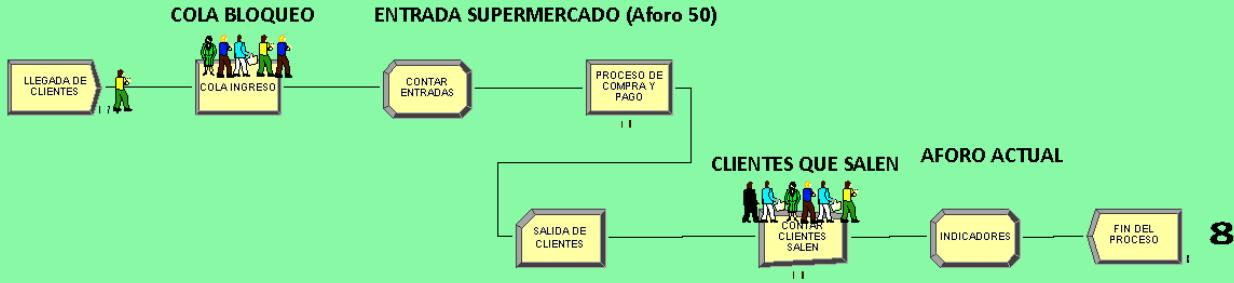


PROCESO AUXILIAR: GESTIONAR AFORO



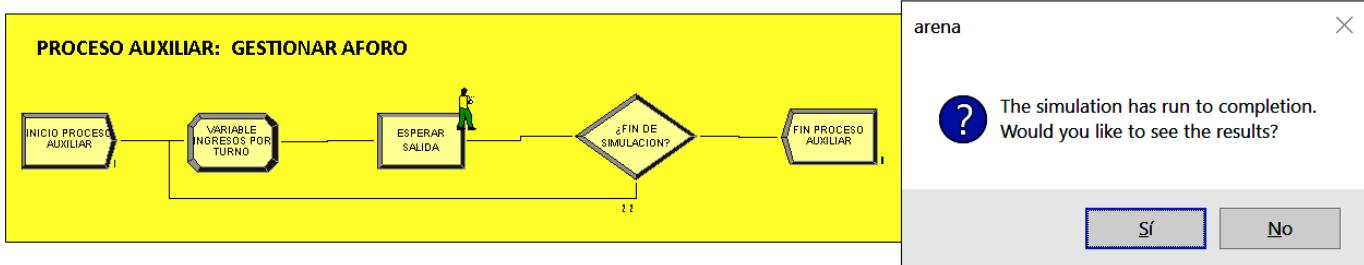
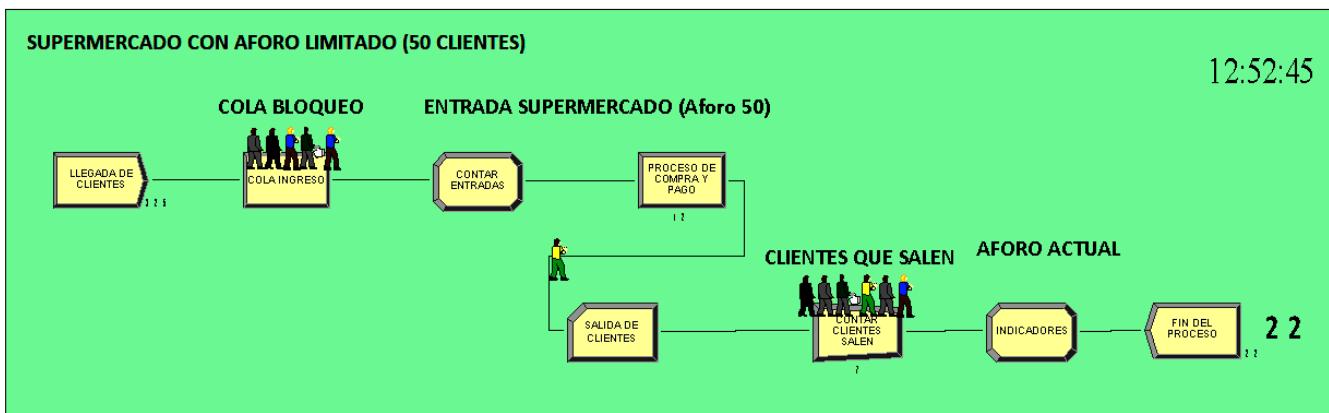
SUPERMERCADO CON AFORO LIMITADO (50 CLIENTES)

10:58:52



PROCESO AUXILIAR: GESTIONAR AFORO







Informe principal | /4 | 3 |

Category Overview

SUPERMERCADO

Replications: 1 Time Units: Hours

Entity

Other

WIP	Average	Half Width	Minimum Value	Maximum Value
AUXILIAR	1.0000	(Insufficient)	0.00	1.0000
CLIENTE	56.2818	(Insufficient)	0.00	90.0000

Process

Time per Entity

VA Time Per Entity	Average	Half Width	Minimum Value	Maximum Value
PROCESO DE COMPRA Y PAGO	0.4947	(Insufficient)	0.4172	0.5820

Total Time Per Entity	Average	Half Width	Minimum Value	Maximum Value
PROCESO DE COMPRA Y PAGO	0.4947	(Insufficient)	0.4172	0.5820

Accumulated Time

Accum VA Time	Value
PROCESO DE COMPRA Y PAGO	140.98

Other

Number In	Value
PROCESO DE COMPRA Y PAGO	333.00

Number Out	Value
PROCESO DE COMPRA Y PAGO	285.00



Informe principal | /4

Category Overview

SUPERMERCADO

Replications: 1 Time Units: Hours

Queue

Time

Waiting Time	Average	Half Width	Minimum Value	Maximum Value
COLA INGRESO.Queue	0.1521	(Correlated)	0.00	0.4388
CONTAR CLIENTES	0.07936774	(Insufficient)	0.00	0.2690
SALEN.Queue				
ESPERAR SALIDA.Queue	0.1731	(Insufficient)	0.06286778	0.6998

Other

Number Waiting	Average	Half Width	Minimum Value	Maximum Value
COLA INGRESO.Queue	12.6599	(Insufficient)	0.00	39.0000
CONTAR CLIENTES	5.6550	(Insufficient)	0.00	15.0000
SALEN.Queue				
ESPERAR SALIDA.Queue	1.0000	(Insufficient)	0.00	1.0000

User Specified

Counter

Count	Value
SALIDA CLIENTES	285.00



ARENA: CONTROL DE PASAJEROS Y EQUIPAJE DE MANO EN UN AEROPUERTO



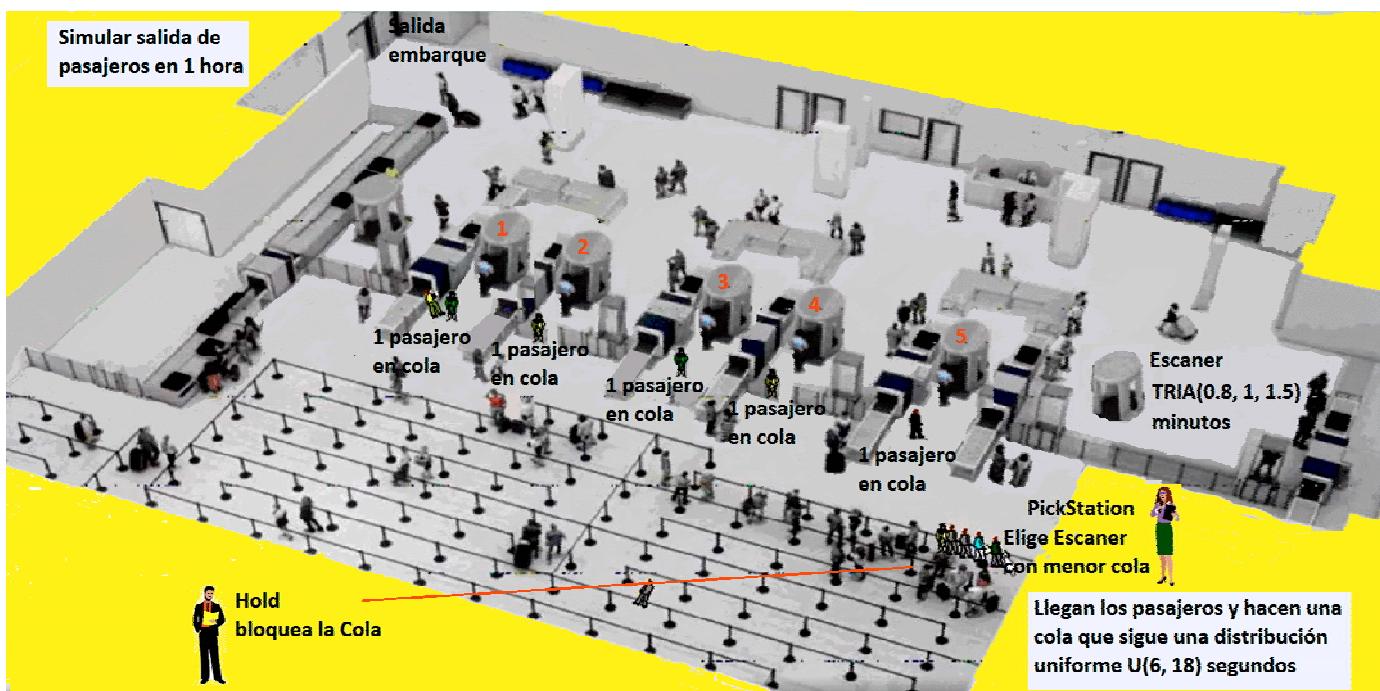
En la hora punta de un aeropuerto los pasajeros hacen cola para entrar al escaneado de pasajeros y equipaje de mano. Hay cinco zonas habilitadas para el escaneo, en cada una de ellas solo pueden permanecer dos pasajeros (en cola y escaneo), que van descongestionando la cola de entrada.

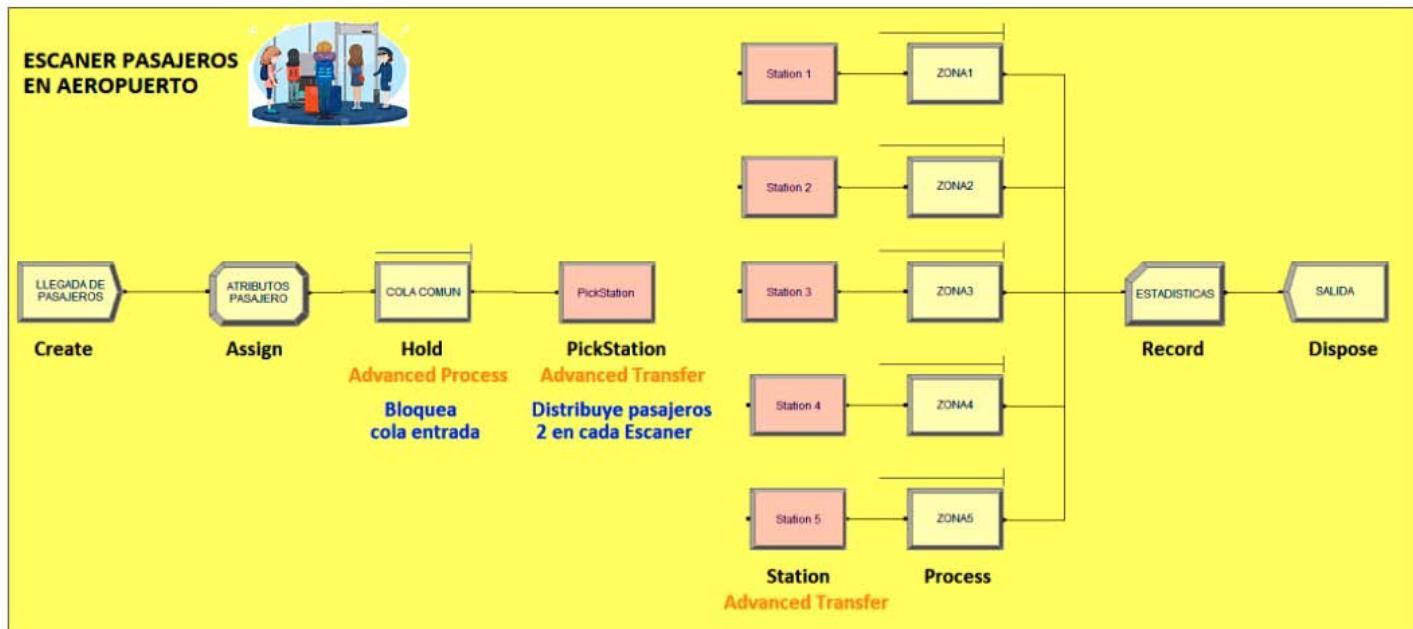
La cola inicial de bloqueo sigue una distribución uniforme U(6,18) segundos, mientras que la cola de la zona de escaneo tiene una distribución triangular TRIA(0.8,1,1.5) minutos.

Hacer una simulación del modelado durante 1 hora y calcular las medidas de rendimiento.

Solución:

PLANTEAMIENTO GRÁFICO DEL MODELADO:




PLANTEAMIENTO LÓGICO DEL MODELADO:


Create

Name: LLEGADA DE PASAJEROS Entity Type: PASAJERO

Time Between Arrivals

Type: Expression: Units: UNIF(6,18) Seconds

Entities per Arrival: Max Arrivals: First Creation: 1 Infinite 0.0

OK Cancel Help

Distribución de la llegada de pasajeros a la zona de escaneado de personas y equipaje de mano.

Assign

Name: ATRIBUTOS PASAJERO

Assignments:

Attribute: LLEGADA, TNOW
<End of list>

Add... Edit... Delete

OK Cancel Help

Assignments

Type: Attribute Name: LLEGADA

New Value: TNOW

Se anota la hora actual (TNOW) de entrada

OK Cancel Help



Hold

Name:	Type:
COLA COMUN	Scan for Condition
Condition:	
$\text{NQ}(\text{ZONA1.Queue}) < 1 \text{ OR } \text{NQ}(\text{ZONA2.Queue}) < 1 \text{ OR } \text{NQ}(\text{ZONA3.Queue}) < 1 \text{ OR } \text{NQ}(\text{ZONA4.Queue}) < 1 \text{ OR } \text{NQ}(\text{ZONA5.Queue}) < 1$	
Queue Type:	
Queue	
Queue Name:	
COLA COMUN.Queue	

OK Cancel Help

El módulo Hold bloquea la cola inicial de pasajeros que se forma para entrar a la zona de escáner.

La condición va a ser que una de las cinco zonas de escaneado quede libre.

$\text{NQ}(\text{ZONA1.Queue}) < 1 \text{ OR } \text{NQ}(\text{ZONA2.Queue}) < 1 \text{ OR }$
 $\text{NQ}(\text{ZONA3.Queue}) < 1 \text{ OR } \text{NQ}(\text{ZONA4.Queue}) < 1 \text{ OR }$
 $\text{NQ}(\text{ZONA5.Queue}) < 1$

Señalar que en cada cola hay un solo pasajero, el otro pasajero se encuentra en el proceso de escaneado. Conviene definir antes cada una de las cinco zonas y volver al módulo Hold para introducir la condición.



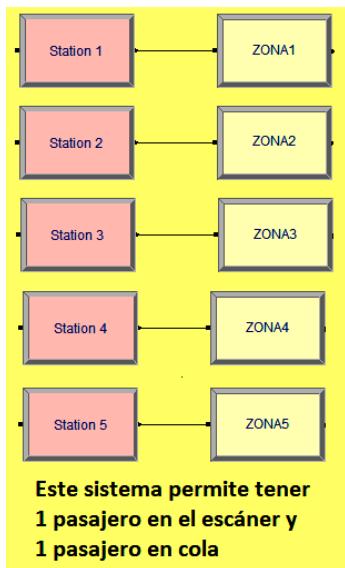
PickStation

Name:	Test Condition:
PickStation	Minimum
Selection Based On	
<input checked="" type="checkbox"/> Number in Queue	<input checked="" type="checkbox"/> Number of Resources Busy
<input type="checkbox"/> Number En Route to Station	<input type="checkbox"/> Expression
Stations:	
Station 1, ZONA1.Queue, S1 Station 2, ZONA2.Queue, S2 Station 3, ZONA3.Queue, S3 Station 4, ZONA4.Queue, S4 Station 5, ZONA5.Queue, S5 <End of list>	
<input type="button" value="Add..."/> <input type="button" value="Edit..."/> <input type="button" value="Delete"/>	
Transfer Type:	
Route	Units:
0.0	Seconds

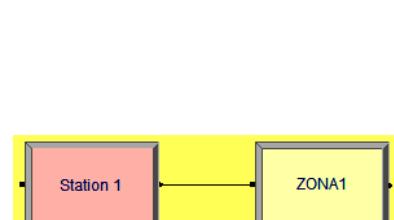
OK Cancel Help

El módulo PickStation permite distribuir a los pasajeros, de forma que cada pasajero vaya a la cola de escáner que se encuentre libre o que tenga menor cola.

Conviene definir antes cada una de las cinco zonas y volver al módulo PickStation para introducir datos de cada zona de escaneado.



Se analiza Station 1 y ZONA1.
Así sucesivamente en los otros cuatro casos.



Station

Name:	Station Type:
Station 1	Station
Station Name:	Station 1
Parent Activity Area:	Associated Intersection:
<input checked="" type="checkbox"/> Report Statistics	

OK Cancel Help



ZONA1

Process

Name: ZONA1 Type: Standard

Action: Seize Delay Release Priority: Medium(2)

Resources:

- Resource, S1, 1 <End of list>

Add... Edit... Delete

Delay Type: Triangular Units: Minutes Allocation: Value Added

Minimum: 0.8 Value (Most Likely): 1 Maximum: 1.5

Report Statistics

OK Cancel Help

Resources

Type: **Resource** (circled in red)

Hay 1 escáner, solo un servidor. Si hubiera más se pondría Set

Resource Name: S1 Units to Seize/Release: 1

OK Cancel Help



COLA COMUN

Hold

Name: COLA COMUN Type: Scan for Condition

Condition: NQ(ZONA1.Queue)<1.OR.NQ(ZONA2.Queue)<1.OR.NQ(ZO)

Queue Type: Queue **Condición para desbloquear la Cola común de espera.**

Queue Name: COLA COMUN.Queue

OK Cancel Help

El módulo Hold bloquea la cola inicial de pasajeros mientras no cumpla la condición:

NQ(ZONA1.Queue)<1.OR.NQ(ZONA2.Queue)<1.
OR.NQ(ZONA3.Queue)<1.
OR.NQ(ZONA4.Queue)<1.OR.NQ(ZONA5.Queue)<1



The screenshot shows the 'PickStation' configuration dialog box. The 'Name' field is set to 'PickStation' and the 'Test Condition' is set to 'Minimum'. Under 'Selection Based On', the 'Number in Queue' checkbox is checked, and the 'Number of Resources Busy' checkbox is also checked. Below this, there is a note in bold: 'Se selecciona la mínima condición de número' (The minimum condition of number is selected). The 'Stations' list contains five entries: 'Station 1, ZONA1.Queue, S1', 'Station 2, ZONA2.Queue, S2', 'Station 3, ZONA3.Queue, S3', 'Station 4, ZONA4.Queue, S4', and 'Station 5, ZONA5.Queue, S5'. At the bottom, there is a note: '<End of list>'. To the right of the stations list are three buttons: 'Add...', 'Edit...', and 'Delete'. The 'Transfer Type' dropdown is set to 'Route'. The 'Route Time' is 0.0 seconds, and the 'Units' are set to 'Seconds'. At the bottom of the dialog are 'OK', 'Cancel', and 'Help' buttons.

El módulo PickStation permite distribuir a los pasajeros, de forma que cada pasajero vaya a la cola de escáner que se encuentre libre o que tenga menor cola.

Se van añadiendo las estaciones:

Stations ? X

Station Name:
Station 1

Queue Name:
ZONA1.Queue

Resource Name:
S1

OK Cancel Help

Stations ? X

Station Name:

Queue Name:

ZONA2 Queue▼

- COLA COMUN Queue
- ZONA1 Queue
- ZONA2 Queue
- ZONA3 Queue
- ZONA4 Queue
- ZONA5 Queue

OK **Cancel** **Help**

Station Name: Station 5

Queue Name: ZONA5.Queue

Resource Name: S5



Record

Name: ESTADISTICAS

Statistic Definitions:

- Count, 1, No, PASAJEROS ATENDIDOS
- Time Interval, LLEGADA, No, TIEMPO EN EL SISTEMA
- Time Between, No, TIEMPO ENTRE SALIDAS
- <End of list>

Statistic Definition

Type: Count

Type NOTE: Increments / Decrements the Counter Name by the Value

Value: 1

Counter Name: PASAJEROS ATENDIDOS

Statistic Definition

Type: Time Interval

Type NOTE: Records the difference between the current simulation time and

Attribute Name: LLEGADA

Tally Name: TIEMPO EN EL SISTEMA

Statistic Definition

Type: Time Between

Type NOTE: Records the difference between the current simulation time

Cada cuánto tiempo hay un pasajero saliendo de la zona de Escanear. Va a la zona de embarque.

Tally Name: TIEMPO ENTRE SALIDAS



Dispose

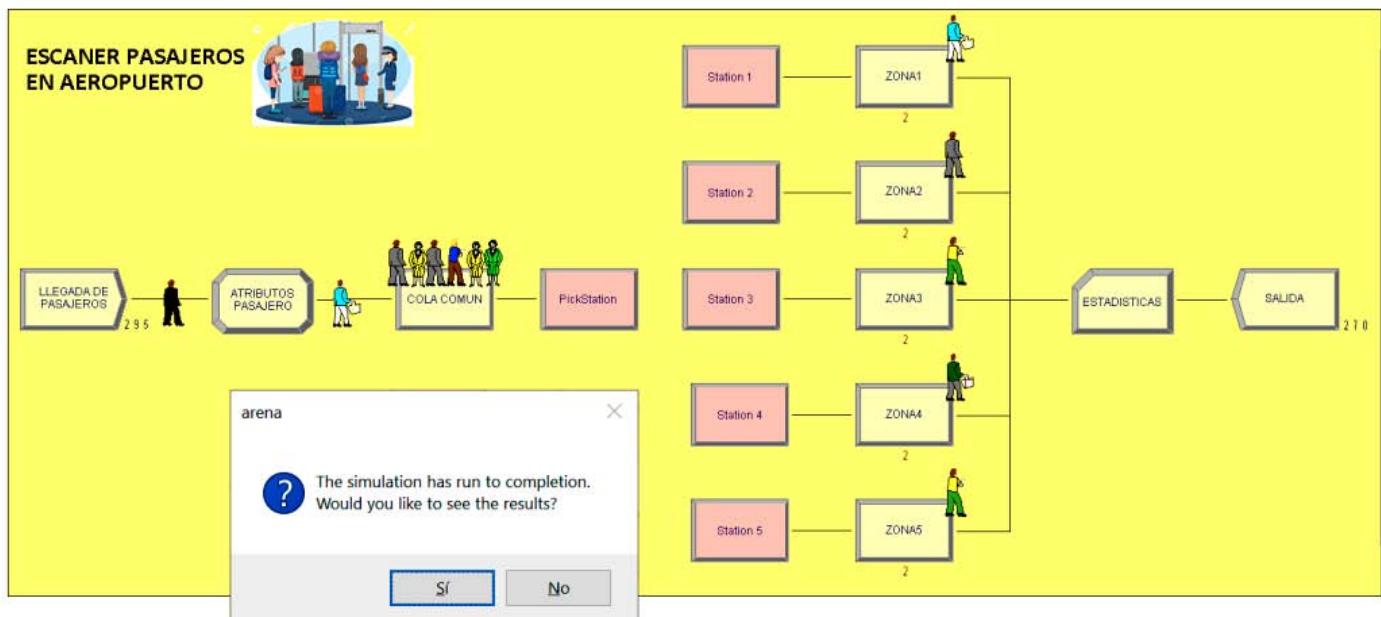
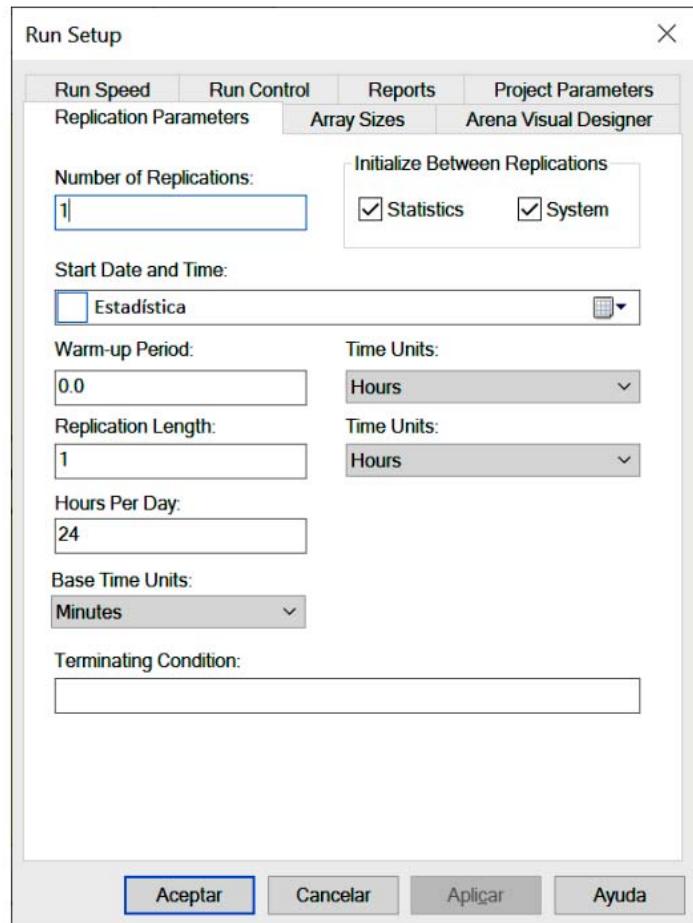
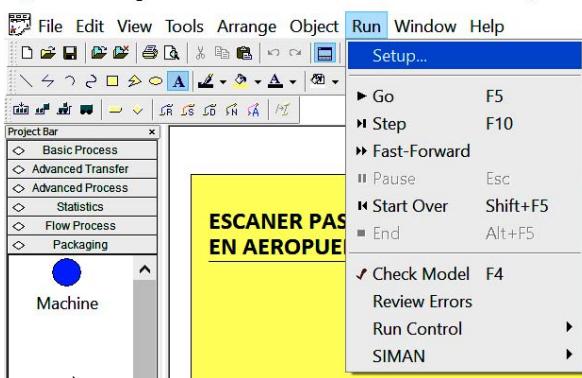
Name: SALIDA

Record Entity Statistics

Finaliza el proceso de simulación.



Arena Training & Evaluation Mode - Commercial Use Prohibited - [CONTR]





Informe principal | 6 /6

Category Overview

ESCANER

Replications: 1 Time Units: Minutes

User Specified

Tally

	Average	Half Width	Minimum Value	Maximum Value
TIEMPO ENTRE SALIDAS	0.2187	(Insufficient)	0.00000104	0.7898
TIEMPO EN EL SISTEMA	3.0699	(Insufficient)	0.8447	5.2695

Counter

Count

PASAJEROS ATENDIDOS	Value
440,000	
400,000	
360,000	
320,000	
280,000	
240,000	
200,000	
160,000	
120,000	
270,000	Value

Informe principal | 3 /6

Category Overview

ESCANER

Replications: 1 Time Units: Minutes

Queue

Time

Waiting Time	Average	Half Width	Minimum Value	Maximum Value
COLA COMUN.Queue	1.0942	(Insufficient)	0.00	3.0640
ZONA1.Queue	1.0243	(Insufficient)	0.00	1.4720
ZONA2.Queue	0.9692	(Insufficient)	0.00	1.4400
ZONA3.Queue	0.9821	(Insufficient)	0.00	1.4243
ZONA4.Queue	0.9252	(Insufficient)	0.00	1.4134
ZONA5.Queue	0.8773	(Insufficient)	0.00	1.3544

Other

Number Waiting	Average	Half Width	Minimum Value	Maximum Value
COLA COMUN.Queue	5.4709	(Correlated)	0.00	15.0000
ZONA1.Queue	0.9491	(Insufficient)	0.00	1.0000
ZONA2.Queue	0.9148	(Insufficient)	0.00	1.0000
ZONA3.Queue	0.8968	(Insufficient)	0.00	1.0000
ZONA4.Queue	0.8539	(Insufficient)	0.00	1.0000
ZONA5.Queue	0.8210	(Insufficient)	0.00	1.0000



Informe principal | /6 | 4 |

Category Overview

ESCANER

Replications: 1 Time Units: Minutes

Resource

Usage

Instantaneous Utilization	Average	Half Width	Minimum Value	Maximum Value
S1	1.0000	(Insufficient)	0.00	1.0000
S2	0.9962	(Insufficient)	0.00	1.0000
S3	0.9884	(Insufficient)	0.00	1.0000
S4	0.9759	(Insufficient)	0.00	1.0000
S5	0.9748	(Insufficient)	0.00	1.0000

Number Busy	Average	Half Width	Minimum Value	Maximum Value
S1	1.0000	(Insufficient)	0.00	1.0000
S2	0.9962	(Insufficient)	0.00	1.0000
S3	0.9884	(Insufficient)	0.00	1.0000
S4	0.9759	(Insufficient)	0.00	1.0000
S5	0.9748	(Insufficient)	0.00	1.0000

Number Scheduled	Average	Half Width	Minimum Value	Maximum Value
S1	1.0000	(Insufficient)	1.0000	1.0000
S2	1.0000	(Insufficient)	1.0000	1.0000
S3	1.0000	(Insufficient)	1.0000	1.0000
S4	1.0000	(Insufficient)	1.0000	1.0000
S5	1.0000	(Insufficient)	1.0000	1.0000

Scheduled Utilization	Value
S1	1.0000
S2	0.9962
S3	0.9884
S4	0.9759
S5	0.9748

Resource	Utilization Value
S1	1.0000
S2	0.9962
S3	0.9884
S4	0.9759
S5	0.9748

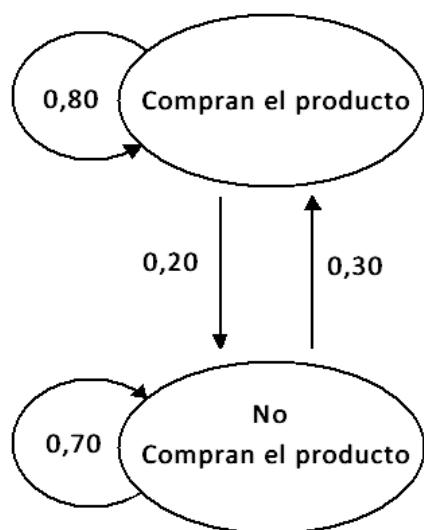




El departamento de estudios de mercado de una fábrica estima que el 20% de la gente que compra un producto un mes, no lo comprará el mes siguiente. Además, el 30% de quienes no lo compren un mes lo adquirirá al mes siguiente.

En una población de 1000 individuos, 100 compraron el producto el primer mes. ¿Cuántos lo comprarán al mes próximo? ¿Y dentro de dos meses?

Solución:



Del 100% de clientes que compra en un mes un producto el 20% no compra el mes siguiente, o sea el 80% lo sigue comprando el siguiente mes.

Del 100% de clientes que quienes no lo compran en un mes, solo el 30% lo adquieren el mes siguiente. Es decir, el 70% no lo compran el siguiente mes.

CADERAS DE MARKOV: Se elabora una matriz 2 x 2 para la situación inicial:

$$P^{(0)} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$$

PRIMER MES: $(C, N) = (100, 900) \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix} = (350, 650)$ El primer mes comprarán 350 personas y no comprarán 650 personas.

SEUNDO MES: $P^{(2)} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,45 & 0,55 \end{pmatrix}$

$(C, N) = (100, 900) \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,45 & 0,55 \end{pmatrix} = (475, 525)$ El segundo mes comprarán 475 personas y no comprarán 525 personas.



Una empresa se plantea la construcción de diversos establecimientos hosteleros en una próxima urbanización residencial. Sabiendo que el proyecto de urbanización consta de tres fases, los técnicos de la empresa estiman los beneficios o pérdidas medias anuales según se acometan las fases de la urbanización.

Los resultados expresados en millones de euros, se reflejan en la siguiente tabla:

Alternativas	Estados de la naturaleza		
	Construcción I Fase	Construcción II Fase	Construcción III Fase
R: Restaurante	12	35	56
HR: Hotel - Restaurante	30	25	38
C: Complejo	-10	8	120

Obtener la decisión óptima que debe adoptar la empresa, según los diferentes criterios de decisión.

Solución:

Se trata de un problema de decisión bajo incertidumbre, al desconocer las probabilidades asociadas a cada estado de la naturaleza.

CRITERIO DE LAPLACE o DE EQUIPROBABILIDAD:

Se supone que todos los estados de la naturaleza son igualmente probables y se calcula la media aritmética de cada una de las decisiones que se pueden tomar, eligiendo aquella que le corresponda el resultado medio más elevado. Cuando los resultados sean negativos se elige el menos desfavorable.

VME (Valor Monetario Esperado) para cada alternativa será:

$$VME(D_1) = \sum_{j=1}^3 x_{1j} \cdot p_j = 12 \times \frac{1}{3} + 35 \times \frac{1}{3} + 56 \times \frac{1}{3} = 34,333 \text{ millones euros}$$

$$VME(D_2) = \sum_{j=1}^3 x_{2j} \cdot p_j = 30 \times \frac{1}{3} + 25 \times \frac{1}{3} + 38 \times \frac{1}{3} = 31 \text{ millones euros}$$

$$VME(D_3) = \sum_{j=1}^3 x_{3j} \cdot p_j = -10 \times \frac{1}{3} + 8 \times \frac{1}{3} + 120 \times \frac{1}{3} = 39,333 \text{ millones euros}$$

La decisión óptima es D_3 , en consecuencia, se construye el complejo hotelero.

CRITERIO MAXIMAX o OPTIMISTA:

Se piensa que de cada alternativa va a pasar lo mejor. Los máximos para cada alternativa son:

R : 56 millones anuales en la construcción de la III Fase

HR : 38 millones anuales en la construcción de la III Fase

C : 120 millones anuales en la construcción de la III Fase

Se elegiría como óptima la alternativa C que podría proporcionar los mayores beneficios: 120 millones de euros anuales. Así pues, desde el criterio Maximax, la empresa construiría un complejo integrado por restaurante, hotel e instalaciones deportivas.



CRITERIO DE WALD o PESIMISTA:

Se supone que de cada alternativa va a pasar lo peor. Los mínimos para cada alternativa son:

R : 12 millones anuales en la construcción de la I Fase

HR : 25 millones anuales en la construcción de la II Fase

C : -10 millones anuales en la construcción de la III Fase

La alternativa óptima según el criterio de Wald es aquella que proporcione la mejor situación posible entre las peores que pudieran presentarse, con lo cual se elegiría la alternativa HR, es decir, construir un hotel con servicio de restaurante

CRITERIO DE HURWICZ o OPTIMISMO PARCIAL:

Se establece un coeficiente de ponderación que mide el nivel de optimismo α y el nivel de pesimismo $(1 - \alpha)$, $0 \leq \alpha \leq 1$.

Para cada alternativa se calcula la combinación convexa: $k(D_i, \alpha) = \alpha \cdot \min_j x_{ij} + (1 - \alpha) \cdot \max_j x_{ij}$

La alternativa óptima D^* para un α fijado, será aquella que: $k(D^*, \alpha) = \max_i k(D_i, \alpha)$

Alternativas	$\min_j x_{ij}$	$\max_j x_{ij}$	$k(D_i, \alpha) = \alpha \cdot \min_j x_{ij} + (1 - \alpha) \cdot \max_j x_{ij}$
D_1	12	56	$k(D_1, \alpha) = \alpha \cdot 12 + (1 - \alpha) \cdot 56 = 56 - 44\alpha$
D_2	25	38	$k(D_2, \alpha) = \alpha \cdot 25 + (1 - \alpha) \cdot 38 = 38 - 13\alpha$
D_3	-10	120	$k(D_3, \alpha) = -\alpha \cdot 10 + (1 - \alpha) \cdot 120 = 120 - 130\alpha$

Para calcular la alternativa óptima se representan gráficamente las rectas $k(D_i, \alpha)$, obteniendo previamente los puntos de corte:

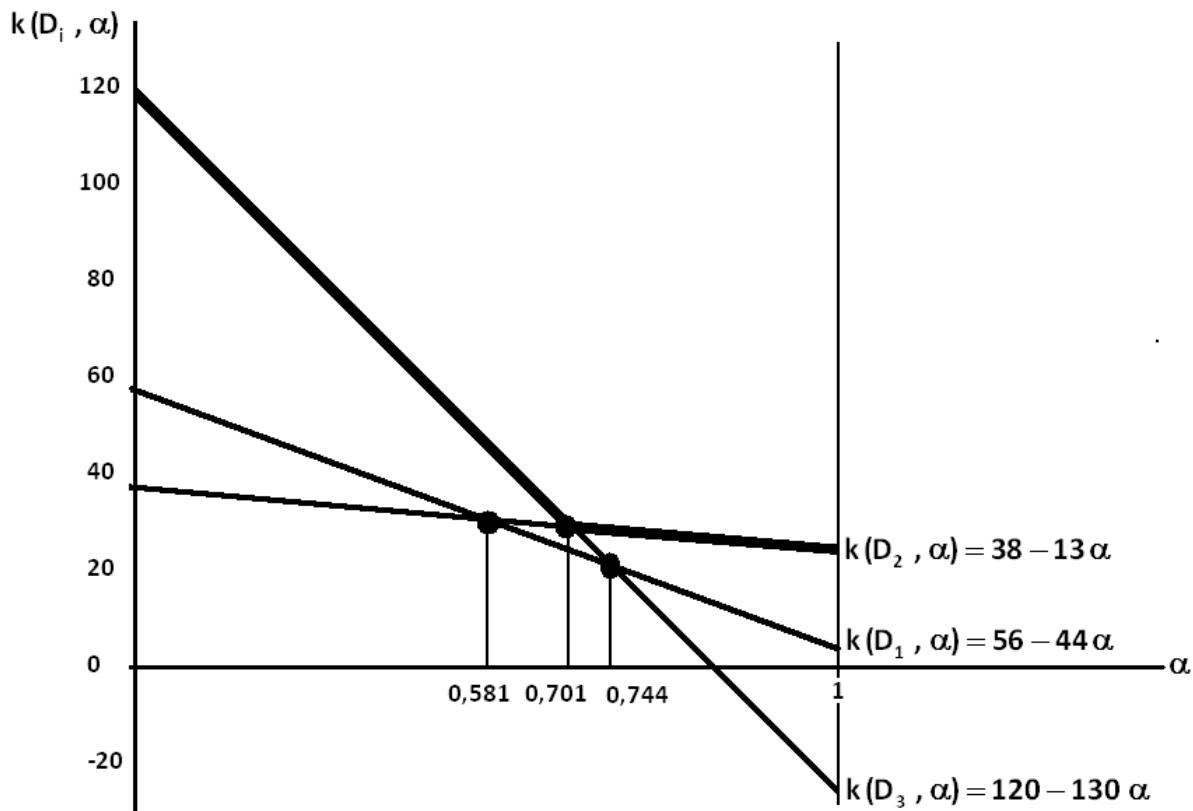
$$\begin{cases} k(D_1, \alpha) = 56 - 44\alpha \\ k(D_2, \alpha) = 38 - 13\alpha \end{cases} \rightarrow 56 - 44\alpha = 38 - 13\alpha \rightarrow \alpha = \frac{18}{31} = 0,581$$

$$\begin{cases} k(D_1, \alpha) = 56 - 44\alpha \\ k(D_3, \alpha) = 120 - 130\alpha \end{cases} \rightarrow 56 - 44\alpha = 120 - 130\alpha \rightarrow \alpha = \frac{64}{86} = 0,744$$

$$\begin{cases} k(D_2, \alpha) = 38 - 13\alpha \\ k(D_3, \alpha) = 120 - 130\alpha \end{cases} \rightarrow 38 - 13\alpha = 120 - 130\alpha \rightarrow \alpha = \frac{82}{117} = 0,701$$



La representación gráfica de las rectas para valores de α , $0 \leq \alpha \leq 1$



Las alternativas que se elegirán dependen de los valores de α :

- ◆ Sí $0 \leq \alpha < 0,701 \rightarrow D^* = D_3$ La empresa decide D_3 , esto es, construir el Complejo
- ◆ Sí $\alpha = 0,701 \rightarrow D^* = D_3$ ó $D^* = D_2$ La empresa es indiferente en construir el Hotel-Restaurante o el Complejo
- ◆ Sí $0,701 < \alpha \leq 1 \rightarrow D^* = D_2$ La empresa decide D_2 , es decir, construir el Hotel-Restaurante


CRITERIO DE SAVAGE O COSTES DE OPORTUNIDAD o PÉRDIDA DE OPORTUNIDAD ESPERADA (POE):

El primer paso es construir la matriz de penalizaciones o costes de oportunidad.

La matriz se forma por columnas, obteniendo el máximo de cada columna y restándole a este valor el valor correspondiente de cada alternativa.

Alternativas	Estados de la naturaleza		
	Construcción I Fase	Construcción II Fase	Construcción III Fase
R: Restaurante	30 – 12 = 18	35 – 35 = 0	120 – 56 = 64
HR: Hotel - Restaurante	30 – 30 = 0	35 – 25 = 10	120 – 38 = 82
C: Complejo	30 – (-10) = 40	35 – 8 = 27	120 – 120 = 0

Obtenida la matriz de penalizaciones se aplica el criterio Minimax.

Alternativas	MATRIZ DE PESAR			Máx	Minimax
	I Fase	II Fase	III Fase		
R	18	0	64	64	
HR	0	10	82	82	
C	40	27	0	40	40

La decisión óptima sera C → Construir el Complejo hotelero.



Un inversionista tiene el objetivo de lograr la máxima tasa posible de retorno. Suponiendo que solo hay tres alternativas posibles $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, siendo $a_1 \equiv$ acciones especulativas , $a_2 \equiv$ acciones de alto grado y $a_3 \equiv$ bonos

Se supone también que pueden ocurrir tres estados posibles de la naturaleza por el periodo de inversión $\theta = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$, siendo $\theta_1 \equiv$ situación de conflicto bélico , $\theta_2 \equiv$ situación económica estable y $\theta_3 \equiv$ depresión económica

No se dispone de información acerca de las probabilidades de ocurrencia de estos estados de la naturaleza. En la siguiente tabla se muestra las estimaciones de las tasas de retorno según la alternativa elegida y el estado de la naturaleza que ocurría.

Alternativas	Estados de la naturaleza		
	θ_1	θ_2	θ_3
a_1	20	2	-8
a_2	12	10	3
a_3	4	6	8

Obtener la decisión óptima que debe adoptar la empresa, según los diferentes criterios de decisión.

Solución:

Se trata de un problema de decisión bajo incertidumbre, al desconocer las probabilidades asociadas a cada estado de la naturaleza.

CRITERIO DE WALD o PESIMISTA (Maximin):

Este criterio es muy pesimista pues supone que al elegir una determinada alternativa ocurrirá el estado de la naturaleza más desfavorable, obteniendo así el peor resultado. De estos peores resultados, se busca el mejor.

Alternativas	Estados de la naturaleza			Peores resultados
	θ_1	θ_2	θ_3	
a_1	20	2	-8	-8
a_2	12	10	3	3
a_3	4	6	8	4

Maximin

La mejor alternativa es invertir en bonos.

CRITERIO MAXIMAX o OPTIMISTA:

Este criterio es todo lo contrario del criterio de WALD, es extremadamente optimista.



Alternativas	Estados de la naturaleza			Peores resultados
	θ_1	θ_2	θ_3	
a_1	20	2	-8	20
a_2	12	10	3	12
a_3	4	6	8	8

Maximax

La mejor alternativa es invertir en acciones especulativas.

CRITERIO DE HURWICZ (Índice α)

Este criterio trata de buscar un equilibrio entre los criterios de WALD y MAXIMAX.

HURWICZ supone que la naturaleza no será tan perjudicial como para suponer que ocurrirá el peor estado de la naturaleza pero tampoco ser extremadamente optimista como para suponer que ocurrirá lo mejor.

HURWICZ asume que se puede medir el grado de optimismo a través de un número índice α , siendo $0 \leq \alpha \leq 1$

Valores de α cercanos a 0 reflejan pesimismo.

Valores de α cercanos a 1 señalan optimismo.

Para cada alternativa a_i se define un coeficiente H_i , denominado coeficiente de Hurwicz.

La alternativa óptima será la que corresponda al valor:

$$\text{PARA COSTOS: } H = \text{Mín } H_i = \text{Mín} [\alpha \cdot \min_j x_{ij} + (1 - \alpha) \cdot \max_j x_{ij}]$$

$$\text{PARA UTILIDADES: } H = \text{Máx } H_i = \text{Máx} [\alpha \cdot \max_j x_{ij} + (1 - \alpha) \cdot \min_j x_{ij}]$$

Si para el inversionista un grado de optimismo es $\alpha = 0,75$

Alternativas	Estados de la naturaleza		
	θ_1	θ_2	θ_3
a_1	20	2	-8
a_2	12	10	3
a_3	4	6	8

$H_1 = 0,75 \times 20 + 0,25 \times (-8) = 13$ Máx H_i
 $H_2 = 0,75 \times 12 + 0,25 \times 3 = 9,75$
 $H_3 = 0,75 \times 8 + 0,25 \times 4 = 7$

La mejor alternativa es invertir en acciones especulativas.

CRITERIO DE SAVAGE (PÉRDIDA DE OPORTUNIDAD)

Savage establece que el decisor puede experimentar un cierto pesar al comprobar que la alternativa elegida le produce un resultado pequeño con respecto a otra que puede haber elegido conociendo ya el estado de la naturaleza que ocurrió.

Propone la construcción de una nueva matriz denominada MATRIZ DE PESAR o de PÉRDIDA DE OPORTUNIDAD.



El primer paso es construir la matriz de penalizaciones o costes de oportunidad.

La matriz se forma por columnas, obteniendo el máximo de cada columna y restándole a este valor el valor correspondiente de cada alternativa.

Alternativas	Estados de la naturaleza		
	θ_1	θ_2	θ_3
a_1	$20 - 20 = 0$	$10 - 2 = 8$	$8 - (-8) = 16$
a_2	$20 - 12 = 8$	$10 - 10 = 0$	$8 - 3 = 5$
a_3	$20 - 4 = 16$	$10 - 6 = 4$	$8 - 8 = 0$

Alternativas	MATRIZ DE PESAR			Máx	Minimax
	θ_1	θ_2	θ_3		
a_1	0	8	16	16	
a_2	8	0	5	8	8
a_3	16	4	0	16	

La mejor alternativa es invertir en acciones de alto grado.

CRITERIO DE LAPLACE (EQUIPROBABILIDAD)

Al desconocer las probabilidades de ocurrencia de los estados de la naturaleza, se elige como mejor alternativa aquella que mejor resultado promedio tenga.

Alternativas	Estados de la naturaleza			Valores promedio	Máximo
	θ_1	θ_2	θ_3		
a_1	20	2	-8	$(20+2-8)/3 = 14/3$	
a_2	12	10	3	$(12+10+3)/3 = 25/3$	25/3
a_3	4	6	8	$(4+6+8)/3 = 18/3$	

La mejor alternativa es invertir en acciones de alto grado.

RESUMEN DE DECISIONES

Criterio	Mejor alternativa
Wald	Invertir en bonos
Maximax	Invertir en acciones especulativas
Hurwicz	Invertir en acciones especulativas
Savage	Invertir en acciones de alto grado
Lapalce	Invertir en acciones de alto grado



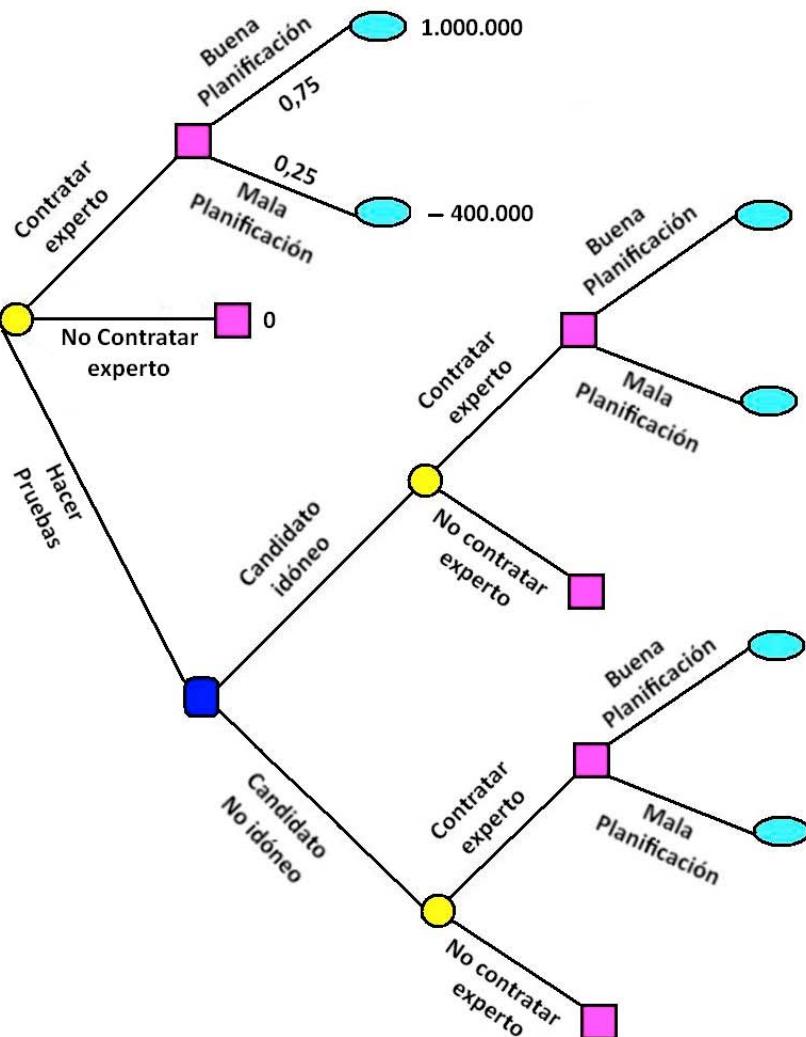
Una empresa considera contratar a un experto en ingeniería para planificar una táctica de operaciones. Una buena planificación conllevaría unos beneficios de 1.000.000 de euros, mientras que si la planificación no es buena acarrearía unas pérdidas de 400.000 euros.

El jefe de recursos humanos estima que la probabilidad de que un experto realice una adecuada panificación es del 75%. Antes de contratar al experto en ingeniería, contempla la opción de realizar unas pruebas de idoneidad al candidato, pruebas que tienen una fiabilidad del 80% para determinar el éxito del candidato en la panificación de operaciones.

Determinar la decisión óptima de la empresa, así como el coste que puede asumir para realizar la prueba de idoneidad.

Solución:

Alternativas	Estados de la naturaleza
Contratar experto ingeniería	Buena Planificación Mala Planificación
No contratar experto ingeniería	
Hacer pruebas idoneidad	Candidato idóneo Candidato No idóneo





Sean los estados de la naturaleza:

$C \equiv$ Candidato idóneo $\bar{C} \equiv$ Candidato No idóneo

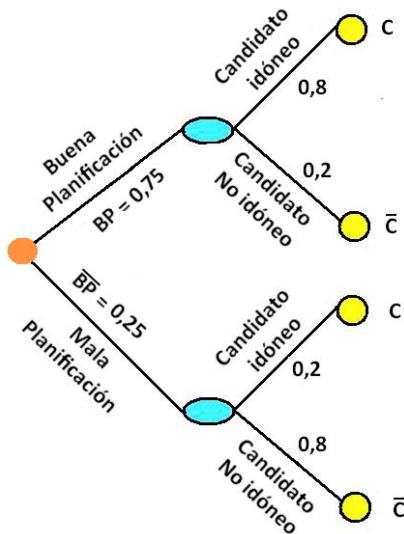
$BP \equiv$ Buena Planificación $\bar{BP} \equiv$ Mala Planificación

Probabilidades a priori y probabilidades condicionadas según el enunciado:

$$P(BP) = 0,75 \quad P(\bar{BP}) = 0,25$$

$$P(C / BP) = 0,8 \quad P(C / \bar{BP}) = 0,2 \quad P(\bar{C} / BP) = 0,2 \quad P(\bar{C} / \bar{BP}) = 0,8$$

Se utiliza el teorema de Bayes para asignar probabilidades a posteriori de cada estado de la naturaleza (Planificación sea buena o mala) y acontecimientos (Candidato idóneo o no).



La probabilidad a priori de cada acontecimiento será:

$$P(C) = P(BP \cap C) + P(\bar{BP} \cap C) = 0,75 \cdot 0,8 + 0,25 \cdot 0,2 = 0,65$$

$$P(\bar{C}) = 1 - P(C) = 1 - 0,65 = 0,35$$

Con lo que, las probabilidades a priori son:

$$P(BP) = 0,75 \quad P(\bar{BP}) = 0,25 \quad P(C) = 0,65 \quad P(\bar{C}) = 0,35$$

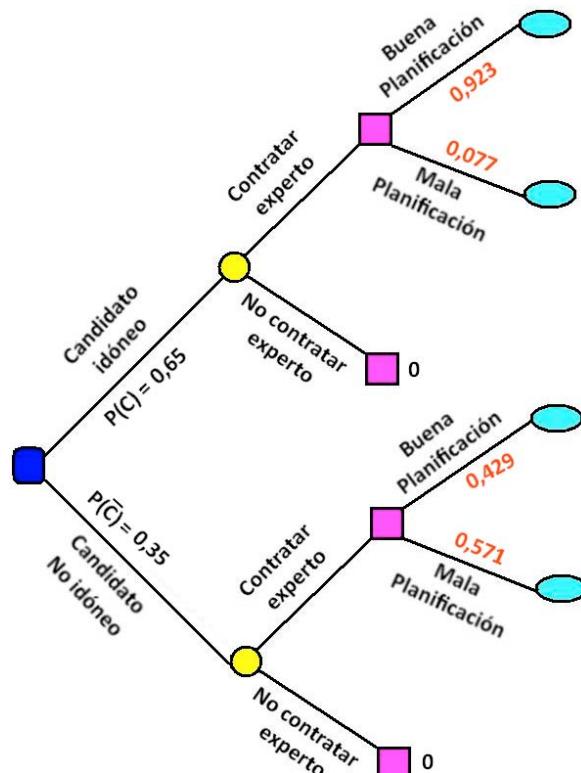
Probabilidades condicionadas a posteriori:

$$P(BP / C) = \frac{P(BP) \cdot P(C / BP)}{P(C)} = \frac{0,75 \cdot 0,8}{0,65} = 0,923$$

$$P(\bar{BP} / C) = 1 - P(BP / C) = 1 - 0,923 = 0,077$$

$$P(BP / \bar{C}) = \frac{P(BP) \cdot P(\bar{C} / BP)}{P(\bar{C})} = \frac{0,75 \cdot 0,2}{0,35} = 0,429$$

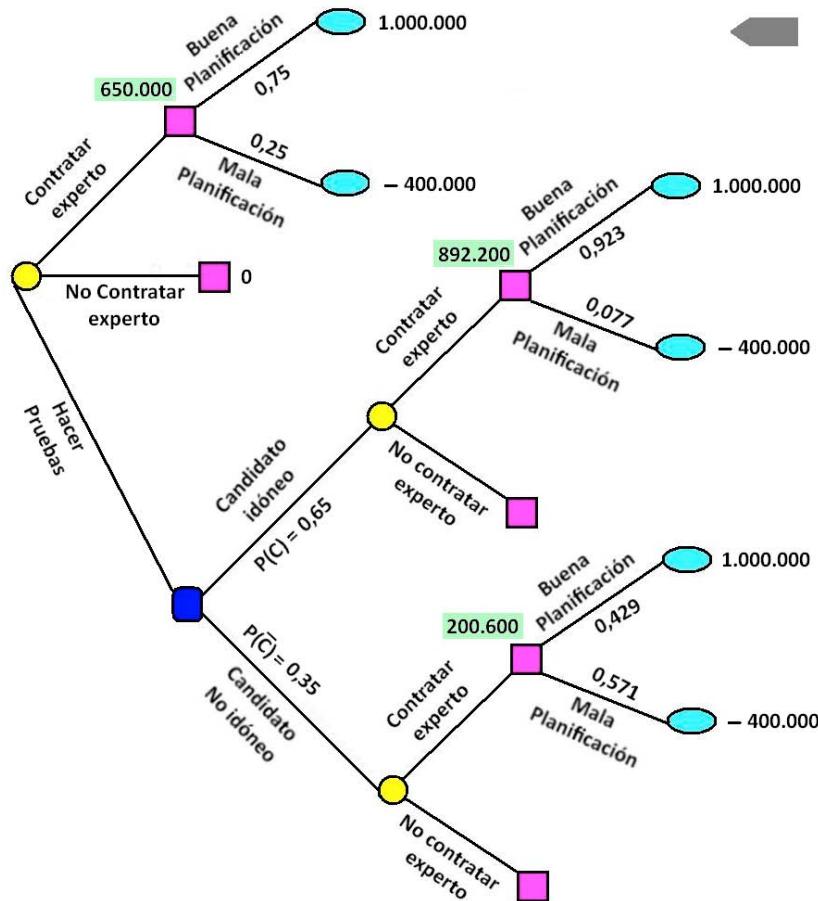
$$P(\bar{BP} / \bar{C}) = 1 - P(BP / \bar{C}) = 1 - 0,429 = 0,571$$





Se determinan los beneficios esperados de cada alternativa, resolviendo el árbol de decisión de derecha a izquierda.

Para ello, dado que la etapa final es probabilística, se aplica la esperanza matemática.



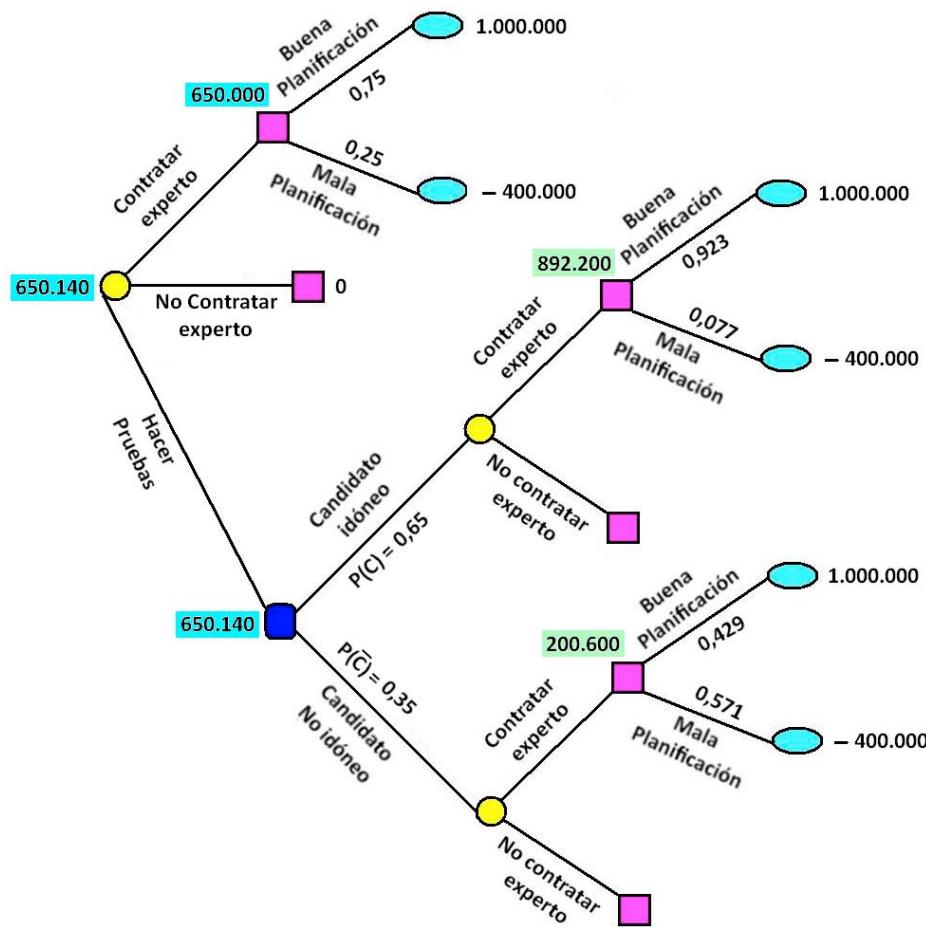
$$1.000.000 \times 0,75 + (-400.000 \times 0,25) = 650.000 \text{ euros}$$

$$1.000.000 \times 0,923 + (-400.000 \times 0,077) = 892.200 \text{ euros}$$

$$1.000.000 \times 0,429 + (-400.000 \times 0,571) = 200.600 \text{ euros}$$

Haciendo las pruebas, el beneficio esperado será:

$$892.200 \times 0,65 + 200.600 \times 0,35 = 650.140 \text{ euros}$$



La decisión óptima para la empresa es hacer las pruebas para determinar la idoneidad del candidato. Si el candidato es idóneo debe contratarlo. En otro caso, si el candidato no es idóneo, también debe contratarlo.

Al tomar esta decisión el beneficio esperado es de 650.140 euros.

Valor Información = $650.140 - 650.000 = 140$ euros

El coste que puede asumir la empresa para realizar las pruebas de idoneidad es como máximo de 140 euros.



Una multinacional tecnológica se plantea abrir una sucursal española, analizando si debe de ser grande o pequeña y si reúne información sobre las ventas previstas. Recoger información sobre las ventas previstas para aconsejar un mercado creciente o decreciente tiene un coste de 500.000 euros, con una probabilidad del 60% de que la información sea favorable.

Si el mercado es creciente las ganancias previstas son de 9.000.000 euros si la sucursal es grande y 3.000.000 si es pequeña. Si el mercado es decreciente puede perder 10.000.000 euros si la sucursal es grande y 5.000.000 euros si es pequeña.

En caso de no reunir información, se estima una probabilidad del 60% de que el mercado sea creciente. Con un informe favorable la probabilidad de un mercado creciente sería del 80%, al mismo tiempo que un informe desfavorable disminuiría la probabilidad de un mercado creciente al 40%.

¿Qué decisión debe tomar la multinacional?

Solución:

La multinacional tiene dos alternativas de decisión

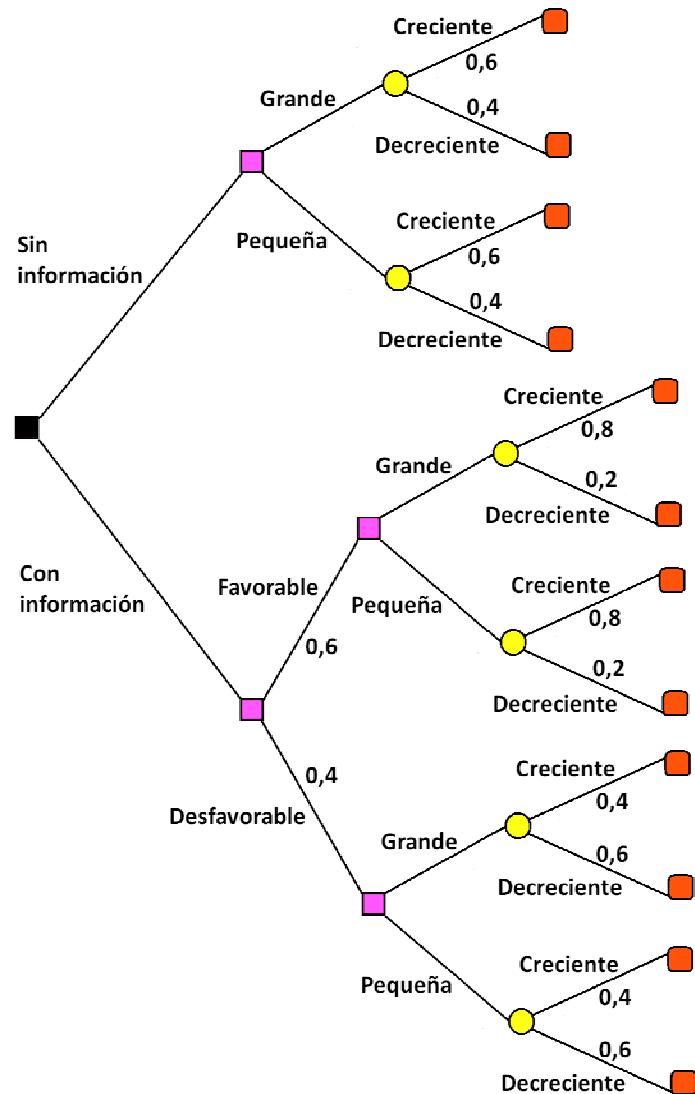
- Reunir información adicional sobre las ventas previstas
- No reunir información sobre las ventas previstas

Los estados de la naturaleza asociados a cada alternativa son:

Alternativas		Estados de la naturaleza	
Con información	Favorable	Grande	Pequeña
	Desfavorable	Grande	Pequeña
Sin información	Sucursal grande	Mercado creciente	Mercado decreciente
	Sucursal pequeña	Mercado creciente	Mercado decreciente

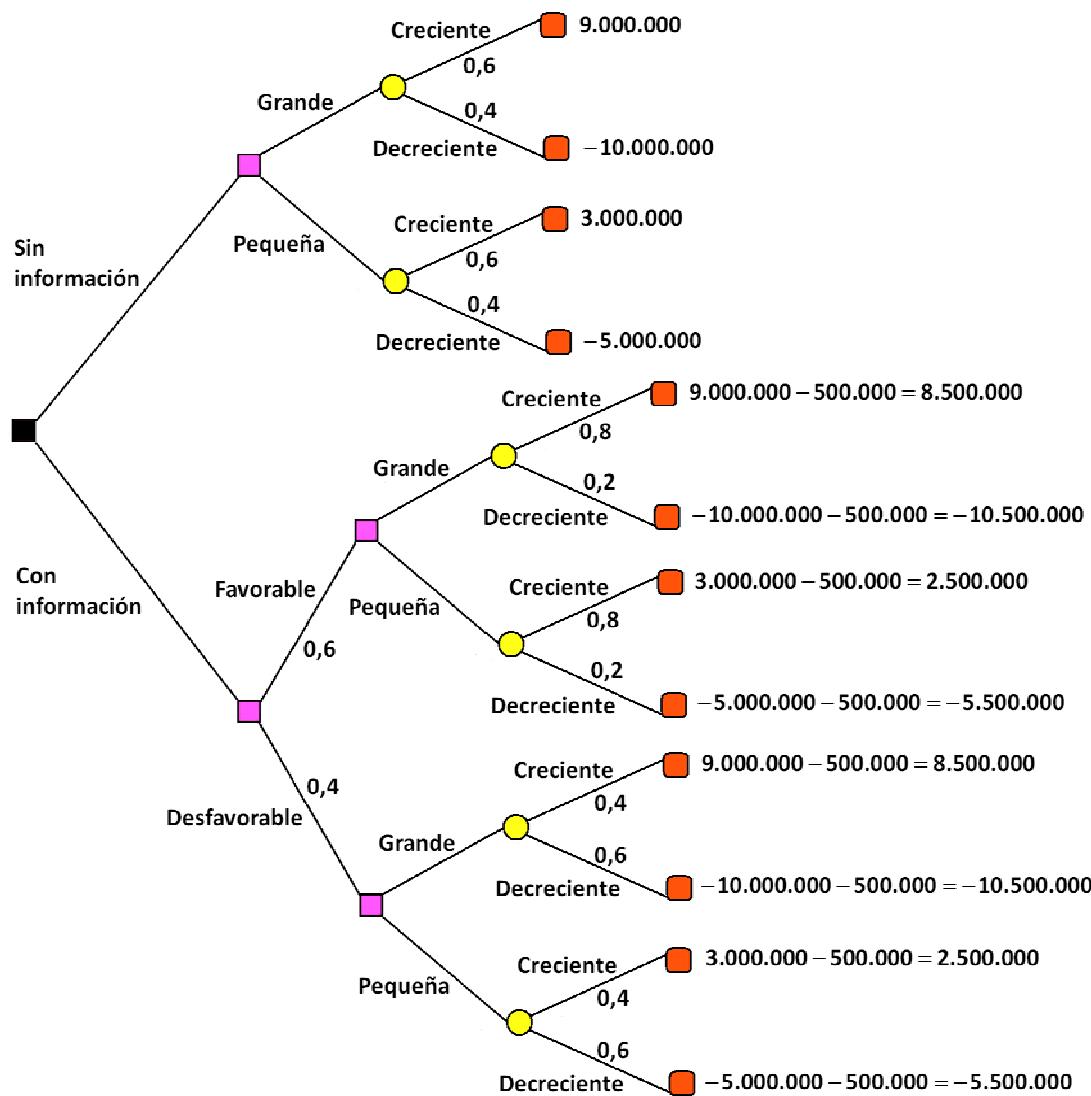


Se crea el árbol de decisión, asignando las probabilidades **a priori** de cada uno de los estados de la naturaleza.



Se calcula el beneficio de cada una de las ramas del árbol:

	Mercado creciente	Mercado decreciente
Sucursal grande	9.000.000 euros	-10.000.000 euros
Sucursal pequeña	3.000.000 euros	-5.000.000 euros



Se resuelve el árbol de decisión hacia atrás (de derecha a izquierda). Siendo la etapa final probabilista, para determinar el beneficio esperado de cada alternativa se aplica el criterio de la esperanza matemática:

$$9.000.000 \times 0,6 + (-10.000.000 \times 0,4) = 1.400.000 \text{ euros}$$

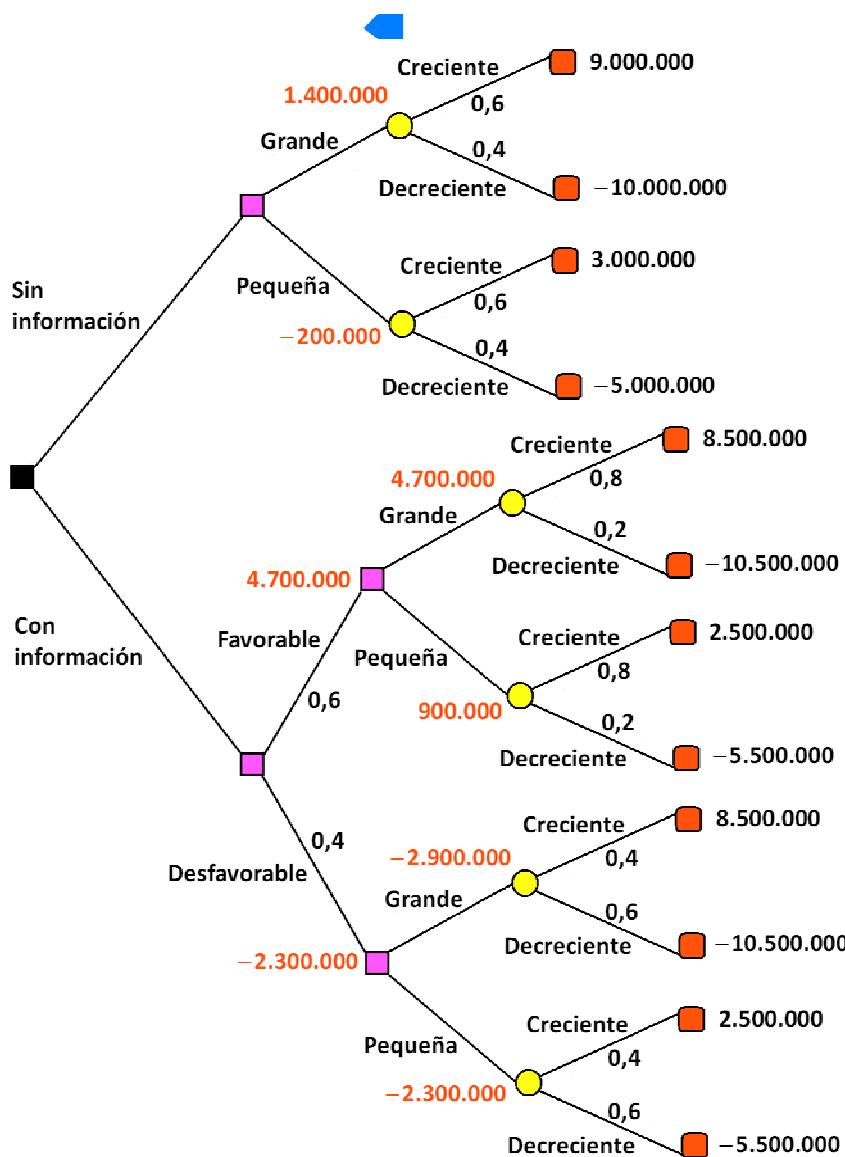
$$3.000.000 \times 0,6 + (-5.000.000 \times 0,4) = -200.000 \text{ euros}$$

$$8.500.000 \times 0,8 + (-10.500.000 \times 0,2) = 4.700.000 \text{ euros}$$

$$2.500.000 \times 0,8 + (-5.500.000 \times 0,2) = 900.000 \text{ euros}$$

$$8.500.000 \times 0,4 + (-10.500.000 \times 0,6) = -2.900.000 \text{ euros}$$

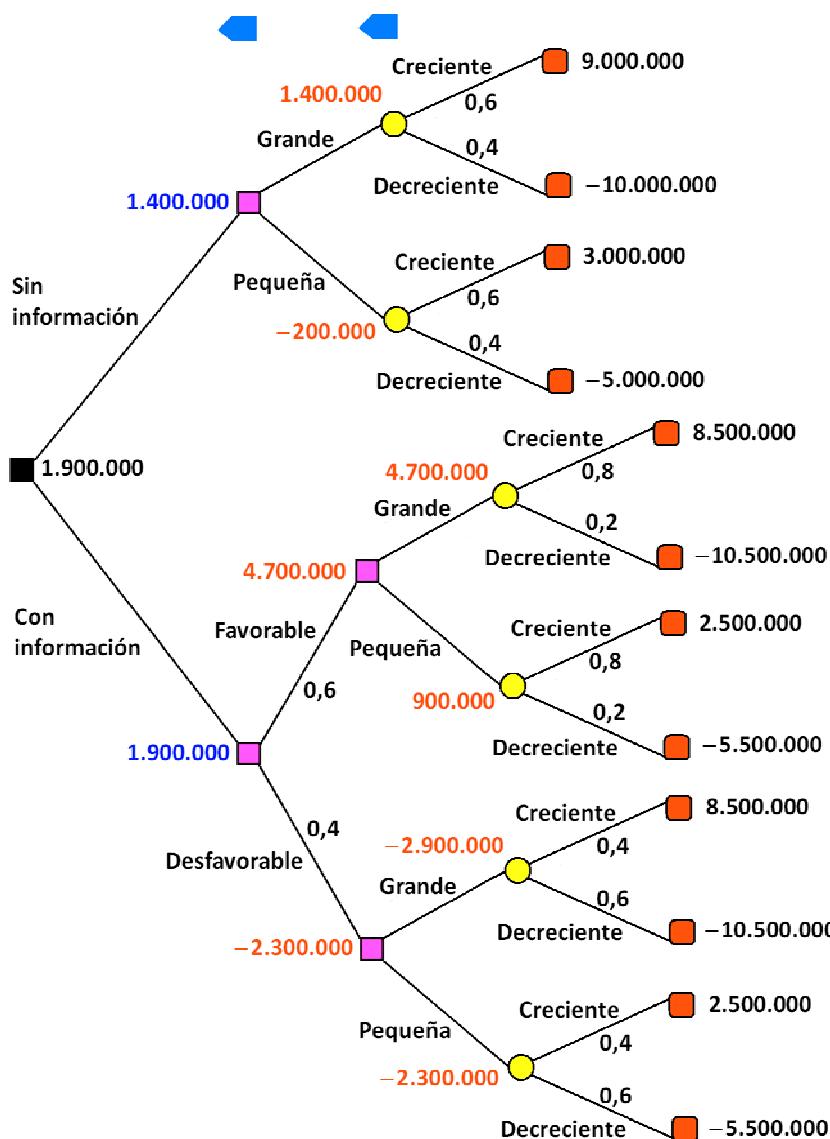
$$2.500.000 \times 0,4 + (-5.500.000 \times 0,6) = -2.300.000 \text{ euros}$$



La penúltima etapa sin información es determinista por lo que se elige la alternativa cuyo beneficio es mayor (1.400.000 euros).

La penúltima etapa con información es probabilista por lo que se tiene que aplicar el criterio de la esperanza matemática para determinar el beneficio esperado.

$$4.700.000 \times 0,6 + (-2.300.000 \times 0,4) = 1.900.000 \text{ euros}$$



El beneficio esperado con reunir información es de 1.900.000 euros, mientras que sin reunir información es de 1.400.000 euros. En consecuencia, la multinacional tiene que tener información sobre las ventas previstas.

Por otra parte, si la información resulta favorable debe abrir una sucursal grande. En otro caso, tiene que abrir una sucursal pequeña.



Las empresas Quintana y Lafuente, respectivamente, actúan por separado y se plantean una cooperación para mejorar resultados. La empresa Quintana (E1) es una S.A, con local de trabajo, 3 propietarios y 13 empleados. La empresa Lafuente (E2) es una S.L, sin local de trabajo, 2 propietarios y 2 empleados.

Se proponen dos modelos: En el Modelo 1 las decisiones son secuenciales (La empresa E1 elige una alternativa del conjunto de alternativas posibles).

En el Modelo 2 las decisiones son simultáneas y secuenciales (La empresa E1 decide dos veces estrategia y en la tercera etapa las empresas deciden de forma simultánea).

La empresa E1 (Quintana) propone acuerdos de dos tipos (estratégicos y operativos) que se describen:

Tipo de acuerdo	Clasificación	Naturaleza del acuerdo
Estratégico	a1	Utilización del mismo nombre comercial: Quintana, para fortalecer la marca y fortalecer el conocimiento de la misma.
Estratégico	a2	Se va a llevar a cabo una segmentación del mercado, para que de esa forma cada empresa se especialice.
Operativo	a3	Utilización de E2 de las mismas instalaciones, tanto como almacén como para oficinas de E1.
Operativo	a4	E1 ofrece todos sus vehículos a E2 para que los utilice, ya que E1 tiene excedente.

La tabla muestra el beneficio que aporta cada alternativa y el crecimiento que supone respecto a la decisión ésta con respecto a la primera decisión de no cooperar, esto es, seguir actuando cada empresa individualmente.

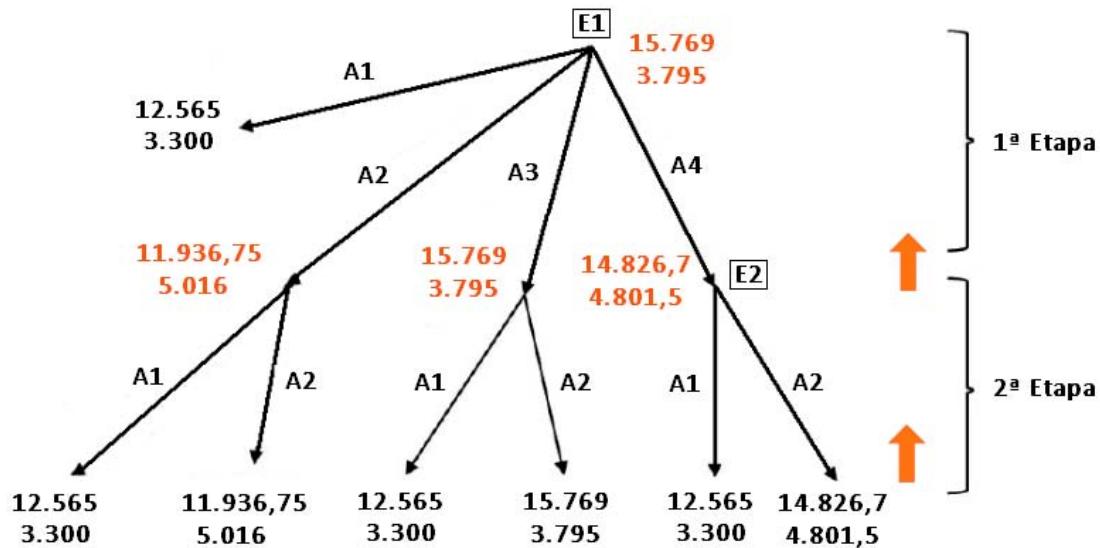
ALTERNATIVAS	Acuerdos	Resultado E1 (euros)	Resultado E2 (euros)	Crecimiento beneficios E1	Crecimiento beneficios E2
A1: No cooperar	Sin acuerdo	12.565	3.300		
A2: Cooperar por razones estratégicas	a1	11.936,75	5.016	-5%	52%
	a2				
A3: Cooperar por razones operativas	a3	15.769	3.795	25,5%	15%
	a4				
A4: Cooperar por ambas razones	a1, a2, a3, a4	14.826,7	4.801,5	18%	45,5%

Se pide la ganancia de las empresas en cada uno de los modelos establecidos

Solución:

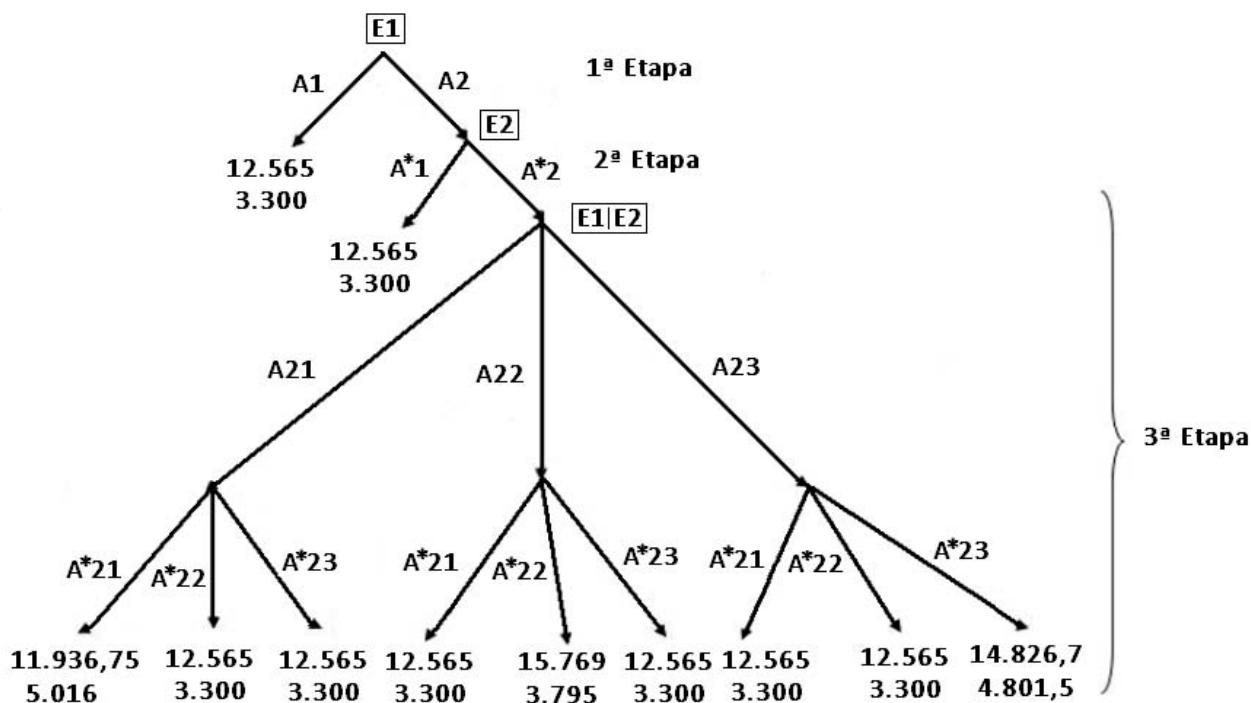


Árbol de decisión del Modelo 1



El resultado del juego según Nash sería que ambas empresas deberían cooperar por razones operativas, ganando E1(Quintana) = 15.769 euros y E2(Lafuente) = 3.795 euros

Árbol de decisión del Modelo 2



En el Modelo 2, la empresa E1 va a decidir dos veces estrategias y en la tercera etapa las empresas van a tomar sus decisiones de forma simultánea.

La primera decisión que toman las empresas es si jugar o no jugar y en la siguiente etapa es el momento en el que eligen de qué forma cooperar (por razones estratégicas, por razones operativas o por ambas razones).



1. La empresa E1 elige una estrategia del conjunto de estrategias posibles $A = \{A_1, A_2\}$
2. La empresa E2 observa qué estrategia ha elegido la empresa E1 y escoge otra alternativa dentro del conjunto factible $A^* = \{A^*1, A^*2\}$
3. Las empresas E1 y E2, que ya han elegido si cooperar o no (deben cooperar porque sino el juego acabaría), deben decidir simultáneamente la forma en que van a cooperar.

Las diferentes formas de cooperación son:

Para la empresa E1: $A_2 = \{A_{21}, A_{22}, A_{23}\}$, para la empresa E2: $A^*2 = \{A^*21, A^*22, A^*23\}$

En la tercera etapa las empresas tienen que elegir su estrategia de forma simultánea, tienen que elegir entre los siguientes resultados:

		E2		
		A^*21	A^*22	A^*23
E1	A_{21}	(11.936,75 , 5.016)	(12.565 , 3.300)	(12.565 , 3.300)
	A_{22}	(12.565 , 3.300)	(15.769 , 3.795)	(12.565 , 3.300)
	A_{23}	(12.565 , 3.300)	(12.565 , 3.300)	(14.826,7 , 4.801,5)

Al resolverse la decisión de forma simultánea no se elige una solución para cada subjuego, cada empresa va a elegir una estrategia sin saber lo que va a elegir la otra empresa. Es decir, cada empresa elegirá el resultado que más le beneficie a sí misma.

Al no encontrar estrategias dominantes, hay que eliminar las estrategias dominadas.

En este planteamiento, las estrategias dominadas son fáciles de eliminar puesto que si no se llega a un acuerdo, no se va a cooperar.

		E2		
		A^*21	A^*22	A^*23
E1	A_{21}	(11.936,75 , 5.016)	(12.565 , 3.300)	(12.565 , 3.300)
	A_{22}	(12.565 , 3.300)	(15.769 , 3.795)	(12.565 , 3.300)
	A_{23}	(12.565 , 3.300)	(12.565 , 3.300)	(14.826,7 , 4.801,5)

Se eliminan las estrategias tachadas, buscando el equilibrio entre las estrategias no dominadas.

→ Para la empresa E1 la mejor estrategia es A22 donde obtiene un beneficio de 15.769 euros, pero como no sabe qué estrategia va a elegir E2, debe pensar en ella antes de elegir la suya.

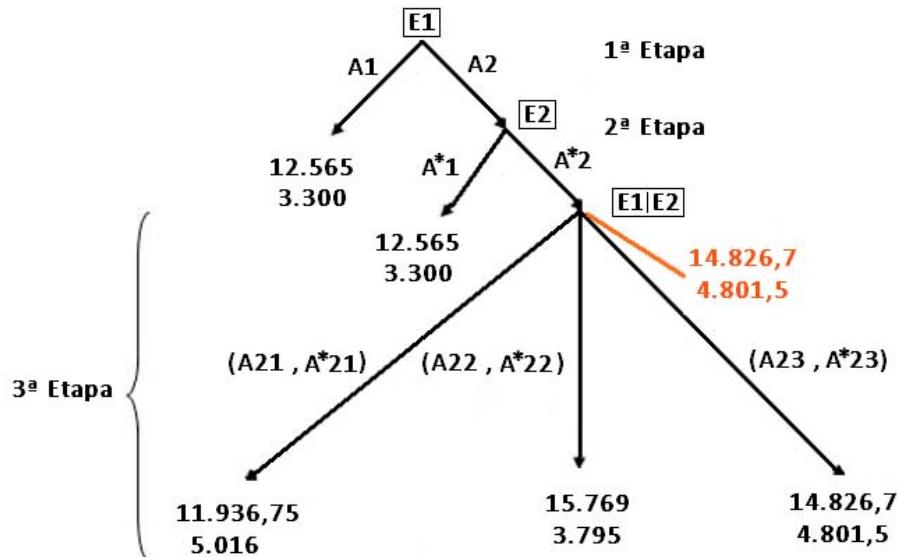
La empresa E1 sabe que la empresa E2 nunca elegirá su estrategia A^*22 , ya que es la que menos ganancia le aporta. Entonces la empresa E1 optará por elegir A23, ya que con esta estrategia sigue obteniendo buenos ingresos (14.826,7 euros, aunque menores que en la otra alternativa) y además para la empresa E2 es también una buena alternativa.

→ La empresa E2 debería elegir A^*21 pues es la estrategia que más le conviene (5.016 euros), pero como no sabe la estrategia que ha elegido la empresa E1, debe pensar en cuál sería la que elegiría.

Sabe que la empresa E1 nunca iba a elegir la opción A21 pues se trata de la estrategia que menos beneficios le aporta (11.936,75 euros). Por tanto, la empresa E2 optará por elegir la estrategia A^*23 , pues con ella obtiene buenos resultados (aunque no los mejores).



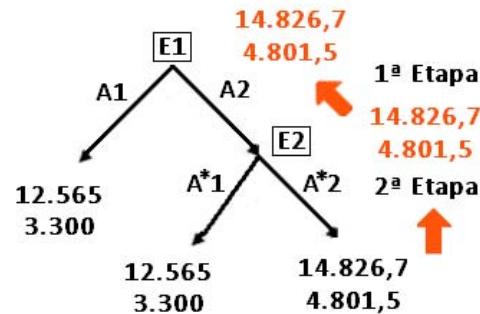
El resultado de esta etapa sería (A_{23} , A^*_{23}), es decir, que las dos empresas cooperarían por ambas razones, el árbol de decisión quedaría como se muestra a continuación, que es el árbol de decisión anterior suprimiendo las estrategias que no sirven por ser dominadas:



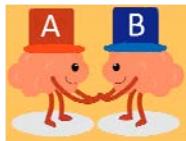
En la etapa 2 la empresa E2 tiene que decidir. Para la empresa E2 la mejor estrategia sería (A_2, A^*_2), numéricamente (14.826,7, 4.801,5), quedando el juego:

El Modelo 2 se resuelve cuando las dos empresas deciden cooperar por ambas razones, ganando 14.826,7 euros la empresa E1 y 4.801,5 euros la empresa E2.

La solución es un óptimo de Pareto, no existe ninguna solución que mejore los resultados de alguna de las dos empresas, sin que eso conlleve que los resultados de alguna empresa empeore.



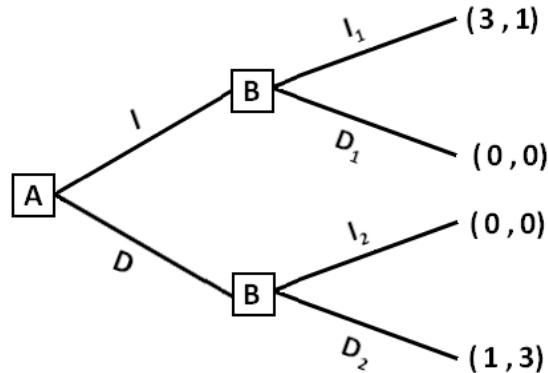




En la figura adjunta se representa en forma extensiva los pagos de las empresas A y B.

a) Calcular equilibrio de Nash en estrategias puras y equilibrio de Nash perfecto en subjuegos, si la empresa B elige sabiendo lo que ha hecho la empresa A.

b) Calcular equilibrio de Nash en estrategias puras y equilibrio de Nash perfecto en subjuegos, si la empresa B elige sin saber lo que ha hecho la empresa A.



Solución:

a) Si la empresa B elige sabiendo lo que ha hecho la Empresa A se tiene un Juego Dinámico con información Completa.

La empresa A tiene cuatro estrategias: $\{(l_1, l_2), (l_1, D_2), (D_1, l_2), (D_1, D_2)\}$

La forma normal o estratégica:

		Empresa B			
		(l_1, l_2)	(l_1, D_2)	(D_1, l_2)	(D_1, D_2)
Empresa A	I	(3, 1)	(3, 1)	(0, 0)	(0, 0)
	D	(0, 0)	(1, 3)	(0, 0)	(1, 3)

Los equilibrios de Nash en estrategias puras son:

		Empresa B			
		(l_1, l_2)	(l_1, D_2)	(D_1, l_2)	(D_1, D_2)
Empresa A	I	$(\bar{3}, \underline{1})$	$(\bar{3}, \underline{1})$	$(\bar{0}, 0)$	$(0, 0)$
	D	(0, 0)	(1, <u>3</u>)	$(\bar{0}, 0)$	$(\bar{1}, \underline{3})$

Equilibrios de Nash: EN = $\{(I, (l_1, l_2)), (I, (l_1, D_2)), (D, (D_1, D_2))\}$

Al ser un juego dinámico con información completa el equilibrio de Nash perfecto en subjuegos (ENPS) se pueden calcular por inducción hacia atrás.

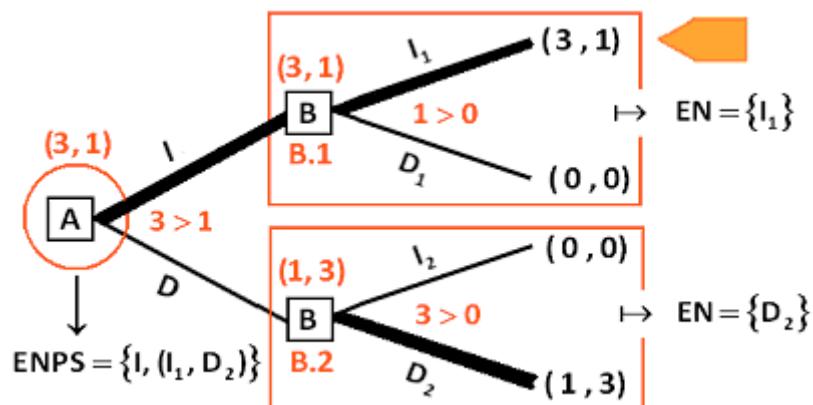
Hay dos formas de buscar los ENPS:

- Ver cuáles de los EN satisfacen la definición de ENPS
- Construir directamente los ENPS, comenzando por los subjuegos que no incluyen otros subjuegos.



En juegos con información completa, la inducción hacia atrás y el ENPS seleccionan los mismos equilibrios.

$$\text{ENPS} = \{(I, (I_1, D_2))\}$$



De los tres equilibrios de Nash en estrategias puras, solo uno es ENPS. Esta inconsistencia temporal observada es lo que se intenta evitar con el equilibrio perfecto en subjuegos.

b) Si la empresa B elige sin saber lo que ha hecho la empresa A se tiene un Juego Dinámico con Información Incompleta.

Lo primero que hay que resolver es el problema de la empresa A.

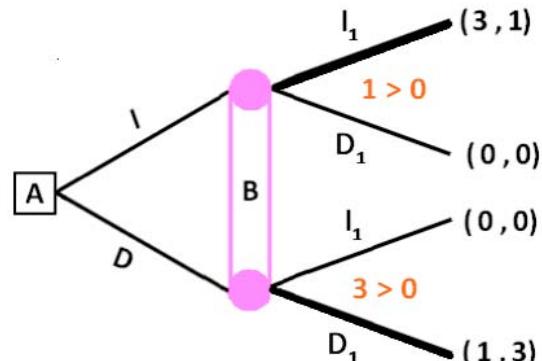
A su vez, la empresa A no puede establecer cuál es su mejor acción hasta no saber que hará la empresa B.

Hay un solo subjuego, el que comienza con la empresa A.

Sí se considera cualquier otro vértice como inicial de otro subjuego se rompería el conjunto de información de la empresa B.

Como el único subjuego es el juego original, los equilibrios perfectos en subjuegos en estrategias puras (ENPS) son los equilibrios de Nash en estrategias puras (EN):

$$\text{ENPS} = \{(I, I_1), (D, D_1)\}$$



La forma estratégica o normal asociada:

		Empresa B	
		I ₁	D ₁
Empresa A	I	(3, 1)	(0, 0)
	D	(0, 0)	(1, 3)

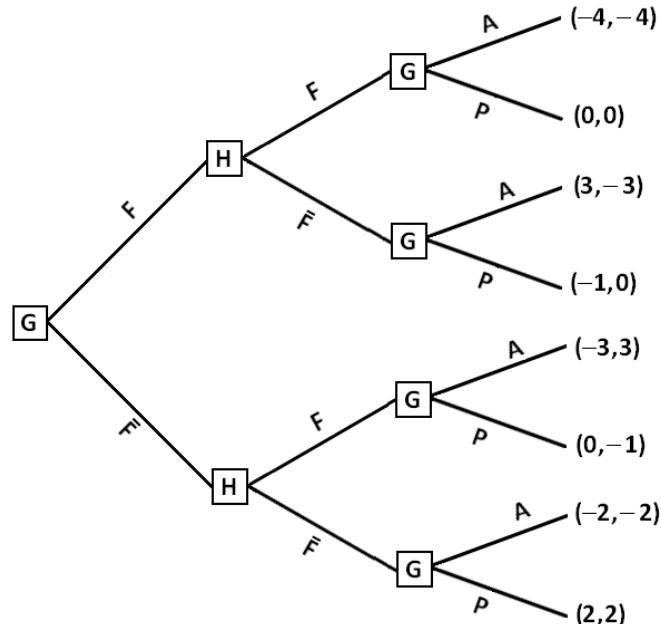
$$\text{EN} = \{(I, I_1), (D, D_1)\}$$



Dos empresas entran en una guerra de competencia, teniendo que decidir simultáneamente si abren una franquicia en una capital de provincia (F) o no la abren (\bar{F}). Pasado un tiempo, la Empresa G observa si la Empresa H ha abierto una franquicia en una capital de provincia o no y debe decidir si asimilarlo (A) o abrir otra franquicia y entrar en una guerra de precios (P).

a) Especificar el conjunto de estrategias puras de cada jugador.

b) Calcular los equilibrios de Nash perfectos en subjuegos, la trayectoria y los pagos.



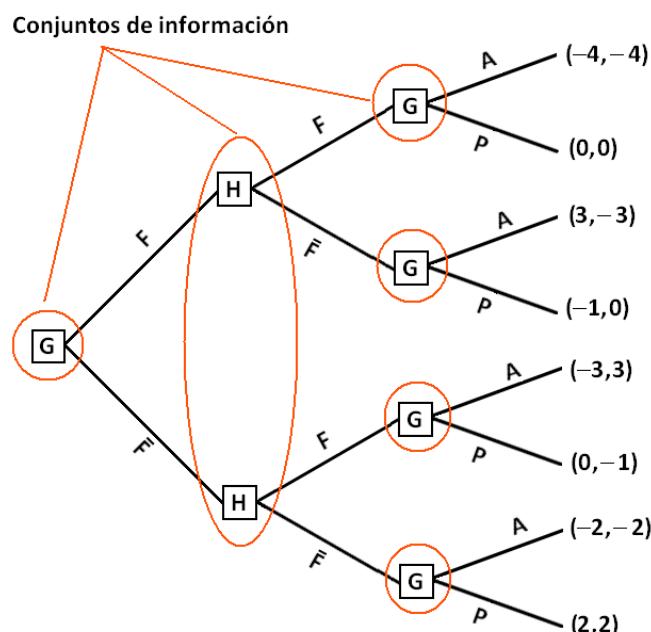
Solución:

a) La Empresa G tiene 5 conjuntos de información, en cada uno de estos conjuntos dispone de dos acciones.

En consecuencia, la Empresa G tiene $2^5 = 32$ estrategias, sea, por ejemplo, FAPPA una de estas estrategias.

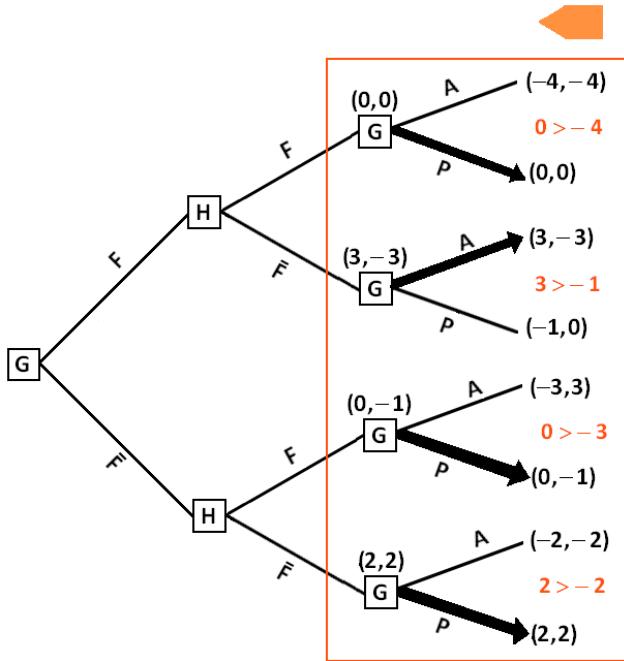
La empresa H tiene un solo conjunto de información, en cada conjunto dispone de acciones.

Por tanto, la Empresa H tiene $2^1 = 2$ estrategias, esto es, $S_2 = \{F, \bar{F}\}$





b) La empresa G tiene más de un nodo de decisión, con lo que se trata de un juego **con información incompleta**, esto es, en algún nodo de decisión la Empresa G al tomar una decisión desconoce alguna jugada anterior.



El equilibrio de Nash perfecto en subjuegos (ENPS) se encuentra buscando los equilibrios de Nash de cada subjuego.

El árbol de decisión se resuelve de derecha a izquierda, con cuatro subjuegos que comienzan cada uno en un nodo de decisión de la Empresa G.

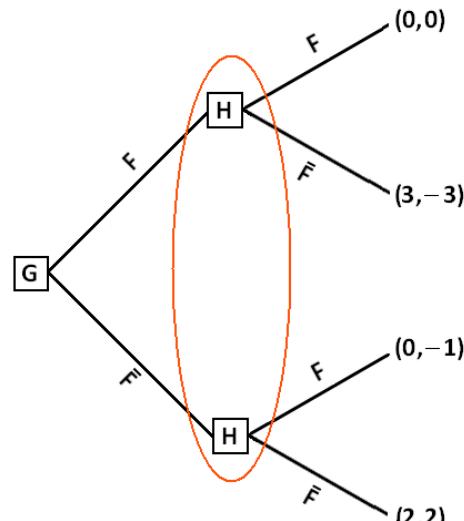
El concepto de equilibrio de Nash en cada uno de estos subjuegos se reduce a la acción óptima de la Empresa G.

Se sustituyen los cuatro subjuegos por los pagos correspondientes a los equilibrios encontrados.

El resultado es el juego estático representado en el árbol de decisión de la derecha.

Para hallar los equilibrios de Nash de este juego reducido (ENPS) solamente se miran los equilibrios en estrategias puras.

La tabla de pagos es:



		Empresa H	
		Abrir franquicia $\equiv F$	No Abrir franquicia $\equiv \bar{F}$
Empresa G	Abrir franquicia $\equiv F$	$\bar{0}, \underline{0}$	$\bar{3}, -3$
	No Abrir franquicia $\equiv \bar{F}$	$\bar{0}, -1$	$2, \underline{2}$

El único equilibrio de Nash del juego reducido es (Abrir franquicia, Abrir franquicia) $\equiv (F, F)$

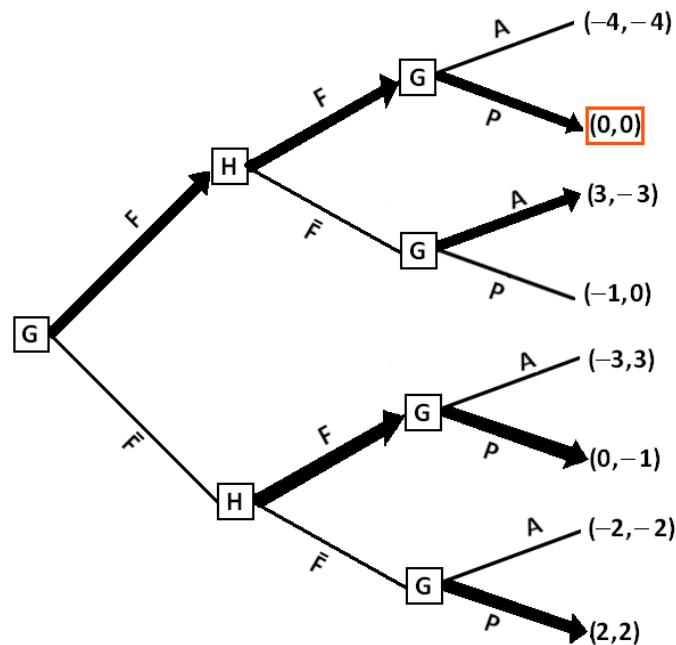


Incorporando todos los equilibrios de los subjuegos:

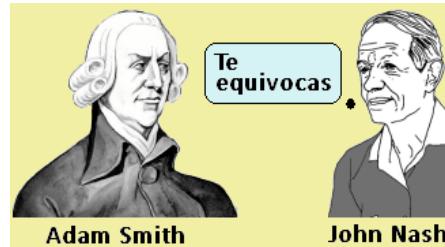
El único equilibrio de Nash ENPS en estrategias puras viene dado por (FPAPP, F)

La trayectoria correspondiente es el conjunto de decisiones que se efectuan si se juega este equilibrio: F-F-P

Los pagos resultantes son (0, 0)



Para obtener el mejor resultado, cada uno debe hacer lo mejor para sí mismo (Adam Smith) y para el grupo (John Forbes Nash).





Durante la II Guerra Mundial, el alto mando aliado planeaba el desembarco en el continente, que tendría lugar finalmente el 6 de Junio de 1944. Entre otros factores, era clave decidir el lugar donde desembarcar el grueso de las tropas.

Planteando la situación como un juego, había dos opciones (Normandía o Gran Bretaña) que tanto aliados como los alemanes deben decidir simultáneamente en cuál de estos dos sitios posicionaban sus tropas. Los alemanes pierden si ambos ejércitos posicionaban sus tropas en distinto lugar, y ganaban en caso contrario. Para los aliados es al revés. Por otro lado, los aliados prefieren ganar en Normandía (que está más cercana a París y la frontera alemana) que en Bretaña.

La siguiente matriz de pagos resume el enfrentamiento (los aliados son el jugador Fila, y los alemanes el jugador Columna).

	Bretaña	Normandía
Bretaña	(0, 1)	(1, 0)
Normandía	(2, 0)	(0, 1)

Encontrar los equilibrios de Nash del despliegue de las tropas.

Solución:

Equilibrios de Nash en estrategias puras

		Alemenes	
		Bretaña (B)	Normandía (N)
Aliados	Bretaña (B)	(0, 1*)	(1*, 0)
	Normandía (N)	(2*, 0)	(0, 1*)

No hay equilibrios de Nash en estrategias puras.

ESTRATEGIAS MIXTAS: Sea $(p, 1-p)$ la estrategia de los Aliados y $(q, 1-q)$ la estrategia de los Alemanes. Para calcular las probabilidades:

		Alemenes	
		q	1 - q
Aliados	p	Bretaña (B)	Normandía (N)
	1 - p	Normandía (N)	(2, 0)

Utilidad esperada de los Aliados:

$$E[U_{\text{Aliados}}] = 0 \cdot p \cdot q + 1 \cdot p \cdot (1-q) + 2 \cdot (1-p) \cdot q + 0 \cdot (1-p) \cdot (1-q) = p(1-3q) + 2q$$

La elección de una estrategia mixta de los Aliados queda totalmente determinada por el valor que se asigne a p , planteando un problema de elección en término de dicho valor.

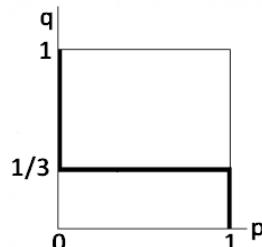
Derivando parcialmente respecto a p se puede analizar la influencia sobre la utilidad esperada de los Aliados.



$$\frac{\partial E[U_{\text{Aliados}}]}{\partial p} = \frac{\partial [p(1-3q) + 2q]}{\partial p} = 1-3q \Rightarrow \begin{cases} p=1 & \text{si } 1-3q > 0 \rightarrow q < 1/3 \\ p \in [0,1] & \text{si } 1-3q = 0 \rightarrow q = 1/3 \\ p=0 & \text{si } 1-3q < 0 \rightarrow q > 1/3 \end{cases}$$

Denotando por BR_{Aliados} la Mejor Respuesta de los Aliados, ésta adopta la forma:

$$BR_{\text{Aliados}}(q) = \begin{cases} p=1 & q < 1/3 \\ p \in [0,1] & q = 1/3 \\ p=0 & q > 1/3 \end{cases}$$



Utilidad esperada de los Alemanes

$$E[U_{\text{Alemanes}}] = 1.p.q + 0.p.(1-q) + 0.(1-p).q + 1.(1-p).(1-q) = q.(2p-1) - p + 1$$

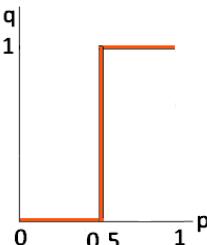
La elección de una estrategia mixta de los Alemanes queda totalmente determinada por el valor que se asigne a q, planteando un problema de elección en término de dicho valor.

Derivando parcialmente respecto a q se puede analizar la influencia sobre la utilidad esperada de los Alemanes.

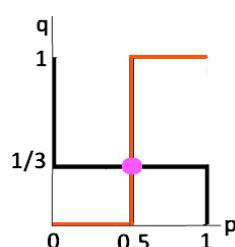
$$\frac{\partial E[U_{\text{Alemanes}}]}{\partial q} = \frac{\partial [q.(2p-1) - p + 1]}{\partial q} = 2p-1 \equiv \begin{cases} < 0 & p < 0,5 \\ = 0 & p = 0,5 \\ > 0 & p > 0,5 \end{cases}$$

Denotando por BR_{Alemanes} la Mejor Respuesta de los Alemanes, ésta tiene la forma:

$$BR_{\text{Alemanes}}(p) = \begin{cases} q=0 & p < 0,5 \\ q \in [0,1] & p = 0,5 \\ q=1 & p > 0,5 \end{cases}$$



Cuando $p = 0,5$ a los Aliados le es indiferente tomar cualquier acción.

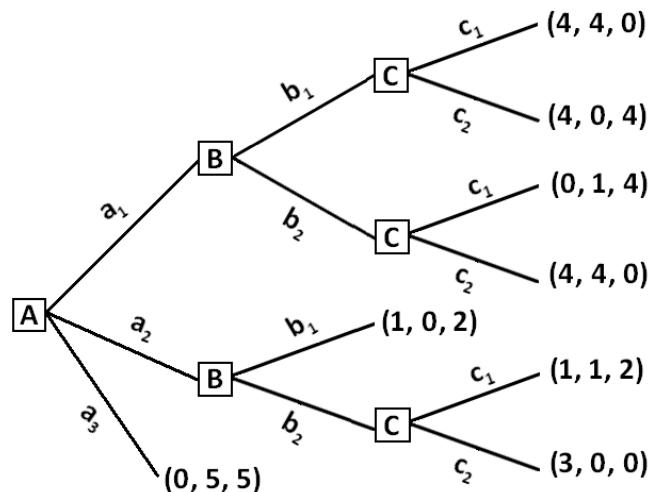


La solución se encuentra en la intersección: $ENPS = \left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right) \right\}$, único equilibrio de Nash. Un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos (ENPS) es un equilibrio de Nash utilizado en juegos dinámicos.



Se representan de forma extensiva y con información completa los pagos de tres empresas A, B y C, respectivamente. Determinar el perfil estratégico, la trayectoria y los pagos de todos los equilibrios de Nash perfectos en subjuegos en estrategias pures, en los siguientes casos:

- a) Cuando el juego es de información completa y todas las empresas pueden observar las acciones previas de las demás.
- b) Cuando la empresa B es la única que no puede observar las acciones de las otras dos empresas.
- c) Cuando las acciones de la empresa A son observadas por las empresas B y C, y la empresa C no puede observar las acciones de la empresa B.



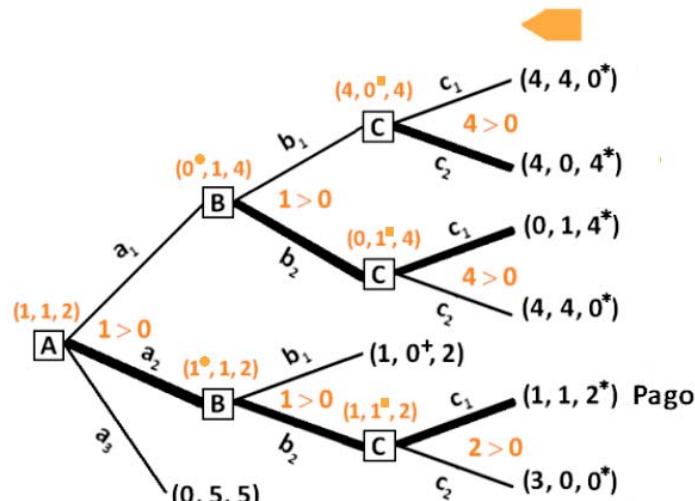
Solución:

- a) En cada nodo de decisión la empresa a la que corresponde escoger una acción conoce las jugadas anteriores (**información completa**). En consecuencia, el equilibrio de Nash perfecto en subjuegos (ENPS) es el equilibrio que se obtiene por inducción hacia atrás.

$$\text{ENPS} = \{(a_2, (b_2, b_2), (c_2, c_1, c_1))\}$$

Trayectoria: $a_2 - b_2 - c_1$

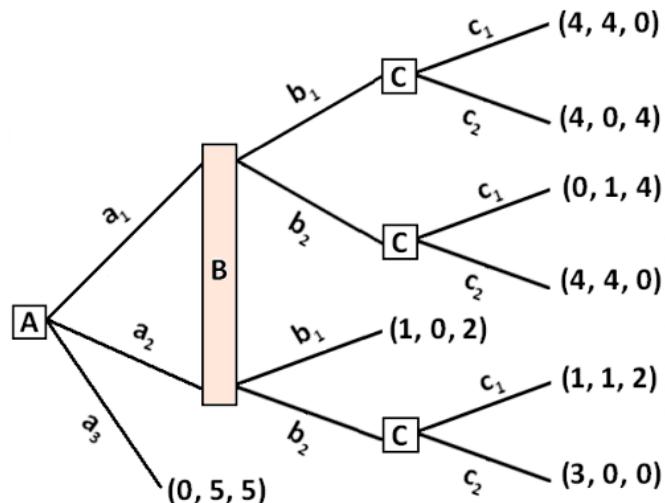
Pagos correspondientes: (1, 1, 2)





b) Como la empresa B no puede observar la acción elegida por la empresa A, los nodos de decisión de la empresa B forman un solo conjunto de información, es decir, los nodos de decisión de la empresa B estarán conectados.

Para calcular los equilibrios de Nash perfectos en subjuegos (ENPS) se comienza de nuevo hacia atrás.



En esta situación se trata de juego con **información incompleta**: La empresa B tiene un conjunto de información con dos nodos de decisión.

Lo ideal sería indicar la mejor acción de la empresa B. Sin embargo, la empresa B no sabe 'dónde se encuentra'.

La nueva situación, en este caso, no supone ningún problema, la empresa B esté donde esté, deberá elegir la acción b_2 en ambos nodos.

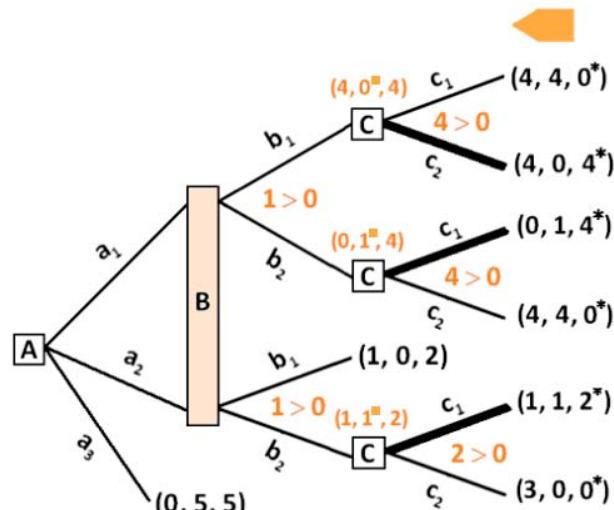
La empresa A escogerá la acción a_2

$$\text{ENPS} = \{(a_2, b_2, (c_2, c_1, c_1))\}$$

Trayectoria: $a_2 - b_2 - c_1$

Pagos correspondientes: (1, 1, 2)

Señalar que con **información incompleta** la estrategia de la empresa B es b_2 , con **información completa** es (b_2, b_2)

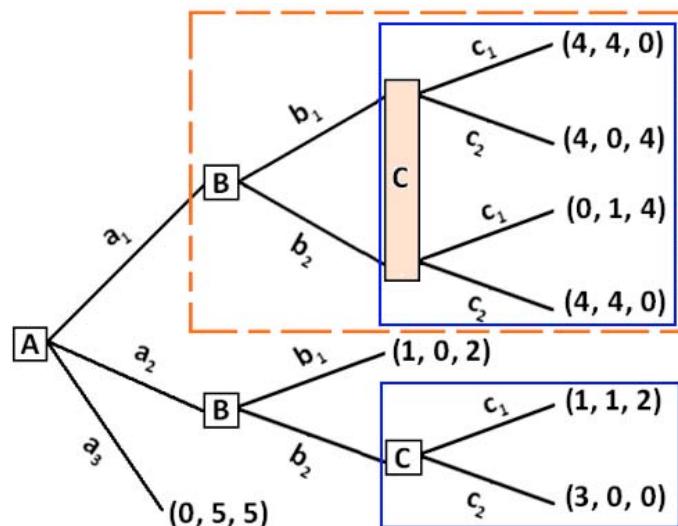




c) Las acciones de la empresa A se observan por las empresas B y C. Sin embargo, la empresa C no puede observar las acciones de la empresa B.

En consecuencia, los dos nodos superiores de la empresa C forman un solo conjunto de información.

No se pueden conectar los tres nodos de la empresa C porque de hacerlo la empresa C tampoco podría observar la acción elegida por la empresa A.

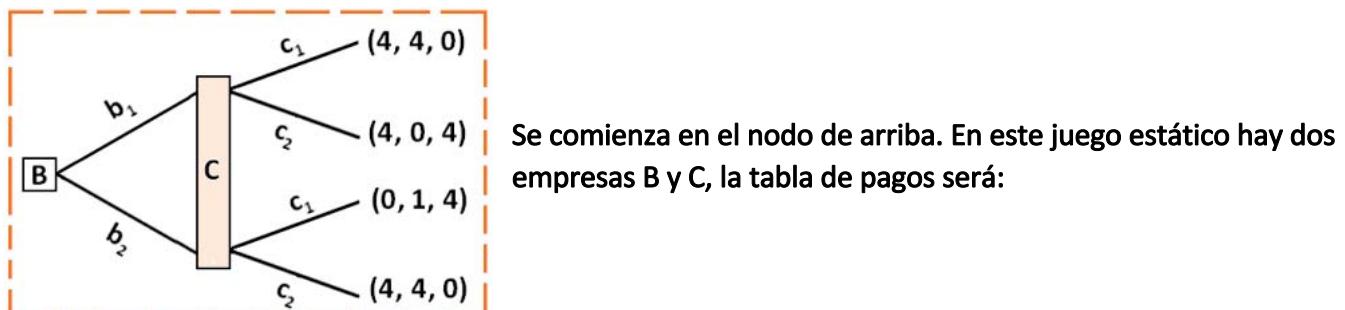


La empresa C tiene un conjunto de información con dos nodos de decisión, es un **juego de información incompleta**.

Para calcular los equilibrios de Nash perfectos en subjuegos (ENPS) se comienza de nuevo hacia atrás, indicando las mejores acciones de la empresa C.

No se puede indicar la mejor acción de la empresa C porque no sabe 'dónde se encuentra' y constituye un problema. Por un lado, elige c_2 en el nodo de arriba con un pago de $(4, 0, 4)$ y c_1 en el nodo de abajo con un pago de $(1, 1, 2)$.

Tiene que elegir la misma acción en ambos nodos, pero ¿qué acción?.



		Empresa C	
		c_1	c_2
Empresa B	b_1	$(\bar{4}, 0)$	$(0, \underline{4})$
	b_2	$(1, \underline{4})$	$(\bar{4}, 0)$

El juego estático no tiene equilibrios de Nash (EN) en estrategias puras. En consecuencia, tampoco hay equilibrios de Nash perfectos en subjuegos en estrategias puras (ENPS).



La empresa aeronáutica 1 mantiene un litigio con otra empresa competitora para quedarse con el mercado. La matriz de pagos refleja la situación desrita.

		Empresa 2	
		C	D
Empresa 1	A	(4, 1)	(3, 2)
	B	(1, 4)	(6, 3)

Si el litigio se mantiene indefinidamente. Hallar un equilibrio de Nash y un factor de descuento δ que lleve a unas ganancias medias de (6, 3)

Solución:

Se buscan los Equilibrios de Nash en estrategias mixtas y se calculan las correspondencias BR_i de mejor respuesta para ambos jugadores.

		Empresa 2	
		q	1 - q
Empresa 1	p	(4, 1)	(3, 2)
	1 - p	(1, 4)	(6, 3)

No hay EN en estrategias puras

Utilidad esperada o pagos de la Empresa 1:

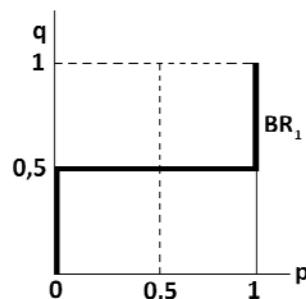
$$E[U_1] = 4 \cdot p \cdot q + 3 \cdot p \cdot (1-q) + 1 \cdot (1-p) \cdot q + 6 \cdot (1-p) \cdot (1-q) = 6pq - 3p - 5q + 6$$

Para analizar la influencia sobre la Utilidad esperada de la Empresa 1 se deriva parcialmente respecto a p :

$$\frac{\partial E[U_{P1}]}{\partial p} = \frac{\partial (6pq - 3p - 5q + 6)}{\partial p} = 6q - 3 \equiv \begin{cases} < 0 & q < 0,5 \\ = 0 & q = 0,5 \\ > 0 & q > 0,5 \end{cases}$$

Denotando por BR_1 la Mejor Respuesta de la Empresa 1, adopta la forma:

$$BR_1(q) = \begin{cases} p = 0 & q < 0,5 \\ p \in [0,1] & q = 0,5 \\ p = 1 & q > 0,5 \end{cases}$$





Utilidad esperada o pagos de la Empresa 2:

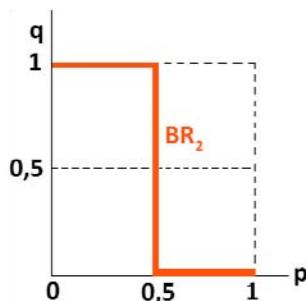
$$E[U_2] = 1 \cdot p \cdot q + 2 \cdot p \cdot (1-q) + 4 \cdot (1-p) \cdot q + 3 \cdot (1-p) \cdot (1-q) = -2pq - p + q + 3$$

Derivando parcialmente respecto a q se puede analizar la influencia sobre la utilidad esperada de la Empresa 2

$$\frac{\partial E[U_2]}{\partial q} = \frac{\partial(-2pq - p + q + 3)}{\partial q} = -2p + 1 \equiv \begin{cases} < 0 & p > 0,5 \\ = 0 & p = 0,5 \\ > 0 & p < 0,5 \end{cases}$$

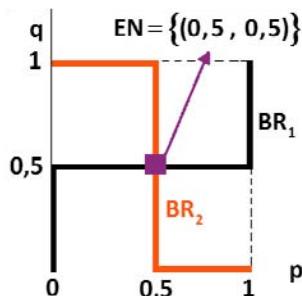
Denotando por BR_2 la Mejor Respuesta de la Empresa 2, adopta la forma:

$$BR_2(p) = \begin{cases} q = 0 & p > 0,5 \\ q \in [0,1] & p = 0,5 \\ q = 1 & p < 0,5 \end{cases}$$



La solución se encuentra en la intersección.

$$EN = \{(0,5, 0,5)\}$$



Pagos o ganancias factibles en el juego de etapa G: $(6, 3) = \{u_1(B, BR), u_2(B, BR)\}$

Pagos o ganancias en el equilibrio de Nash:

$$e_1 = u_1(0,5, 0,5) = u_1(B, 0,5) = 1 \cdot 0,5 + 6 \cdot 0,5 = 3,5$$

$$e_2 = u_2(0,5, 0,5) = u_2(0,5, BR) = 2 \cdot 0,5 + 3 \cdot 0,5 = 2,5$$

Siendo $u_1 = 6 > 3,5 = e_1$ y $u_2 = 3 > 2,5 = e_2$ se puede aplicar el teorema de Friedman

Considerando la desviación más ventajosa, el factor de descuento:

$$\delta > \max \left\{ \frac{6-u_1}{6-e_1}, \frac{4-u_2}{4-e_2} \right\} \rightarrow \delta > \max \left\{ \frac{6-6}{6-3,5}, \frac{4-3}{4-2,5} \right\} = 0,67$$

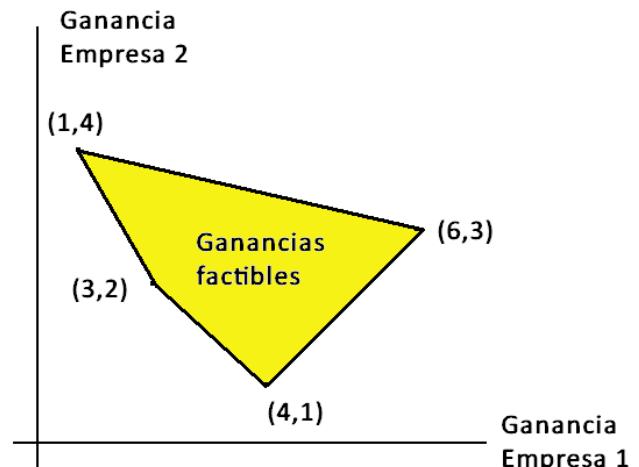
La estrategia de la Empresa 1 será a jugar B a no ser que la Empresa 2 haya jugado alguna vez una estrategia que no sea BR. En este caso, la Empresa 1 jugará la estrategia mixta 0,5 (estrategia de la Empresa 1 en el equilibrio de G) para siempre.



La estrategia de la Empresa 2 será jugar BR a no ser que la Empresa 1 haya jugado alguna vez otra estrategia que B. En este caso, la Empresa 2 jugará la estrategia mixta 0,5 (estrategia de la Empresa 2 en el equilibrio de G) para siempre.

Señalar que el equilibrio de Friedman no es sólo un EN sino también es un ENPS.

Teorema de Friedman: El resultado de equilibrio en un juego que se repite una infinidad de veces, es el mismo resultado que el resultado factible y racional que se daría en un juego que no se repite.



Sea G un juego de etapa con información completa G , sean (e_1, e_2, \dots, e_n) las ganancias de equilibrio de Nah en G , y sean (u_1, u_2, \dots, u_n) la utilidad del jugador en la etapa constituyente del juego G .

Si $u_i > e_i$ para cualquier jugador i y si el factor de descuento δ (paciencia de los jugadores) está lo suficientemente cerca de 1, existe un ENPS del juego repetido infinitamente G^∞ que alcanza (u_1, u_2, \dots, u_n) como ganancia media.

Jugar la estrategia del disparador por parte de todos los jugadores es un EN $\Leftrightarrow \delta \geq \max_i \left(\frac{d_i - u_i}{d_i - e_i} \right)$



La empresa aeronáutica Land & Go de traslado de equipaje busca un precio óptimo para posicionarse estratégicamente frente a sus competidores. Para estudiar el factor que condiciona el coste alcanzado desarrolla una política de precios reducidos en comparación con los establecidos por la competencia.

Sus analistas se marcan dos alternativas posibles: El Analista 1 defiende la eliminación de actividades que no generan valor añadido a los clientes. El Analista 2 se muestra a favor de las actividades que generan un resultado poco satisfactorio ofreciendo un servicio de mayor calidad que otras compañías logísticas pertenecientes al sector (caso de We Transfer).

La matriz de pagos (beneficios) de los Analistas se refleja en la tabla adjunta:

		Analista 2	
		C	D
Analista 1	A	(1, 1)	(5, 0)
	B	(0, 5)	(4, 4)

La estrategia simultánea (juego) se repite dos veces en dos períodos, en $t = 1$ y en $t = 2$. El resultado de la primera vez que se juega ($t = 1$) es observado antes de plantearlo una segunda vez. El pago de la estrategia repetida es la suma de los pagos en cada estrategia ($t = 1, t = 2$).

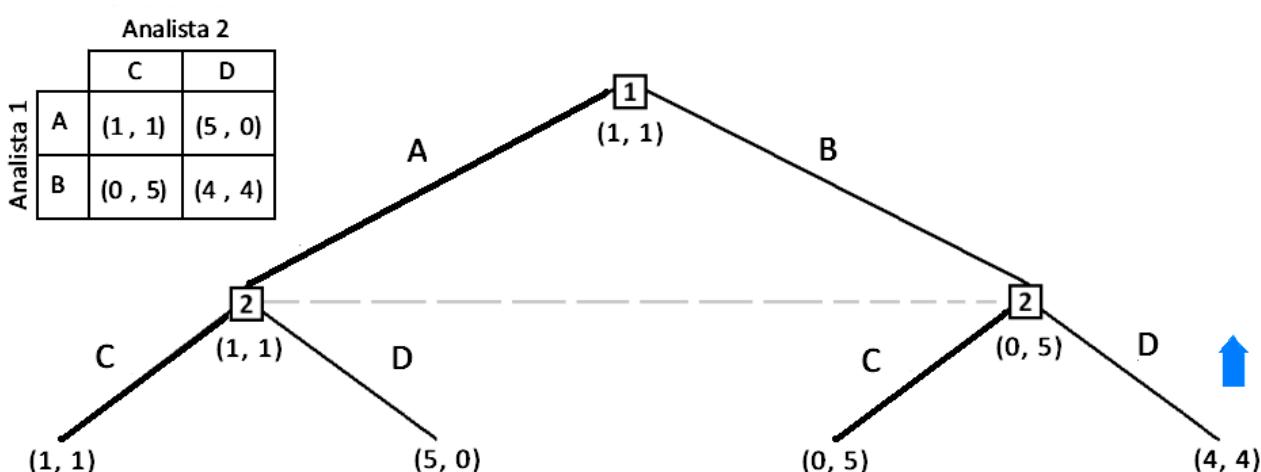
Para obtener una solución es necesario analizar:

- Forma extensiva de la estrategia. Conjuntos de información y estrategias.
- Calcular los EN y ENPS
- Calcular los EN y ENPS si las alternativas se repiten indefinidamente.

Solución:

- Cuando la estrategia (juego) se plantea solamente una vez, (1, 1) es un equilibrio de Nash en estrategias dominantes.

La representación en forma extensiva una sola vez ($t = 1$):



Si los Analistas repiten el proceso dos veces ($t = 2$) saben que no existe futuro más allá del segundo período. Es un proceso temporal finito.

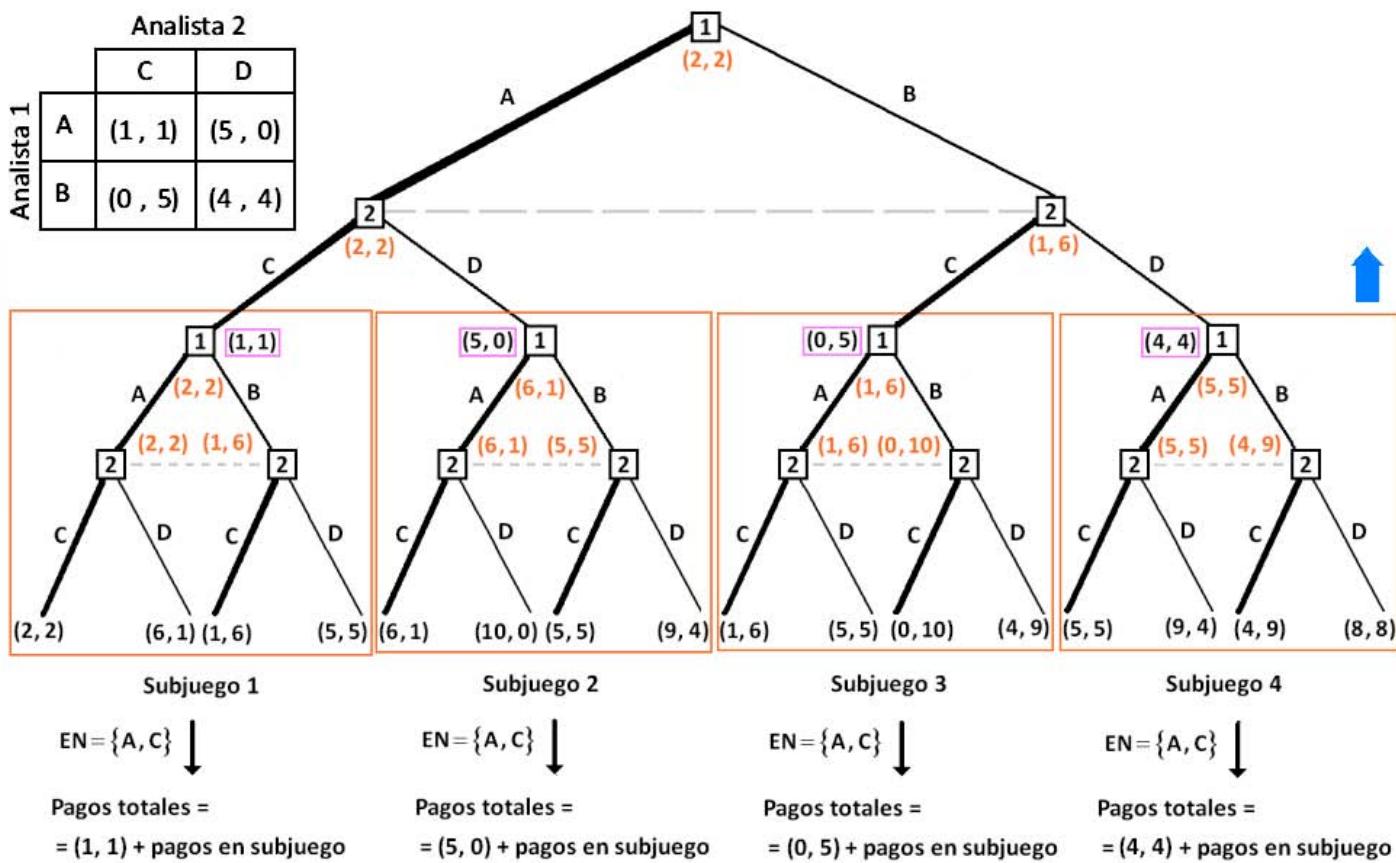


Un juego repetido un número finito de veces es un juego dinámico en el que un juego simultáneo (juego de etapa) se juega un número finito de veces y los resultados de cada etapa son observados antes de la siguiente.

En juegos repetidos (superjuegos) se establece el modelo de Cournot para estudiar el comportamiento de empresas cuando se comportan como Oligopolios, concretamente como Duopolios.

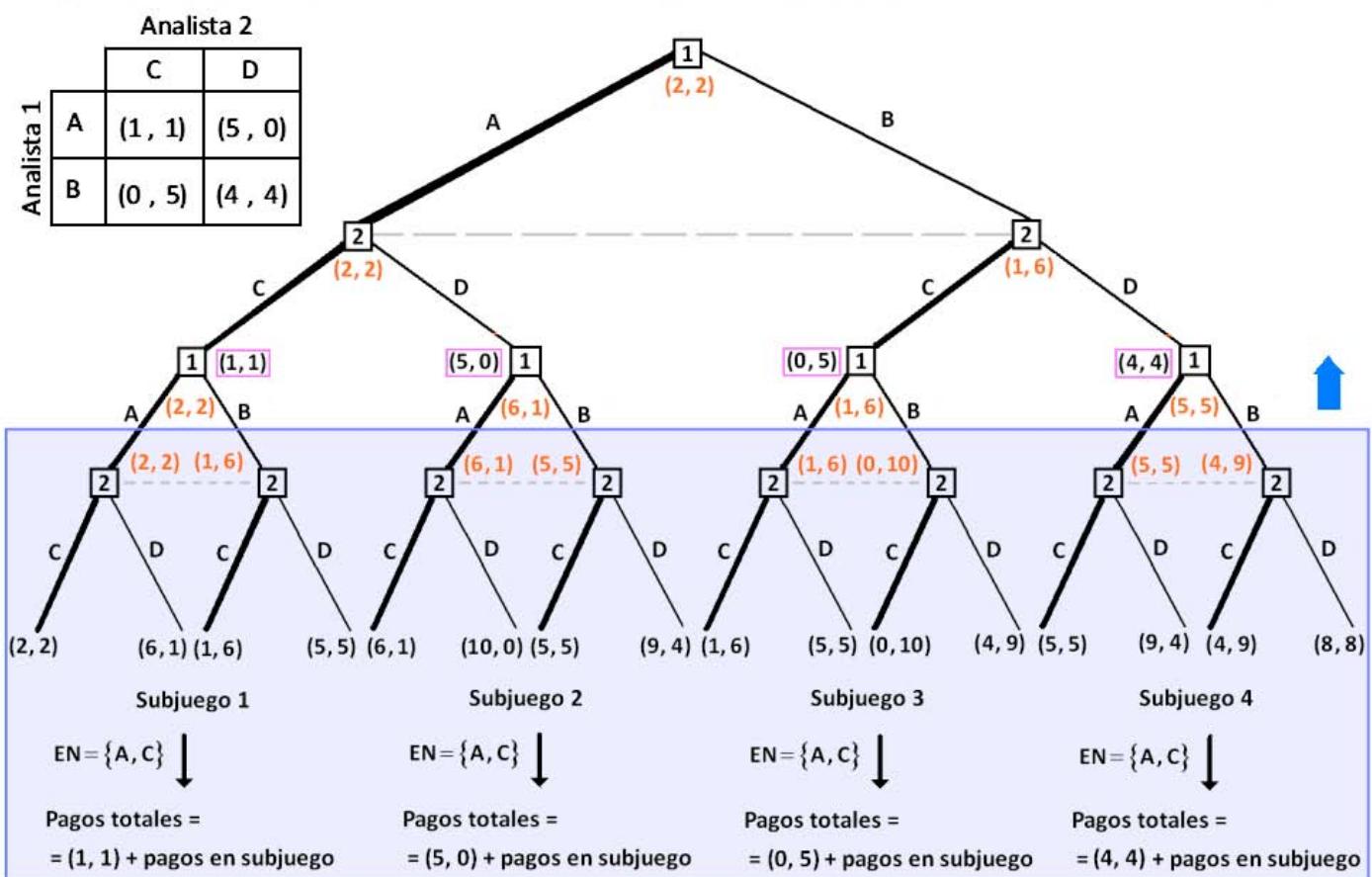
El juego repetido tiene un único equilibrio de Nash perfecto en subjuegos (ENPS) si el juego simultáneo (juego de etapa) tiene un único equilibrio de Nash (EN).

En el ENPS se juegan las estrategias de EN en cada etapa.



Cada Analista tiene 5 conjuntos de información

Subjuegos: 4 + Juego completo



b) Calcular los EN y ENPS

- Cálculo de EN del Subjuego 1

Pagos: $t = 1$

Analista 2

Analista 1

$\text{EN} = \{A, C\}$

Pagos: $t = 1 + t = 2$

Analista 2

Analista 1

$\text{EN} = \{A, C\}$

El resultado es independiente de que se tomen los pagos solo de esa etapa o los pagos totales.



En cada uno de los cuatro subjuegos hay un único equilibrio de Nash: EN = {A, C}

- Cálculo de EN del Juego completo

		Analista 2	
		C	D
Analista 1	A	(2, 2)	(6, 1)
	B	(1, 6)	(5, 5)

El pago de EN (1, 1) de la segunda etapa ha sido añadido a los pagos de t = 1

- ENPS = {A AAA, C CCCC}

El Analista 1 juega A en t = 1 y juega A en t = 2 para todo resultado posible en t = 1

El Analista 2 juega C en t = 1 y juega C en t = 2 para cualquier resultado de la primera etapa.



CONCEPTOS TEORÍA DE JUEGOS

1. JUEGOS COOPERATIVOS

Analiza situaciones donde los objetivos de los participantes se prestan parcialmente para darse una cooperación y parcialmente para entrar en conflicto. Cooperar o no, dependerá de los intereses de los participantes, con el fin de obtener el mayor beneficio posible.

2. JUEGOS NO COOPERATIVOS

Cada jugador busca la máxima utilidad individual y las coaliciones no están permitidas, a pesar de que mediante el establecimiento de coaliciones el valor individual alcanzado pudiera ser superior. Dentro de los juegos no cooperativos presentan especialidad dificultad aquellos con información incompleta, porque al no disponer los jugadores de información sobre las consecuencias de sus acciones es necesario utilizar probabilidades para resolverlos.

2.1. JUEGOS ESTÁTICOS

Los jugadores efectúan sus movimientos simultáneamente y de una sola vez, sin conocer la decisión de los demás en ese turno, y los pagos se reciben una vez ha finalizado el juego, en este tipo de juegos la información puede ser completa o incompleta pero siempre será imperfecta. Este tipo de juegos está asociado con lo que se conoce como "forma normal" de un juego, que consiste en enunciar quiénes son los jugadores, cuáles son las estrategias que cada uno de ellos tiene disponible, y cuáles son los resultados asociados con cada perfil de estrategias (es decir, con cada posible situación en la cual cada jugador elige una de sus estrategias disponibles).



2.2. JUEGOS DINÁMICOS

Las decisiones se toman de forma secuencial, en un orden determinado de forma que algunos jugadores serán conscientes de las acciones de los anteriores y podrán adaptar sus estrategias en función de las acciones previas. La información también puede ser completa o incompleta, pero en este caso si puede ser perfecta.

JUEGOS CON INFORMACIÓN COMPLETA - INCOMPLETA

La información completa y la información incompleta son términos ampliamente utilizados en economía, especialmente en teoría de juegos y en economía del comportamiento.

Se dice que hay información completa cuando cada agente conoce la función de utilidad de los otros agentes y las reglas del juego.

La información incompleta, también conocida como información asimétrica, se refiere por el contrario a una situación en la que no todos los agentes conocen las funciones de utilidad de los demás.

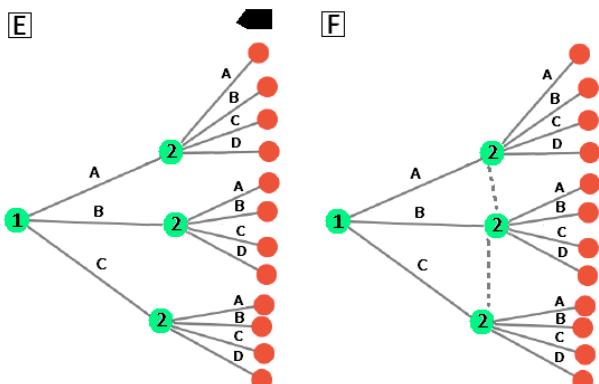
EQUILIBRIO DE NASH (EN)

Se denomina equilibrio de Nash al perfil de estrategias en el que cada jugador ha adoptado una estrategia que maximiza su utilidad, teniendo en cuenta las estrategias de los otros jugadores. Por tanto, debido al principio de racionalidad, ningún jugador cambiaria su estrategia por no derivar beneficios del cambio siempre y cuando los otros jugadores no cambien las suyas.

JUEGOS EN FORMA EXTENSIVA

Es la forma de representación adecuada para los juegos dinámicos, ya que el diagrama de árbol es la forma más sencilla para visualizar el orden en el que se producen las decisiones, así como la información de la que dispone cada jugador en su turno y las posibles acciones (ramas del árbol) que puede escoger con los respectivos resultados para cada acción (nodos). Finalmente, los últimos nodos corresponden al vector de pagos que recibirán los jugadores al finalizar el juego.

Para la resolución de estos juegos se suele utilizar el principio de inducción hacia atrás. Este es el procedimiento de analizar desde el final hacia el principio, permitiendo identificar el equilibrio de Nash en estrategias puras.



Juego E: El jugador 2 conoce la estrategia de 1, por lo que opta por la estrategia que le reporte un pago mayor. El procedimiento para resolver este juego es el principio de inducción hacia atrás.

Este tipo de representación es apropiado para juegos repetidos, en donde aparece durante dos o más turnos la toma de decisiones.

Juego F: El jugador 2 tiene información incompleta al no conocer la estrategia de 1. Es difícil de resolver por inducción hacia atrás .



JUEGOS INFINITOS: Se juega un juego simultáneo o de etapa en los períodos $1, 2, 3, \dots$ sin final. En cada período se observan los resultados de todas las etapas anteriores, desde 1 hasta $t-1$. Cada jugador descuenta sus pagos futuros usando un factor de descuento δ ($0 < \delta < 1$)

La forma extensiva es infinita y no tiene vértices finales, teniendo que revisar la definición de estrategia y la asignación de pagos.

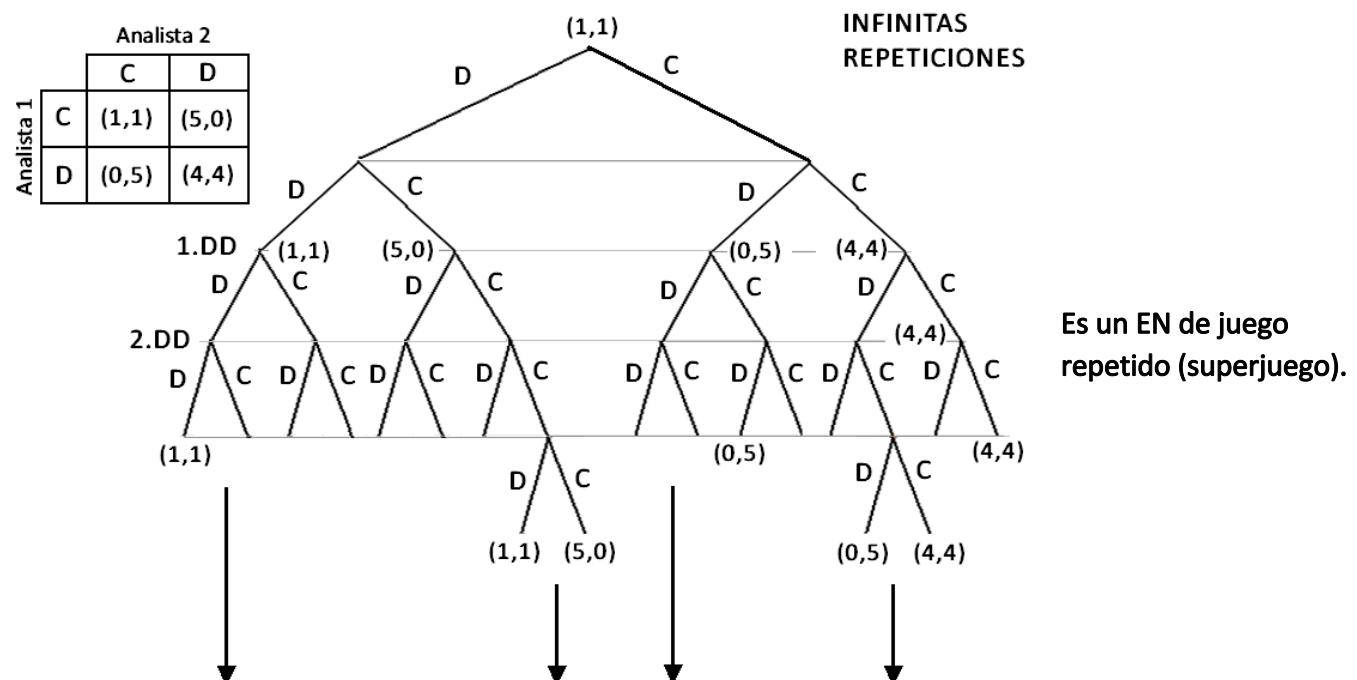
Una estrategia será una regla para asociar acciones del juego estático a cada subjuego en cada etapa dependiendo de la historia que lleva a esa etapa y que determina el subjuego. En lugar de asignar pagos a vértices finales, se asigna un pago a cada posible manera de jugar como la suma descontada de los pagos que se obtienen en cada etapa.

$$\text{Pago de cada jugador: } \sum_{t=1}^{\infty} u_t \cdot \delta_i^{t-1} = \frac{u_t}{1-\delta_i}$$

ESTRATEGIA GATILLO:

- Hay infinitos subjuegos.
- Cada subjuego es idéntico al juego completo.
- Se busca sostener la cooperación.
- Se utilizan estrategias resorte o gatillo:
Cooperar si se ha cooperado en el pasado (premio).
Tras una desviación, jugar un EN del juego de etapa para siempre (castigo).

c) Repetición infinita de las alternativas





Estrategia Gatillo:

En $t = 1 \rightarrow$ jugar (C, C)

$$t > 1 \rightarrow \begin{cases} \text{jugar } (C, C) \text{ si ha jugado } (C, C) \text{ en todo } t' < t \\ \text{jugar } (D, D) \text{ si en algún } t' < t \text{ no se jugó } (C, C) \end{cases}$$

Si ambos Analistas siguen la estrategia del gatillo, cada uno tendrá una ganancia:

$$u_{ccc\dots} = \sum_{t=1}^{\infty} 4 \cdot \delta^{t-1} = 4 + 4 \cdot \delta + 4 \cdot \delta^2 + \dots = \frac{4}{1-\delta} \quad (\text{p. geométrica ilimitada})$$

Si un único Analista se desvía solo en la primera etapa y en ella juega D tendrá una ganancia:

$$u_{dcc\dots} = 5 + \delta + \delta^2 + \delta^3 + \dots = 5 + \frac{\delta}{1-\delta}$$

Para analizar cuando es beneficioso seguir la estrategia:

$$\frac{\delta}{1-\delta} \geq 5 + \frac{\delta}{1-\delta} \Rightarrow \delta \geq \frac{1}{4} \quad \text{Comprobando que una entre infinitas desviaciones posibles no es beneficiosa.}$$

- Se demuestra que es un EN para $\delta \geq \frac{1}{4}$

Desviaciones que pueden presentarse: $\begin{cases} \text{Desviaciones de un solo periodo } t > 1 \\ \text{Desviaciones de más de un periodo} \end{cases}$

Si un Analista se desvía a D en un solo periodo en el momento $t > 1$

$$u^* = \underbrace{4 + 4\delta + 4\delta^2 + \dots + 4\delta^{t-1}}_{t \text{ términos}} + \underbrace{5\delta^t + \delta^{t+1} + \delta^{t+2} + \dots}_{}$$

$$u^* = \underbrace{4 + 4\delta + 4\delta^2 + \dots + 4\delta^{t-1}}_{t \text{ términos}} + \delta^t [5 + \delta + \delta^2 + \dots] = \\ = 4 + 4\delta + 4\delta^2 + \dots + 4\delta^{t-1} + \delta^t \left[5 + \frac{\delta}{1-\delta} \right]$$

Que se comprueba con lo que gana sin desviarse:

$$u = 4 + 4\delta + 4\delta^2 + \dots + 4\delta^{t-1} + 4\delta^t + 4\delta^{t+1} + 4\delta^{t+2} + \dots$$

$$u = \underbrace{4 + 4\delta + 4\delta^2 + \dots + 4\delta^{t-1}}_{t \text{ términos}} + \delta^t [4 + 4\delta + 4\delta^2 + \dots] = \\ = 4 + 4\delta + 4\delta^2 + \dots + 4\delta^{t-1} + \delta^t \left[\frac{4}{1-\delta} \right]$$

Es el mismo caso que el anterior, la desviación en el momento $t = 1$



Si un Analista se desvía a D en $t = 1$ y se vuelve a desviar en periodos posteriores t, t^*, \dots

$$u^* = 5 + \delta + \delta^2 + \delta^{t-1} + 0\delta^t + \delta^{t+1} + \dots + \delta^{t^*-1} + 0\delta^{t^*} + \delta^{t^*+1} + \dots$$

Con un pago menor que en la desviación solo en $t = 1$

$$u = 5 + \delta + \delta^2 + \delta^{t-1} + 0\delta^t + \delta^{t+1} + \dots + \delta^{t^*-1} + \delta^{t^*} + \delta^{t^*+1} + \dots$$

En consecuencia, la mejor desviación es desviarse en un único periodo. Por tanto, se concluye que la estrategia gatillo es un EN del juego entero si $\delta \geq \frac{1}{4}$

- La estrategia gatillo es un ENPS

Señalar que todos los subjuegos son iguales (repetición infinita del dilema del prisionero) y que la estrategia gatillo distingue dos tipos de subjuegos a la hora de prescribir su estrategia:

- a) Subjuegos tras una historia de cooperación
- b) Subjuegos tras una historia donde alguna vez no se ha cooperado.

- a) Subjuegos en t tras haber jugado (C, C) en todo $t^* < t$:

En estos subjuegos la estrategia gatillo prescribe lo mismo que en $t = 1$ y el subjuego es el mismo que el juego entero.

En consecuencia, la estrategia gatillo será EN en estos subjuegos en las mismas condiciones que en el juego entero.

- b) Subjuegos en t si algún $t^* < t$ no se jugó (C, C)

- Cuando los Analystas no se desvían cada uno obtiene una ganancia:

$$u = \delta^t + \delta^{t+1} + \dots + \delta^{t^*-1} + \delta^{t^*} + \delta^{t^*+1} + \dots$$

- Cuando un Analista se desvía en t, t^*, \dots

$$u^* = 0\delta^t + \delta^{t+1} + \dots + \delta^{t^*-1} + 0\delta^{t^*} + \delta^{t^*+1} + \dots$$

Por tanto, en estos subjuegos, la estrategia gatillo determina un EN para cualquier valor de δ , se concluye que la estrategia gatillo es un ENPS.

- Hay otros muchos pagos que se pueden sostener. Se procede a obtener otro ENPS

Estrategia Gatillo:

$\left\{ \begin{array}{l} \text{En } t \text{ impar jugar (C,C)} \\ \text{En } t \text{ par jugar (D,C)} \\ \text{Si en algún momento alguien se desvía, juega (D,D) siempre a partir de entonces} \end{array} \right.$

Si siguen la estrategia, el Analista 1 obtiene un pago:

$$\begin{aligned} u_1 &= 4 + 5\delta + 4\delta^2 + 5\delta^3 + 4\delta^4 + \dots = \\ &= (4 + 4\delta^2 + 4\delta^4 + \dots) + (5\delta + 5\delta^3 + 5\delta^5) + \dots = \frac{4}{1-\delta^2} + \frac{5\delta}{1-\delta^2} \end{aligned}$$



Mientras que el Analista 2 obtiene un pago:

$$u_2 = 4 + 0 \delta + 4 \delta^2 + 0 \delta^3 + 4 \delta^4 + \dots = \frac{4}{1-\delta^2}$$

La estrategia es un ENPS para valores suficientemente altos de δ .







POBLACIONES FINITAS: MUESTREO ALEATORIO SIMPLE



Una compañía suministradora de gas tiene que cobrar cantidades atrasadas de 20.000 clientes. Para estimar la cantidad total que se le adeuda, selecciona una muestra aleatoria de 64 clientes, que debían una cantidad media de 1.600 euros, con una desviación típica de 2.000 euros. Se quiere obtener:

- Intervalo de confianza del 95% de la cantidad total que se adeuda a la compañía de gas.
- ¿Cuántos clientes tiene que seleccionar la compañía para estimar la cantidad anterior con un error de muestreo inferior a 2.400.000 euros?

Solución:

- a) Sea la variable aleatoria X = "Cantidad atrasada de pago por un cliente".

La cantidad total adeuda por los 20.000 clientes es $\tau = \sum_{i=1}^{20.000} X_i$, que se estima con

$$\hat{x} = N \cdot \bar{x} = \frac{N}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i, \text{ con un error de muestreo estimado } e_\tau = z_{\alpha/2} \cdot \sigma \cdot \sqrt{\frac{N \cdot (N-n)}{n}}$$

El intervalo de confianza para el total τ poblacional es:

$$I(\tau) = \left[\hat{x} \pm e_\tau \right] = \left[N \cdot \bar{x} \pm z_{\alpha/2} \cdot \sigma \cdot \sqrt{\frac{N \cdot (N-n)}{n}} \right]$$

Por consiguiente, $z_{\alpha/2} = z_{0,025} = 1,96$

$$\begin{aligned} I(\tau) &= \left[\hat{x} \pm e_\tau \right] = \left[20.000 \cdot 1.600 \pm 1,96 \cdot 2.000 \cdot \sqrt{\frac{20.000 \cdot (20.000 - 64)}{64}} \right] = \\ &= [22.215.692,56, 41.784.307,44] \end{aligned}$$

- b) Para obtener una estimación de la cantidad total que se adeuda, con un error inferior a $e_\tau = 2.400.000$, se tiene que elegir una muestra de tamaño superior de:

$$n = \frac{z_{\alpha/2}^2 \cdot \sigma^2 \cdot N^2}{e_\tau^2 + z_{\alpha/2}^2 \cdot \sigma^2 \cdot N} \rightarrow n = \frac{1,96^2 \times 2.000^2 \times 20.000^2}{2.400.000^2 + 1,96^2 \times 2.000^2 \times 20.000} \approx 1.013 \text{ clientes}$$



POBLACIONES FINITAS: MUESTREO ALEATORIO SIMPLE



En una ciudad se desea estimar la cantidad que se gastan los turistas. Con este objetivo, entre los 200.000 turistas que utilizaron el avión como medio de transporte, se entrevistan aleatoriamente a 100 turistas que contestaron a la cantidad en euros que se habían gastado.

Obteniéndose los siguientes datos: $\sum_{i=1}^{100} x_i = 120.000$ $\sum_{i=1}^{100} x_i^2 = 146.861.100$

- Obtener un intervalo de confianza al 95% para la cantidad media gastada por turista en la ciudad.
- ¿Cuántos turistas se deben entrevistar para que con un nivel de confianza del 95% para que el error de estimación no fuera mayor de 95 céntimos de euro?
- ¿A cuántos turistas se deben preguntar para estimar la proporción de personas insatisfechas con los servicios prestados, con un error del 15% y un nivel de confianza del 95%?

Solución:

- Sea la variable aleatoria X = "Cantidad que se gasta cada turista"

Intervalo de confianza para la media μ poblacional con varianza desconocida:

$$I(\mu) = \left[\bar{x} \pm e_\mu \right] = \left[\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \cdot s_x \cdot \sqrt{\frac{(N-n)}{n \cdot N}} \right]$$

La media y varianza muestral son:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{100} x_i = \frac{120.000}{100} = 1200 \text{ euros}$$

Se calcula la cuasivarianza muestral (estimador insesgado de la varianza poblacional) :

$$n \cdot \sigma_x^2 = (n - 1) \cdot s_x^2 \rightarrow s_x^2 = \frac{n}{(n - 1)} \sigma_x^2 = \frac{1}{(n - 1)} \cdot \left[\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \cdot \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right]$$

$$s_x^2 = \frac{1}{99} \cdot \left[\sum_{i=1}^{100} x_i^2 - \frac{1}{n} \cdot \left(\sum_{i=1}^{100} x_i \right)^2 \right] = \frac{1}{99} \times \left[146.861.100 - \frac{1}{100} \times (120.000)^2 \right] = 28.900$$

$$s_x = \sqrt{28.900} = 170$$

Intervalo de confianza para el gasto medio por turista, con una fiabilidad del 95%:

$$I(\mu) = \left[\bar{x} \pm e_\mu \right] = \left[1200 \pm 1,96 \times 170 \times \sqrt{\frac{(200.000 - 100)}{100 \times 200.000}} \right] = [1200 \pm 33,31]$$

$$z_{\alpha/2} = z_{0,025} = 1,96$$



b) El tamaño muestral para un error en la estimación de la media de 75 céntimos de euro será:

$$n = \frac{z_{\alpha/2}^2 \cdot s_x^2 \cdot N}{N \cdot e_\mu^2 + z_{\alpha/2}^2 \cdot s_x^2} = \frac{1,96^2 \times 28.900 \times 200.000}{200.000 \times 0,95^2 + 1,96^2 \times 28900} \approx 76.168 \text{ turistas}$$

Se tendría que haber entrevistado al menos a 76.168 turistas.

- Se podría haber obtenido el tamaño apropiado calculando, en primer lugar, al tamaño muestral que correspondería a una población infinita:

$$n_\infty = \frac{z_{\alpha/2}^2 \cdot s_x^2}{e_\mu^2} = \frac{1,96^2 \times 28.900}{0,95^2} \approx 123.016$$

$$\text{Fracción de muestreo: } f = \frac{n_\infty}{N} = \frac{123.016}{200.000} = 0,61508 > 0,01$$

Con lo que hay que realizar la corrección por finitud (sí $f > 0,01$) :

$$n = \frac{n_\infty}{1 + \frac{n_\infty}{N}} = \frac{123.016}{1 + 0,61508} = \frac{123.016}{1 + 0,61508} \approx 76.167 \text{ turistas}$$

c) El tamaño muestral necesario para estimar una proporción, con el 95% de confianza y con un error de muestreo $e_p = 0,15$, viene dado por la expresión:

$$n = \frac{z_{\alpha/2}^2 \cdot N \cdot p \cdot q}{e_{pt}^2 \cdot (N - 1) + z_{\alpha/2}^2 \cdot p \cdot q}$$

Al no tener información sobre el valor de p se toma el valor que proporciona máxima variabilidad, es decir, $p = q = 0,5$

Con lo que se obtiene,

$$n = \frac{z_{\alpha/2}^2 \cdot N \cdot p \cdot q}{e_{pt}^2 \cdot (N - 1) + z_{\alpha/2}^2 \cdot p \cdot q} = \frac{1,96^2 \times 200.000 \times 0,5 \times 0,5}{0,15^2 \times 199.999 + 1,96^2 \times 0,5 \times 0,5} \approx 43$$

Es necesario seleccionar a 43 turistas para conocer la insatisfacción en los servicios prestados.

- Se podía haber optado por calcular el tamaño muestral que correspondería a una población infinita:

$$n_\infty = \frac{z_{\alpha/2}^2 \cdot p \cdot q}{e_{nr}^2} = \frac{1,96^2 \times 0,5 \times 0,5}{0,15^2} \approx 43$$

$$\text{Fracción de muestreo: } f = \frac{n_\infty}{N} = \frac{43}{200.000} = 0,0002 < 0,01$$

Siendo la fracción en muestra menor que 0,01 no hay que realizar la corrección por finitud.



POBLACIONES FINITAS: MUESTREO ALEATORIO SIMPLE



Una multinacional se plantea cambiar el paquete contable de gestión. Para obtener información de sus empleados sobre el cambio informático toma una muestra aleatoria de 1.000 empleados y los envía un cuestionario. Con un nivel de confianza del 90%, necesita saber:

- Tamaño muestral apropiado para obtener una estimación sobre la proporción de empleados favorables a que no se renueve la infraestructura de gestión actual, con un error de muestreo inferior al 10%.
- En un planteamiento anterior sobre la cuestión, la proporción de empleados favorables al cambio del paquete de gestión estuvo entre el 35% y el 55%. Utilizando esta información, ¿cuál debería ser ahora el tamaño muestral necesario?
- Sabiendo que del cuestionario nuevo enviado a los 1000 empleados, 38 empleados no han sido favorables a cambiar paquete de gestión, estimar la proporción de empleados favorables al cambio y el error de muestreo.

Solución:

- Se quiere realizar una estimación de la proporción poblacional, realizando un muestreo aleatorio simple (m.a.s) en una población $N = 1.000$ empleados, con un nivel de confianza del 90% ($z_{\alpha/2} = z_{0,05} = 1,645$) y un error de muestreo $e_{pt} = 0,10$.

El tamaño muestral necesario se puede obtener mediante las fórmulas:

$$I(p_t) = \left[p \pm z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{(N - n)}{n \cdot (N - 1)} \cdot p \cdot q} \right] \quad \hat{p} = p = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \quad \text{donde } a_i = \begin{cases} 1 & \text{Favorable} \\ 0 & \text{No favorable} \end{cases}$$

$$e_{pt} = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{(N - n)}{n \cdot (N - 1)} \cdot p \cdot q} \rightarrow n = \frac{z_{\alpha/2}^2 \cdot N \cdot p \cdot q}{e_{pt}^2 \cdot (N - 1) + z_{\alpha/2}^2 \cdot p \cdot q}$$

$p = q = 0,5$ máxima variabilidad

$$n = \frac{1,645^2 \times 1000 \times 0,5 \times 0,5}{0,10^2 \times (1000 - 1) + 1,645^2 \times 0,5 \times 0,5} = 63,4234 \approx 64 \text{ empleados}$$

- Se puede calcular primero el tamaño muestral que corresponde a una población infinita (n_∞) y, si la fracción de muestreo ($f > 0,01$), se realiza la corrección por finitud.

$$n_\infty = \frac{z_{\alpha/2}^2 \cdot p \cdot q}{e_{pt}^2} = \frac{1,645^2 \times 0,5 \times 0,5}{0,10^2} \approx 67,6506$$

$$\text{Fracción de muestreo: } f = \frac{n_\infty}{N} = \frac{67,6506}{1.000} = 0,06765 > 0,01$$

Se necesita realizar la corrección por finitud:

$$n = \frac{n_\infty}{1 + \frac{n_\infty}{N}} = \frac{67,6506}{1 + 0,06765} = 63,3640 \approx 64 \text{ empleados}$$



b) Para encontrar el tamaño muestral necesario se toma el valor $p = 0,35$ que presenta mayor variabilidad. Siendo $e_{pt} = 0,10$, se tiene:

$$n = \frac{N \cdot (e_{pt}^2 + z_{\alpha/2}^2 \cdot p \cdot q)}{N \cdot e_{pt}^2 + z_{\alpha/2}^2 \cdot p \cdot q} = \frac{1000 \times (0,10^2 + 1,645^2 \times 0,35 \times 0,65)}{1000 \times 0,10^2 + 1,645^2 \times 0,35 \times 0,65} \approx 59 \text{ empleados}$$

▪ O bien, calculando primero el tamaño muestral que corresponde a una población infinita (n_∞) y, si la fracción de muestreo ($f > 0,01$), se realiza la corrección por finitud.

$$n_\infty = \frac{z_{\alpha/2}^2 \cdot p \cdot q}{e_{pt}^2} = \frac{1,645^2 \times 0,35 \times 0,65}{0,10^2} = 61,5620$$

$$\text{Fracción de muestreo: } f = \frac{n_\infty}{N} = \frac{61,5620}{1.000} = 0,06156 > 0,01$$

Se necesita realizar la corrección por finitud:

$$n = \frac{n_\infty}{1 + \frac{n_\infty}{N}} = \frac{61,5621}{1 + 0,06156} \approx 59 \text{ empleados}$$

c) Como de los 100 empleados consultados hay 38 que no estuvieron de acuerdo, la estimación puntual de los empleados favorables al cambio es: $\hat{p} = p = \frac{62}{100} = 0,62$

Error de muestreo para la proporción total de la población favorable al cambio:

$$e_{pt} = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{(N - n)}{n \cdot (N - 1)} \cdot p \cdot q} = 1,645 \times \sqrt{\frac{(1.000 - 100)}{100 \cdot (1000 - 1)} \times 0,62 \times 0,38} = 0,0757$$



POBLACIONES FINITAS: MUESTREO ALEATORIO ESTRATIFICADO



Una compañía aseguradora quiere analizar el importe de las multas anuales de tráfico en una ciudad con 9.000 conductores. El estudio se realiza clasificando la población en tres estratos, tomando muestras aleatorias simples en cada uno de ellos.

Los datos obtenidos fueron:

Estratos	Tamaños poblacionales	Tamaños muestrales	Media muestral de sanciones anuales	Varianza muestral (euros ²)
Menores de 30 años	4.000	120	260	40.560
Entre 30 y 50 años	3.000	90	185	127.670
Mayores de 50 años	2.000	60	190	60.900

Utilizando un 95% de confianza:

- Estimar el importe total del importe de sanciones al año entre los menores de 30 años, reflejando el error de muestreo cometido.
- Tamaño muestral necesario para estimar el importe medio de sanciones anuales entre los conductores mayores de 50 años, con un error de muestreo de 60 euros.
- Mediante un intervalo de confianza estimar el importe anual de sanciones por conductor.
- En caso de duplicar el tamaño muestral, realizar el reparto por estratos en la nueva muestra según diferentes criterios, indicando el reparto más eficiente.
- Tamaño muestral necesario para que la estimación entre 30 y 50 años tuviera un error de muestreo inferior al 8%. ¿Cuál sería el tamaño muestral apropiado si un análisis anterior indica que sería al menos del 60%?

Solución:

- a) Sea la variable aleatoria X = "Importe de sanciones anuales por conductor"

Se quiere estimar un total poblacional dentro del primer estrato. En consecuencia, el estimador es el que corresponde a un muestreo aleatorio estratificado.

$$\hat{x}_1 = N_1 \cdot \bar{x}_1 = 4.000 \times 260 = 1.040.000 \text{ euros}$$

$$\text{con un error de muestreo estimado en } e_{\tau_1} = z_{\alpha/2} \cdot \sigma_1 \cdot \sqrt{\frac{N_1 \cdot (N_1 - n_1)}{n_1}} \quad (z_{\alpha/2} = z_{0,025} = 1,96)$$

$$e_{\tau_1} = 1,96 \times \sqrt{40.560} \times \sqrt{\frac{4.000 \times (4.000 - 120)}{120}} = 141.958,13 \text{ euros}$$

- b) El importe medio estimado de las sanciones anuales en el tercer estrato, con un error de muestreo de $e_{\mu_3} = 60$ euros viene dado por:

$$n = \frac{z_{\alpha/2}^2 \cdot \sigma_3^2 \cdot N_3}{N \cdot e_{\mu_3}^2 + z_{\alpha/2}^2 \cdot \sigma_3^2} = \frac{1,96^2 \times 60.900 \times 2.000}{2.000 \times 60^2 + 1,96^2 \times 60.900} = 62,94 \approx 63 \text{ conductores}$$



c) Para estimar el importe medio de sanciones por conductor de la ciudad se utiliza el estimador de la media total en el muestreo estratificado. Por tanto, el intervalo de confianza adecuado es:

$$I(\mu_\tau) = \left[\hat{x}_{\tau_{ST}} \pm e_{\tau_{ST}} \right] = \left[\frac{1}{N} \sum_{h=1}^L N_h \cdot \bar{x}_h \pm z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\sum_{h=1}^L W_h^2 \cdot (1 - f_h) \cdot \frac{s_h^2}{n_h}} \right] \quad W_h = \frac{N_h}{N} \quad f_h = \frac{n_h}{N_h}$$

$$\hat{x}_{\tau_{ST}} = \frac{1}{N} \sum_{h=1}^L N_h \cdot \bar{x}_h = \frac{1}{9.000} (4000 \times 260 + 3.000 \times 185 + 2000 \times 190) = 219,44 \text{ euros}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{x}_{\tau_{ST}}) &= \sum_{h=1}^3 W_h^2 \cdot (1 - f_h) \cdot \frac{s_h^2}{n_h} = \left(\frac{4.000}{9.000} \right)^2 \times \left(1 - \frac{120}{4.000} \right) \times \frac{40.560}{120} + \\ &+ \left(\frac{3.000}{9.000} \right)^2 \times \left(1 - \frac{90}{3.000} \right) \times \frac{127.670}{90} + \left(\frac{2.000}{9.000} \right)^2 \times \left(1 - \frac{60}{2.000} \right) \times \frac{60.900}{60} = 266,271 \end{aligned}$$

$$e_{\tau_{ST}} = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\text{Var}(\hat{x}_{\tau_{ST}})} = 1,96 \times \sqrt{266,271} = 31,98 \text{ euros}$$

$$I(\mu_\tau) = [219,44 \pm 31,98] = [187,46, 251,42]$$

d) Para duplicar el tamaño muestral hay que al peso de la muestra de cada estrato con relación a toda la muestra: $w_h = \frac{n_h}{n} \rightarrow n_h = n \cdot w_h$

$$\text{El tamaño muestral actual es: } n = \sum_{h=1}^3 n_h = 120 + 90 + 60 = 270 \text{ conductores}$$

Al duplicar esta cantidad, el nuevo tamaño muestral será de: $n = 2 \times 270 = 540$ conductores

Que se deben repartir entre los distintos estratos: $n_h = n \cdot w_h = 540 \times w_h$, con los criterios de afijación w_h

- Afijación uniforme: $w_h = \frac{1}{L} = \frac{1}{3} \quad h=1,2,3 \rightarrow n_1 = n_2 = n_3 = \frac{540}{3} = 180$ conductores

En cada estrato se tomaría una muestra aleatoria de 180 conductores.

- Afijación proporcional: $w_h = \frac{N_h}{N} = \frac{1}{3} \quad h=1,2,3 \rightarrow n_h = \frac{N_h}{N} \cdot n$

$$n_1 = \frac{N_1}{N} \cdot n = \frac{4.000}{9.000} \times 540 = 240 \text{ conductores}$$

$$n_2 = \frac{N_2}{N} \cdot n = \frac{3.000}{9.000} \times 540 = 180 \text{ conductores} \quad n_3 = \frac{N_3}{N} \cdot n = \frac{2.000}{9.000} \times 540 = 120 \text{ conductores}$$

- Afijación de Neyman o varianza mínima: $w_h = \frac{N_h \cdot \sigma_h}{\sum_{i=1}^L N_i \cdot \sigma_i} \quad h=1,2,3 \quad n_h = n \cdot w_h = 540 \cdot w_h$



$$\sum_{i=1}^3 N_h \cdot \sigma_h = 4.000 \times \sqrt{40.560} + 3.000 \times \sqrt{127.670} + 2.000 \times \sqrt{60.900} = 2.371.067,21$$

$$n_1 = 540 \cdot \frac{N_1 \cdot \sigma_1}{\sum_{i=1}^3 N_h \cdot \sigma_h} = 540 \times \frac{4.000 \times \sqrt{40.560}}{2.371.067,21} = 183,47 \approx 184 \text{ conductores}$$

$$n_2 = 540 \cdot \frac{N_1 \cdot \sigma_1}{\sum_{i=1}^3 N_h \cdot \sigma_h} = 540 \times \frac{3.000 \times \sqrt{127.670}}{2.371.067,21} = 244,13 \approx 244 \text{ conductores}$$

$$n_3 = 540 \cdot \frac{N_1 \cdot \sigma_1}{\sum_{i=1}^3 N_h \cdot \sigma_h} = 540 \times \frac{2.000 \times \sqrt{60.900}}{2.371.067,21} = 112,41 \approx 112 \text{ conductores}$$

Es el reparto más eficiente, pues minimiza la varianza del estimador.

- e) Se trata de estimar una proporción en un muestreo aleatorio simple (interior del segundo estrato). El tamaño muestral necesario para obtener un error inferior a $e_{p2} = 0,08$ es una cantidad superior a la que se obtiene mediante la fórmula:

$$n = \frac{z_{\alpha/2}^2 \cdot N_2 \cdot p_2 \cdot q_2}{e_{p2}^2 \cdot (N - 1) + z_{\alpha/2}^2 \cdot p_2 \cdot q_2} \quad \text{sin información, } p_2 = q_2 = 0,5 \text{ máxima variabilidad}$$

$$\text{con lo que, } n = \frac{1,96^2 \times 3.000 \times 0,5 \times 0,5}{0,08^2 \times 2999 + 1,96^2 \times 0,5 \times 0,5} = 142,96 \approx 143 \text{ conductores}$$

Cuando un análisis anterior indicaba que $p_2 > 0,6$ se toma $p_2 = 0,6$ y $q_2 = 0,4$, siendo el tamaño muestral necesario:

$$n = \frac{1,96^2 \times 3.000 \times 0,6 \times 0,4}{0,08^2 \times 2999 + 1,96^2 \times 0,6 \times 0,4} = 137,50 \approx 138 \text{ conductores}$$



POBLACIONES FINITAS: MUESTREO ALEATORIO ESTRATIFICADO



Las granjas de una provincia castellana se dividen en cuatro categorías según su especie. El número de granjas en cada categoría es de 80, 40, 50 y 10.

Un estudio para estimar el total de vacas productoras de leche en la zona genera una muestra estratificada de 28 granjas se refleja en la siguiente tabla:

Total de vacas	
Categoría I	60 , 45 , 70 , 45 , 50, 55, 100, 35, 54, 76
Categoría II	160, 148, 90, 140, 95
Categoría III	25, 20, 22, 30, 33, 15, 24, 16, 95 , 80
Categoría IV	16, 10, 25

Con un 95% de confianza, estimar el total de vacas productoras y el error de la estimación del total poblacional.

Solución:

Para estimar el total de vacas productoras de leche en la zona se realiza una estratificación, dividiendo las granjas en cuatro categorías o estratos con tamaños, respectivamente, $N_1 = 80$, $N_2 = 40$, $N_3 = 50$ y $N_4 = 10$.

De cada uno de los estratos se selecciona una muestra de tamaños, respectivamente, $n_1 = 10$, $n_2 = 5$, $n_3 = 10$ y $n_4 = 3$.

$N_1 = 80$
60 45 70 45 50 55 100 35 54 76
$n_1 = 10$

$N_2 = 40$
160 148 90 140 95
$n_2 = 5$

$N_3 = 50$
25 20 22 30 33 15 24 16 95 80
$n_3 = 10$

$N_4 = 10$
16 10 25
$n_4 = 3$

$$f_1 = \frac{n_1}{N_1} = \frac{10}{80} = 0,125$$

$$f_2 = \frac{n_2}{N_2} = \frac{5}{40} = 0,125$$

$$f_3 = \frac{n_3}{N_3} = \frac{10}{50} = 0,2$$

$$f_4 = \frac{n_4}{N_4} = \frac{3}{10} = 0,3$$

$$1 - f_1 = 0,875$$

$$1 - f_2 = 0,875$$

$$1 - f_3 = 0,8$$

$$1 - f_4 = 0,7$$

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{10} \sum_{h=1}^{10} x_{1h} = 59 \quad \bar{x}_2 = \frac{1}{5} \sum_{h=1}^5 x_{2h} = 126,6 \quad \bar{x}_3 = \frac{1}{10} \sum_{h=1}^{10} x_{3h} = 36 \quad \bar{x}_4 = \frac{1}{3} \sum_{h=1}^3 x_{4h} = 17$$

Cuasivarianzas muestrales (estimador insesgado de la varianza poblacional):

$$s_h^2 = \frac{1}{(n_h - 1)} \sum_{i=1}^{n_h} (x_{hi} - \bar{x}_h)^2$$

$$s_1^2 = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^{10} (x_{1i} - 59)^2 = 32,11 \quad s_2^2 = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^5 (x_{2i} - 126,6)^2 = 1022,8$$

$$s_2^2 = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^5 (x_{2i} - 126,6)^2 = 1022,8 \quad s_3^2 = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^{10} (x_{3i} - 36)^2 = 780$$



Estimador total de vacas productoras de leche:

$$\hat{\tau}_{ST} = \hat{x}_{\tau_{ST}} = \sum_{h=1}^4 N_h \cdot \bar{x}_h = 80 \times 59 + 40 \times 126,6 + 50 \times 36 + 10 \times 17 = 11754 \text{ vacas}$$

Varianza del estimador del total de vacas productoras:

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{\tau}_{ST}) &= \sum_{h=1}^4 N_h^2 \cdot (1 - f_h) \cdot \frac{s_h^2}{n_h} = 80^2 \times 0,875 \times \frac{32,11}{10} + 40^2 \times 0,875 \times \frac{1022,8}{5} + \\ &+ 50^2 \times 0,8 \times \frac{780}{10} + 10^2 \times 0,7 \times \frac{57}{3} = 461.695,6 \end{aligned}$$

Error de estimación del total de la población de vacas, con una confianza del 95% ($t_{0,025, 27} = 2,052$):

$$e_{\tau_{ST}} = t_{\alpha/2, (n-1)} \cdot \sqrt{\text{Var}(\hat{\tau}_{ST})} = 2,052 \cdot \sqrt{461.695,6} = 1.394,29$$



POBLACIONES FINITAS: MUESTREO ALEATORIO ESTRATIFICADO



El INE realiza un estudio sobre el salario mensual en euros de 20.000 trabajadores del sector industrial de una provincia. Los trabajadores fueron clasificados por grupos de edad, seleccionando una muestra aleatoria simple en cada uno de los grupos, anotando el número de contratos fijos.

Los datos recogidos fueron:

Estratos de edad (años)	Total de empleados	Empleados analizados	Media salario muestral empleados	Varianza salario muestral empleados	Contratos fijos muestreo de empleados
18 - 30	6.000	1.400	1.400	145.161	612
31 - 49	10.400	2.280	1.850	123.904	1.420
50 - 65	3.600	1.320	2.200	164.025	1.118

Con una confianza del 95% se desea obtener:

- Estimación del salario medio de los 20.000 trabajadores del sector industrial y error de muestreo. ¿Es eficiente el reparto muestral entre los grupos de edad?.
- Intervalo de confianza de la cantidad total mensual percibida entre los salarios de los empleados de mediana edad.
- Proporción de trabajadores con contrato fijo y error de muestreo cometido.

Solución:

- Sea la variable X = "Salario mensual de un empleado del sector industrial", donde x_{ih} = salario mensual del i -ésimo empleado del estrato h .

Como se trata del salario medio global, el estimador del muestreo aleatorio estratificado es:

$$\hat{\mu}_{ST} = \sum_{h=1}^3 W_h \cdot \bar{x}_h, \text{ siendo } W_h = \frac{N_h}{N} \text{ la ponderación del estrato } h\text{-ésimo, con lo cual:}$$

$$W_1 = \frac{N_1}{N} = \frac{6.000}{20.000} = 0,3 \quad W_2 = \frac{N_2}{N} = \frac{10.400}{20.000} = 0,52 \quad W_3 = \frac{N_3}{N} = \frac{3.600}{20.000} = 0,18$$

$$\hat{\mu}_{ST} = \sum_{h=1}^3 W_h \cdot \bar{x}_h = 0,3 \times 1.400 + 0,52 \times 1.850 + 0,18 \times 2.200 = 1.778 \text{ euros}$$

Error de muestreo:

$$e_\mu = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\sum_{h=1}^L W_h^2 \cdot (1 - f_h) \cdot \frac{s_h^2}{n_h}} \quad L = 3, \quad z_{\alpha/2} = z_{0,025} = 1,96, \quad f_h = \frac{n_h}{N_h}$$

sustituyendo, resulta:



$$\sum_{h=1}^3 W_h^2 \cdot (1 - f_h) \cdot \frac{s_h^2}{n_h} = 0,3^2 \times \left(1 - \frac{1.400}{6.000}\right) \cdot \frac{145.161}{1.400} + 0,52^2 \times \left(1 - \frac{2.280}{10.400}\right) \cdot \frac{123.904}{2.280} + 0,18^2 \times \left(1 - \frac{1.320}{3.600}\right) \cdot \frac{164.025}{1.320} = 21,085 \text{ euros}$$

$$e_\mu = 1,96 \times \sqrt{21,085} = 9 \text{ euros}$$

Para obtener el reparto muestral más eficiente hay que emplear el criterio de afijación de Neyman o de varianza mínima. Observando si los tamaños muestrales que hay en cada estrato coinciden con los que proporciona este criterio.

$$\text{Con el criterio de afijación de Neyman o de varianza mínima: } n_h = w_h \cdot n = \frac{N_h \cdot s_h}{\sum_{h=1}^L N_h \cdot s_h} \cdot n$$

$$\sum_{h=1}^3 N_h \cdot s_h = 6.000 \times \sqrt{145.161} + 10.400 \times \sqrt{123.904} + 3.600 \times \sqrt{164.025} = 7.404.800$$

$$n = \sum_{h=1}^3 n_h = 1.400 + 2.280 + 1.320 = 5.000 \text{ empleados}$$

$$n_1 = \frac{6.000 \times \sqrt{145.161}}{7.404.800} \times 5000 = 1.544 \text{ empleados}$$

$$n_2 = \frac{10.400 \times \sqrt{123.904}}{7.404.800} \times 5000 = 2.472 \text{ empleados}$$

$$n_3 = \frac{3.600 \times \sqrt{164.025}}{7.404.800} \times 5000 = 984 \text{ empleados}$$

En consecuencia, el reparto muestral ofrecido no es el más eficiente.

b) Para construir un intervalo de confianza de la cantidad total mensual percibida por los empleados de mediana edad se utiliza la fórmula correspondiente a un muestreo aleatorio simple aplicado al segundo estrato.

$$I(\hat{\tau}_2) = \left[\hat{\tau}_2 \pm e_{\tau_2} \right] = \left[N_2 \cdot \bar{x}_2 \pm z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{N_2^2 \cdot (1 - f_2) \cdot \frac{s_2^2}{n_2}} \right]$$

$$\text{Varianza del estimador del total segundo estrato: } \text{Var}(\hat{\tau}_2) = N_2^2 \cdot (1 - f_2) \cdot \frac{s_2^2}{n_2}$$

$$\text{Factor de corrección de población finita segundo estrato: } (1 - f_2) = \left(1 - \frac{n_2}{N_2}\right) = \left(\frac{N_2 - n_2}{N_2}\right)$$

Por tanto,



$$\text{Var}(\hat{\tau}_2) = N_2^2 \cdot (1 - f_2) \cdot \frac{s^2}{n_2} = 10.400^2 \times \left(1 - \frac{2.280}{10.400}\right) \times \left(\frac{123.904}{2.280}\right) = 4.589.230.260$$

$$I(\tau_2) = [10.400 \times 1850 \pm 1,96 \times \sqrt{4.589.230.260}] = [19.107.222,04 , 19.372.777,96]$$

c) La estimación de la proporción poblacional de empleados con contrato fijo en un muestreo estratificado

viene dada por: $\hat{p}_{ST} = p_{ST} = \sum_{h=1}^3 W_h \cdot p_h$

$$\hat{p}_{ST} = p_{ST} = \sum_{h=1}^3 W_h \cdot p_h = \left(\frac{6.000}{20.000}\right) \times \left(\frac{612}{1.400}\right) + \left(\frac{10.400}{20.000}\right) \times \left(\frac{1.420}{2.280}\right) + \left(\frac{3.600}{20.000}\right) \times \left(\frac{1.118}{1.320}\right) = 0,6075$$

El error de muestreo de la proporción poblacional:

$$e_{p_{ST}} = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\text{Var}(\hat{p}_{ST})} = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\sum_{h=1}^L W_h^2 \cdot \frac{N_h - n_h}{n_h \cdot (N_h - 1)} \cdot \hat{p}_h \cdot \hat{q}_h}$$

Siendo, $W_1 = 0,3$ $W_2 = 0,52$ $W_3 = 0,18$

$$p_1 = \frac{612}{1.400} = 0,4371 \quad q_1 = 0,5629 \quad p_2 = \frac{1.420}{2.280} = 0,6228 \quad q_2 = 0,3772 \quad p_3 = \frac{1.118}{1.320} = 0,8469 \quad q_3 = 0,1531$$

La varianza del estimador de la proporción poblacional será:

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{p}_{ST}) &= \sum_{h=1}^3 W_h^2 \cdot \frac{N_h - n_h}{n_h \cdot (N_h - 1)} \cdot \hat{p}_h \cdot \hat{q}_h = 0,3^2 \times \frac{6.000 - 1.400}{1.400 \times (6.000 - 1)} \times 0,4371 \times 0,5629 + \\ &+ 0,52^2 \times \frac{10.400 - 2.280}{2.280 \times (10.400 - 1)} \times 0,6228 \times 0,3772 + 0,18^2 \times \frac{3.600 - 1.320}{1.320 \times (3.600 - 1)} \times 0,8469 \times 0,1531 = \\ &= 0,000035899 \end{aligned}$$

Para otros investigadores:

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{p}_{ST}) &= \sum_{h=1}^3 W_h^2 \cdot \frac{N_h - n_h}{N_h \cdot (n_h - 1)} \cdot \hat{p}_h \cdot \hat{q}_h = 0,3^2 \times \frac{6.000 - 1.400}{6.000 \times (1.400 - 1)} \times 0,4371 \times 0,5629 + \\ &+ 0,52^2 \times \frac{10.400 - 2.280}{10.400 \times (2.280 - 1)} \times 0,6228 \times 0,3772 + 0,18^2 \times \frac{3.600 - 1.320}{3.600 \times (1.320 - 1)} \times 0,8469 \times 0,1531 = \\ &= 0,000035914 \end{aligned}$$

$$e_{p_{ST}} = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\text{Var}(\hat{p}_{ST})} = 1,96 \times \sqrt{0,000035899} = 0,0117$$



POBLACIONES FINITAS: MUESTREO ALEATORIO ESTRATIFICADO



Una ciudad monumental tiene 10.000 habitantes que viven en tres zonas (antigua, comercial y residencial). Para analizar la edad de los habitantes, se toma una muestra respetando la proporción poblacional de cada uno de los estratos, obteniéndose los siguientes datos:

Edad de los habitantes	
Zona antigua	75 , 55 , 62 , 64 , 40, 49, 35, 37, 24
Zona comercial	27, 52, 46, 33, 57
Zona residencial	28, 72, 52, 48, 24, 64, 34, 53, 30 , 45

Se desea conocer:

- Estimar la edad media de la ciudad y el error de muestreo cometido.
- Tamaño de la muestra, con una confianza del 95% , cuando el error de muestreo no puede superar los cuatro años. Hacer el reparto correspondiente entre los estratos.

Solución:

- Sea la variable X = "Edad de los habitantes de la ciudad"

La edad media de la ciudad viene dada por la expresión: $\bar{x}_{ST} = \sum_{h=1}^3 w_h \cdot \bar{x}_h$

Las medias dentro de cada uno de los estratos: $\bar{x}_h = \frac{1}{n_h} \sum_{i=1}^{n_h} x_{ih}$

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 x_{i1} = 49 \text{ años} \quad \bar{x}_2 = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 x_{i2} = 43 \text{ años} \quad \bar{x}_3 = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_{i3} = 45 \text{ años}$$

Al tener los estratos muestrales la misma proporción de la proporción, se tiene:

$$W_h = \frac{N_h}{N} = \frac{n_h}{n} = w_h \rightarrow N_h = N \cdot w_h$$

Por tanto,

$$n = \sum_{h=1}^3 n_h = 9 + 5 + 10 = 24$$

$$w_1 = \frac{n_1}{n} = \frac{9}{24} = 0,375 \quad w_2 = \frac{n_2}{n} = \frac{5}{24} = 0,208 \quad w_3 = \frac{n_3}{n} = \frac{10}{24} = 0,417$$

$$N_1 = 10.000 \times 0,375 = 3.750 \quad N_2 = 10.000 \times 0,208 = 2.080 \quad N_3 = 10.000 \times 0,417 = 4.170$$

En consecuencia,

$$\bar{x}_{ST} = \sum_{h=1}^3 w_h \cdot \bar{x}_h = 0,375 \times 49 + 0,208 \times 43 + 0,417 \times 45 \approx 46 \text{ años}$$

La edad media es de 46 años.



Error de muestreo:

$$e_\mu = t_{\alpha/2, (n-1)} \cdot \sqrt{\sum_{h=1}^L W_h^2 \cdot (1 - f_h) \cdot \frac{s_h^2}{n_h}} \quad L=3, \quad t_{0,025, 23} = 2,069, \quad f_h = \frac{n_h}{N_h}$$

Cuasivarianzas muestrales de cada estrato: $s_h^2 = \frac{1}{(n_h - 1)} \sum_{i=1}^{n_h} (x_{ih} - \bar{x}_h)^2$

$$s_1^2 = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^9 (x_{i1} - 49)^2 = 269 \quad s_2^2 = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^5 (x_{i2} - 43)^2 = 160,5 \quad s_3^2 = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^{10} (x_{i3} - 45)^2 = 254,22$$

Factor de corrección de población finita: $(1 - f_h) = \left(1 - \frac{n_h}{N_h}\right)$

$$(1 - f_1) = \left(1 - \frac{9}{3.750}\right) = 0,99760 \quad (1 - f_2) = \left(1 - \frac{5}{2.080}\right) = 0,99759$$

$$(1 - f_3) = \left(1 - \frac{10}{4.170}\right) = 0,99760$$

Varianza del estimador de la media global:

$$\begin{aligned} \text{Var}(\bar{x}_{ST}) &= \sum_{h=1}^3 W_h^2 \cdot (1 - f_h) \cdot \frac{s_h^2}{n_h} = 0,375^2 \times 0,99760 \times \frac{269}{9} + 0,208^2 \times 0,99759 \times \frac{160,5}{5} + \\ &+ 0,417^2 \times 0,99760 \times \frac{254,22}{10} = 9,9884 \end{aligned}$$

Error de muestreo: $e_\mu = t_{0,025, 23} \cdot \sqrt{\text{Var}(\bar{x}_{ST})} = 2,069 \times \sqrt{9,9884} = 6,5389 \text{ años}$

Error de muestreo en porcentaje: $\% e_\mu = \frac{e_\mu}{\bar{x}_{ST}} \cdot 100 = \frac{6,5389}{46} \cdot 100 = 14,215\%$

El error de muestreo es de 6,5389 años, es decir, del 14,215%

$$\text{b) El tamaño de la muestra viene dado por la fórmula: } n = \frac{\sum_{h=1}^L \frac{N_h^2}{W_h} \cdot s_h^2}{\frac{N^2 \cdot e_\mu^2}{z_{\alpha/2}^2} + \sum_{h=1}^L N_h \cdot s_h^2}$$

con un error de muestreo $e_\mu = 4 \text{ años}$, siendo $z_{\alpha/2} = z_{0,025} = 1,96$

$$\sum_{h=1}^3 \frac{N_h^2}{W_h} \cdot s_h^2 = \frac{3.750^2}{0,375} \times 269 + \frac{2.080^2}{0,208} \times 160,5 + \frac{4.170^2}{0,417} \times 254,22 = 24.026.874.000$$



$$\frac{N^2 \cdot e_\mu^2}{z_{\alpha/2}^2} + \sum_{h=1}^3 N_h \cdot s_h^2 = \frac{10.000^2 \times 4^2}{1,96^2} + 3.750 \times 269 + 2.080 \times 160,5 + 4.170 \times 254,22 = \\ = 562.607.162$$

Finalmente, $n = \frac{24.026.874,00}{562.607.162} \approx 43$ personas

En consecuencia, para cometer un error de muestreo no superior a 4 años (inferior al obtenido con los datos facilitados) habría que aumentar el tamaño de la muestra en ($43 - 24 = 19$ personas).

Para repartir las 43 personas entre los tres estratos se utiliza el criterio de afijación proporcional

$$w_h = \frac{n_h}{n} \rightarrow n_h = n \cdot w_h, \text{ resultando:}$$

$$n_1 = n \cdot w_1 = 43 \times 0,375 \approx 16 \text{ personas}$$

$$n_2 = n \cdot w_2 = 43 \times 0,208 \approx 9 \text{ personas}$$

$$n_3 = n \cdot w_3 = 43 \times 0,417 \approx 18 \text{ personas}$$



POBLACIONES FINITAS: MUESTREO ALEATORIO ESTRATIFICADO



En una población de $N = 24$ unidades dividida en dos estratos del mismo tamaño se obtiene una muestra estratificada que proporciona los siguientes valores:

$$\text{Estrato 1: } (3; 2; 4) \quad \text{Estrato 2: } (6; 4; 5)$$

Se pide:

- Error de muestreo $\hat{\sigma}_{\bar{x}_{st}}$, siendo $\bar{x}_{st} = \sum_k w_h \cdot \bar{x}_h$
- Error de muestreo $\hat{\sigma}_{\bar{x}}$, que se hubiera obtenido sin estratificar la población con un esquema sin reposición y probabilidades iguales, utilizando los resultados obtenidos con la muestra estratificada. ¿Cuál es la ganancia de precisión expresada en porcentaje?
- Suponiendo ahora que, en un momento aleatorio simple, los datos muestrales del estrato 1 corresponden a la variable auxiliar que se supone relacionada con la anterior, estimar el valor aproximado de la componente sistemática del error debido al muestreo al utilizar un estimador de la razón.

Solución:

- El Intervalo de confianza para la media global poblacional:

$$I(\mu) = \left[\hat{\mu}_{ST} \pm e_{\mu} \right] = \left[\frac{1}{N} \sum_{h=1}^L N_h \cdot \bar{x}_h \pm z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\sum_{h=1}^L w_h^2 \cdot (1 - f_h) \cdot \frac{s_h^2}{n_h}} \right] \quad L = 2 \text{ estratos}$$

$$\text{Siendo: } w_h = \frac{n_h}{n} \rightarrow w_1 = w_2 = \frac{1}{2}, \quad f_1 = f_2 = \frac{3}{12}, \quad n_1 = n_2 = 3$$

$$\text{Cuasivarianza del estrato } h\text{-ésimo: } s_h^2 = \frac{1}{n_h - 1} \sum_{i=1}^{n_h} (x_{ih} - \bar{x}_h)^2 = \frac{1}{n_h - 1} \sum_{i=1}^{n_h} (x_{ih}^2 - n_h \cdot \bar{x}_h^2)$$

$$\text{Estrato 1: } (3; 2; 4) \rightarrow s_1^2 = \frac{1}{n_1 - 1} \sum_{i=1}^{n_1} (x_{i1}^2 - n_1 \cdot \bar{x}_1^2) = \frac{1}{3 - 1} \sum_{i=1}^3 (x_{i1}^2 - n_1 \cdot \bar{x}_1^2) = \frac{1}{2} (29 - 27) = 1$$

$$\text{Estrato 2: } (6; 4; 5) \rightarrow s_2^2 = \frac{1}{n_2 - 1} \sum_{i=1}^{n_2} (x_{i2}^2 - n_2 \cdot \bar{x}_2^2) = \frac{1}{3 - 1} \sum_{i=1}^3 (x_{i2}^2 - n_2 \cdot \bar{x}_2^2) = \frac{1}{2} (77 - 75) = 1$$

$$\text{Var}(\bar{x}_{st}) = \sum_{h=1}^2 w_h^2 \cdot (1 - f_h) \cdot \frac{s_h^2}{n_h} = \frac{1}{4} \cdot \left(1 - \frac{3}{12}\right) \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \left(1 - \frac{3}{12}\right) \cdot \frac{1}{3} = 0,125$$

$$\text{El error de muestreo: } \hat{\sigma}_{\bar{x}} = \sqrt{0,125} = 0,35$$

- J.N.K. Rao relaciona la varianza en muestras aleatorias simples con resultados obtenidos en muestras estratificadas:

$$\hat{V}(\bar{x}) = \left(\frac{N - n}{N - 1} \right) \cdot \frac{1}{n} \cdot \left[\frac{1}{N} \sum_{h=1}^L \frac{N_h}{n_h} \sum_{i=1}^{n_h} x_{hi}^2 - \bar{x}_{ST}^2 + V(\bar{x}_{ST}) \right]$$



$$\bar{x}_{ST} = \frac{1}{N} \sum_{h=1}^2 N_h \cdot \bar{x}_h = \sum_{h=1}^2 w_h \cdot \bar{x}_h = \frac{1}{2} (3 + 5) = 4$$

$$\sum_{h=1}^2 \frac{N_h}{n_h} \sum_{i=1}^{n_h} x_{hi}^2 = \frac{12}{3} \left[3^2 + 2^2 + 4^2 + 6^2 + 4^2 + 5^2 \right] = 424$$

$$\hat{V}(\bar{x}) = \left(\frac{24 - 6}{24 - 1} \right) \cdot \frac{1}{6} \cdot \left[\frac{1}{24} \cdot 424 - 4^2 + 0,125 \right] = \frac{43}{184} = 0,23$$

En consecuencia, con la estratificación la ganancia en precisión es del 23%.

c) El sesgo del estimador de razón, en un muestreo aleatorio simple, utilizando los valores muestrales de la variable X como característica de estudio y la variable auxiliar Y, viene dado por la expresión::

$$\hat{B} = (1 - f) \cdot \hat{R} \left[\frac{1}{\bar{y}^2} \frac{\sum y_i^2 - n \cdot \bar{y}^2}{n \cdot (n - 1)} - \frac{1}{\bar{x} \cdot \bar{y}} \frac{\sum x_i \cdot y_i - n \cdot \bar{x} \cdot \bar{y}}{n \cdot (n - 1)} \right] \text{ siendo } \hat{R} = \frac{\bar{x}}{\bar{y}}$$

x_i	y_i	$x_i \cdot y_i$	y_i^2
3	6	18	36
2	4	8	16
4	5	20	25

$$\bar{x} = 3 \quad \bar{y} = 5$$

$$f = \frac{n}{N} = \frac{3}{24} = 0,125 \quad \hat{R} = \frac{\bar{x}}{\bar{y}} = \frac{3}{5} = 0,6$$

$$\sum_{i=1}^3 x_i \cdot y_i = 46 \quad \sum_{i=1}^3 y_i^2 = 77$$

$$\hat{B} = (1 - 0,125) \cdot 0,6 \left[\frac{1}{25} \cdot \frac{77 - 3 \cdot 25}{3 \cdot 2} - \frac{1}{3 \cdot 5} \cdot \frac{46 - 3 \cdot 3 \cdot 5}{3 \cdot 2} \right] = \frac{7}{6.000} = 0,00117$$

sesgo prácticamente nulo.



POBLACIONES FINITAS: MUESTREO ALEATORIO ESTRATIFICADO



En una determinada localidad de 500 viviendas se desea hacer un estudio sobre el hábito de fumar entre las personas mayores de 16 años. Para ello se estratifica la población en dos estratos, en el estrato I (estrato viviendas de clase alta) se encuentran clasificadas 200 viviendas, mientras que en el estrato II (estrato de viviendas de clase baja) existen 300 viviendas. En cada uno de los estratos se selecciona una muestra aleatoria de 5 viviendas.

La tabla arroja los siguientes resultados:

Estrato 1					
Viviendas en la muestra	1	2	3	4	5
Número de personas mayores de 16 años	4	3	2	1	2
Número de fumadores menores de 16 años	1	1	0	1	1
Estrato 2					
Viviendas en la muestra	1	2	3	4	5
Número de personas mayores de 16 años	5	6	4	4	3
Número de fumadores menores de 16 años	3	3	1	2	2

Se pide:

- Estimar la proporción total de fumadores, entre las personas mayores de 16 años, en la localidad.
- Calcular el error de muestreo de la estimación anterior.

Solución:

- Se trata de un muestreo estratificado, donde la unidad primaria de muestreo es la vivienda o conglomerado de personas. Al no realizarse submuestreo de personas, en cada estrato se aplica un muestreo aleatorio simple de conglomerados sin submuestreo.

Para cada vivienda de la muestra se obtiene un apareja de datos:

$$x_{ih} \equiv \text{número de fumadores} > 16 \text{ años, en la vivienda } i\text{-ésima del estrato } h$$

$$y_{ih} \equiv \text{número de personas} > 16 \text{ años, en la vivienda } i\text{-ésima del estrato } h$$

Un estimador consistente de razón R es: $\hat{R} = \frac{\hat{X}}{\hat{Y}}$, siendo \hat{X} e \hat{Y} estimadores insesgados de X e Y,

respectivamente, que se obtienen mediante un muestreo estratificado.

$$\hat{X} = \sum_{h=1}^L N_h \cdot \bar{x}_h \quad \hat{Y} = \sum_{h=1}^L N_h \cdot \bar{y}_h \quad \hat{R} = \frac{\hat{X}}{\hat{Y}} = \frac{\sum_{h=1}^L N_h \cdot \bar{x}_h}{\sum_{h=1}^L N_h \cdot \bar{y}_h}$$

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 x_{i1} = \frac{4}{5} = 0,8 \quad \bar{x}_2 = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 x_{i2} = \frac{11}{5} = 2,2$$



$$\bar{y}_1 = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 y_{i1} = \frac{12}{5} = 2,4 \quad \bar{y}_2 = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 y_{i2} = \frac{22}{5} = 4,4$$

$$\hat{R} = \frac{\sum_{h=1}^2 N_h \cdot \bar{x}_h}{\sum_{h=1}^2 N_h \cdot \bar{y}_h} = \frac{200 \cdot 0,8 + 300 \cdot 2,2}{200 \cdot 2,4 + 300 \cdot 4,4} = 0,455 \approx 46\%$$

Los fumadores en la población son el 46%

b) La varianza se estima mediante: $\hat{V}(\hat{R}) \approx \frac{1}{\hat{Y}^2} \left[\hat{\sigma}_{\hat{X}}^2 + \hat{R}^2 \cdot \hat{\sigma}_{\hat{Y}}^2 - 2 \cdot R \cdot \hat{\sigma}_{\hat{X}, \hat{Y}} \right]$

Estrato 1: Personas menores de 16 años

x_{i1}	x_{i1}^2	x_{i2}	x_{i2}^2
1	1	3	9
1	1	3	9
0	0	1	1
1	1	2	4
1	1	2	4

$$\sum x_{i1} = 4$$

$$\sum x_{i1}^2 = 4$$

$$\sum x_{i2} = 11$$

$$\sum x_{i2}^2 = 27$$

$$\bar{x}_1 = 0,8$$

$$\bar{x}_2 = 2,2$$

Cuasivarianza del estrato h-ésimo: $s_h^2 = \frac{1}{n_h - 1} \sum_{i=1}^{n_h} (x_{ih} - \bar{x}_h)^2 = \frac{1}{n_h - 1} \sum_{i=1}^{n_h} (x_{ih}^2 - n_h \cdot \bar{x}_h^2)$

$$s_1^2 = \frac{1}{n_1 - 1} \sum_{i=1}^{n_1} (x_{i1}^2 - n_1 \cdot \bar{x}_1^2) = \frac{1}{5 - 1} [4 - 5 \cdot 0,8^2] = 0,2$$

$$s_2^2 = \frac{1}{n_2 - 1} \sum_{i=1}^{n_2} (x_{i2}^2 - n_2 \cdot \bar{x}_2^2) = \frac{1}{5 - 1} [27 - 5 \cdot 2,2^2] = 0,7$$

$$N_1 = 200 \quad N_2 = 300 \quad n_1 = n_2 = 5$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{X}}^2 = \sum_{h=1}^L N_h (N_h - n_h) s_h^2 = 200 \cdot (200 - 5) \cdot 0,2 + 300 \cdot (300 - 5) \cdot 0,7 = 69.750$$


Estrato 1: Personas mayores de 16 años

y_{i1}	y_{i1}^2	y_{i2}	y_{i2}^2
4	16	5	25
3	9	6	36
2	4	4	16
1	1	4	16
2	4	3	9

$$\sum y_{i1} = 12$$

$$\sum y_{i1}^2 = 34$$

$$\sum y_{i2} = 22$$

$$\sum y_{i2}^2 = 102$$

$$\bar{y}_1 = 2,4$$

$$\bar{y}_2 = 4,4$$

$$s_1^2 = \frac{1}{n_1 - 1} \sum_{i=1}^{n_h} (y_{i1}^2 - n_h \cdot \bar{y}_1^2) = \frac{1}{5-1} [34 - 5 \cdot 2,4^2] = 1,3$$

$$s_2^2 = \frac{1}{n_2 - 1} \sum_{i=1}^{n_h} (y_{i2}^2 - n_h \cdot \bar{y}_2^2) = \frac{1}{5-1} [102 - 5 \cdot 4,4^2] = 1,3$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{Y}}^2 = \sum_{h=1}^L N_h (N_h - n_h) s_h^2 = 200 \cdot (200 - 5) \cdot 1,3 + 300 \cdot (300 - 5) \cdot 1,3 = 165.750$$

$$\text{Covarianza Personas } \hat{\sigma}_{X \cdot \hat{Y}}^2 = \sum_{h=1}^L N_h (N_h - n_h) s_{hh}^2$$

Estrato 1: Personas

x_{i1}	y_{i1}	$x_{i1} \cdot y_{i1}$
1	4	4
1	3	3
0	2	0
1	1	1
1	2	2

$$\sum x_{i1} = 4$$

$$\sum y_{i1} = 12$$

$$\sum x_{i1} \cdot y_{i1} = 10$$

$$\bar{x}_1 = 0,8$$

$$\bar{y}_1 = 2,4$$

$$s_{hh}^2 = \frac{1}{n_h - 1} \sum_{i=1}^{n_h} (x_{ih} - \bar{x}_h) \cdot (y_{ih} - \bar{y}_h) = \frac{1}{n_h - 1} \left(\sum_{i=1}^{n_h} x_{ih} \cdot y_{ih} - n_h \cdot \bar{x}_h \cdot \bar{y}_h \right)$$

$$s_{11}^2 = \frac{1}{n_1 - 1} \left(\sum_{i=1}^{n_h} x_{i1} \cdot y_{i1} - n_1 \cdot \bar{x}_1 \cdot \bar{y}_1 \right) = \frac{1}{5-1} (10 - 5 \cdot 0,8 \cdot 2,4) = 0,1$$



Estrato 2: Personas

x_{i2}	y_{i2}	$x_{i2} \cdot y_{i2}$
3	5	15
3	6	18
1	4	4
2	4	8
2	3	6

$$\sum x_{i2} = 11$$

$$\sum y_{i2} = 22$$

$$\sum x_{i2} \cdot y_{i2} = 51$$

$$\bar{x}_2 = 2,2$$

$$\bar{y}_2 = 4,4$$

$$\hat{Y} = \sum_{h=1}^2 N_h \cdot \bar{y}_h = 200 \cdot 2,4 + 300 \cdot 4,4 = 1.800$$

$$s_{22}^2 = \frac{1}{n_2 - 1} \left(\sum_{i=1}^{n_h} x_{i2} \cdot y_{i2} - n_2 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{y}_2 \right) = \frac{1}{5 - 1} (51 - 5 \cdot 2,2 \cdot 4,4) = 0,65$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{x} \cdot \hat{y}}^2 = \sum_{h=1}^L N_h (N_h - n_h) s_{hh}^2 = 200 \cdot (200 - 5) \cdot 0,1 + 300 \cdot (300 - 5) \cdot 0,65 = 61.425$$

Varianza estimada:

$$\begin{aligned} \hat{V}(\hat{R}) &\approx \frac{1}{\hat{Y}^2} \left[\hat{\sigma}_{\hat{x}}^2 + \hat{R}^2 \cdot \hat{\sigma}_{\hat{y}}^2 - 2 \cdot R \cdot \hat{\sigma}_{\hat{x} \cdot \hat{y}} \right] = \\ &= \frac{1}{1.800^2} \left[69.750 + 0,455^2 \times 165.750 - 2 \times 0,455 \times 61.425 \right] = 0,0149 \end{aligned}$$

Error de muestreo de \hat{R} : $\hat{\sigma}_{\hat{R}} = \sqrt{0,0149} = 0,122$



POBLACIONES FINITAS: MUESTREO ALEATORIO POR CONGLOMERADOS



La Comunidad de Madrid desarrolla un estudio sobre el consumo de drogas entre jóvenes de Enseñanza Secundaria. Entre los 89 Centros que tiene la DAT Capital, se selecciona una muestra aleatoria simple de seis Centros, realizando una encuesta anónima a todos los estudiantes de cada Centro.

Los datos recogidos de la encuesta fueron:

Centro	Número de alumnos	Gasto medio semanal en tabaco y alcohol (euros)	Número de alumnos que han probado otras drogas
A	1.272	16,80	182
B	974	12,60	132
C	889	15,40	119
D	1.207	18,32	193
E	1.328	11,80	114
F	824	14,42	130

- Construir un intervalo de confianza para el gasto mensual medio en tabaco y alcohol entre los estudiantes de la ESO, con una confianza del 95%.
- Construir un intervalo de confianza para alumnos de la ESO que han consumido otras drogas, con una fiabilidad del 95%.

Solución:

- Para obtener información sobre la variable X = "Gasto mensual en tabaco y alcohol de un alumno de la ESO" se ha realizado un muestreo por conglomerados, eligiendo mediante un muestreo aleatorio simple seis Centros ($m = 6$) entre los ($M = 89$) Centros que tiene DAT Capital.

El intervalo de confianza del gasto medio semanal en tabaco y alcohol viene dado por la expresión:

$$I(\mu) = \left[\bar{x}_C \pm e_{\mu} \right] = \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^m N_i \cdot \bar{x}_i \pm t_{\alpha/2, (m-1)} \cdot \sqrt{\frac{m}{n^2} \cdot \left(\frac{M-m}{M} \right) \cdot s_C^2} \right]$$

$$n = \sum_{i=1}^6 N_i \quad M = 89 \quad m = 6$$

Para facilitar los cálculos se construye la tabla:

N_i	\bar{x}_i	$N_i \cdot \bar{x}_i$	$\bar{x}_i - \bar{x}_C$	$N_i^2 \cdot (\bar{x}_i - \bar{x}_C)^2$
1.272	16,80	21.369,6	1,86	5.597.577,45
974	12,60	12.272,4	-2,34	5.194.570,31
889	15,40	13.690,6	0,46	167.231,92
1.207	18,32	22.112,24	3,38	16.643.625,72
1.328	11,80	15.670,4	-3,14	17.388.232,81
824	14,42	11.882,08	-0,52	183.595,11
6.494		96.997,32		45.174.833,31



$$n = \sum_{i=1}^6 N_i = 1.272 + 974 + 889 + 1.207 + 1.328 + 824 = 6.494 \text{ alumnos}$$

$$\text{Estimador puntual: } \hat{\mu}_C = \bar{x}_C = \frac{1}{6.494} \sum_{i=1}^6 N_i \cdot \bar{x}_i = \frac{96.997,32}{6.494} = 14,94 \text{ euros}$$

Cuasivarianza entre conglomerados:

$$s_C^2 = \frac{1}{5} \sum_{h=1}^6 N_h^2 \cdot (\bar{x}_h - \bar{x}_C)^2 = \frac{45.174.833,31}{5} = 9.034.966,66 \text{ euros}^2$$

$$\text{Estimador de la varianza: } \widehat{\text{Var}}(\bar{x}_C) = \frac{6}{6.494^2} \times \left(\frac{89 - 6}{89} \right) \times (9.034.966,66) = 1,198 \text{ euros}^2$$

Error de muestreo:

$$e_\mu = t_{0,05/2, (6-1)} \cdot \sqrt{\widehat{\text{Var}}(\bar{x}_C)} = 2,571 \times \sqrt{1,198} = 2,81 \text{ euros} \quad t_{0,05/2, 5} = 2,571$$

•• Intervalo de confianza del gasto medio semanal poblacional:

$$I(\mu) = [\bar{x}_C \pm e_\mu] = [14,94 \pm 2,81] = [12,13, 17,75]$$

b) Para construir un intervalo de confianza para el total de estudiantes de la ESO que han consumido otras drogas, con una confianza del 95%, sea la variable

$$Y = \text{"Alumnos de la ESO que consumen otras drogas"} \quad Y = \begin{cases} 1 & \text{consume otras drogas} \\ 0 & \text{no consume otras drogas} \end{cases}$$

•• Intervalo de confianza para el total de alumnos que consumen otras drogas:

$$I(\tau) = [\hat{x}_\tau \pm e_\tau] = \left[M \cdot \bar{w}_C \pm t_{\alpha/2, (m-1)} \cdot \sqrt{M^2 \cdot \left(\frac{M-m}{M} \right) \cdot \frac{s_\tau^2}{m}} \right]$$

$$\text{Estimador puntual: } \hat{x}_\tau = \frac{M}{m} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{N_i} Y_{ij} = M \cdot \bar{w} \quad w_i = \sum_{j=1}^{N_i} y_{ij} \text{ Total del conglomerado i-ésimo}$$

$$\text{Estimador de la varianza total: } \widehat{\text{Var}}(\hat{x}_\tau) = M^2 \cdot \left(\frac{M-m}{M} \right) \cdot \frac{s_\tau^2}{m}$$

$$\text{Cuasivarianza muestral: } s_\tau^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (w_i - \bar{w}_i)^2 = \frac{1}{m-1} \left[\sum_{i=1}^m w_i^2 - \frac{1}{m} \left(\sum_{i=1}^m w_i \right)^2 \right]$$

$$\text{Error de estimación: } e_\tau = t_{\alpha/2, (m-1)} \cdot \sqrt{\widehat{\text{Var}}(\hat{x}_\tau)}$$



Para facilitar los cálculos se elabora la tabla:

w_i	w_i^2
182	33.124
132	17.424
119	14.161
193	37.249
114	12.996
130	16.900
870	131.854

$$\bar{w}_c = \frac{870}{6} = 145 \text{ alumnos}$$

$$s_{\tau}^2 = \frac{1}{5} \left[\sum_{i=1}^6 w_i^2 - \frac{1}{6} \left(\sum_{i=1}^6 w_i \right)^2 \right] = \frac{1}{5} \times \left(131.845 - \frac{870^2}{6} \right) = 1.140,8$$

$$\hat{x}_{\tau} = M \cdot \bar{w} = 89 \times 145 = 12.905 \text{ alumnos}$$

$$\text{Estimador de la varianza total: } \widehat{\text{Var}}(\hat{x}_{\tau}) = 89^2 \times \left(\frac{89 - 6}{89} \right) \times \frac{1.140,8}{6} = 1.404.514,93$$

$$\text{Error de estimación: } e_{\tau} = 2,571 \times \sqrt{1.404.514,93} \approx 3.047 \quad (t_{0,025,5} = 2,571)$$

$$\text{Intervalo de confianza para el total de alumnos: } I(\tau) = [12.905 \pm 3.047] = [9.858, 15.952]$$



POBLACIONES FINITAS: MUESTREO ALEATORIO POR CONGLOMERADOS



En un estudio sobre la desigualdad social del distrito de Tetuán (seis barrios, con 38.000 viviendas estructuradas en 190 manzanas) se analiza el consumo de electricidad. Se seleccionan aleatoriamente 10 manzanas de viviendas, recogiendo información sobre el consumo de electricidad, resultando:

Manzanas de viviendas	Número de viviendas	Consumo electricidad (kw/h)	Proporción de mujeres/vivienda
1	168	1798	0,53
2	174	1478	0,79
3	177	1693	0,39
4	179	1254	0,44
5	163	2100	0,65
6	178	1535	0,28
7	157	1817	0,86
8	163	2067	0,54
9	174	1364	0,76
10	181	1348	0,32

- ¿Cuál es el Intervalo de confianza (95%) del consumo medio de electricidad por manzanas de viviendas?. ¿Qué tamaño debe tener la muestra para que el error no sea mayor del 5% del consumo medio en electricidad?.
- Encontrar el Intervalo de confianza (90%) del consumo total de electricidad. ¿Cuál es la muestra de conglomerados para que el error de muestreo sea del 5%?.
- Calcular el Intervalo de confianza (95%) de la proporción estimada de mujeres por vivienda en la población. ¿Qué tamaño tiene que tener la muestra para que el error de muestreo no supere al 10% en la proporción de la población?.

Solución:

- Sea la variable X = "consumo de electricidad por manzanas de viviendas"

Para obtener información sobre esta variable se ha realizado un muestreo por conglomerados (manzanas de viviendas) eligiendo, mediante un muestreo aleatorio simple, diez manzanas de viviendas ($m = 10$) entre las 190 ($M = 190$) con que cuenta el distrito de Tetuán.

La población objetivo son las 38.000 viviendas.

Para estimar el consumo medio de electricidad por manzanas de viviendas en la población de Tetuán se utiliza el intervalo de confianza:

$$I(\mu) = \left[\bar{x}_c \pm e_{\mu} \right] = \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^m N_i \cdot x_i \pm t_{\alpha/2, (m-1)} \cdot \sqrt{\frac{M}{N^2} \cdot \left(\frac{M-m}{m} \right) \cdot s_c^2} \right]$$

$$\text{Siendo: } N = \sum_{i=1}^{190} N_i = 38.000 \quad n = \sum_{i=1}^{10} N_i \quad M = 190 \quad m = 10 \quad \bar{N} = \frac{N}{M} = \frac{38.000}{190} = 200$$



Para facilitar los cálculos se construye la tabla:

N_i	x_i	$N_i \cdot x_i$	$(x_i - \bar{x}_c)^2$	$N_i^2 \cdot (x_i - \bar{x}_c)^2$
168	1798	302.064	26.569	749.883.456
174	1478	257.172	24.649	746.273.124
177	1693	299.661	3.364	105.390.756
179	1254	224.466	145.161	4.651.103.601
163	2100	342.300	216.225	5.744.882.025
178	1535	273.230	10.000	316.840.000
157	1817	285.269	33.124	816.473.476
163	2067	336.921	186.624	4.958.413.056
174	1364	237.336	73.441	2.223.499.716
181	1348	243.988	82.369	2.698.490.809
1.714		2.802.407		23.011.250.019

$$\text{Estimador puntual: } \hat{\mu}_c = \bar{x}_c = \frac{1}{1.714} \sum_{i=1}^{10} N_i \cdot x_i = \frac{2.802.407}{1.714} = 1635 \text{ kw/h}$$

$$\text{Tamaño promedio del conglomerado en la población: } \bar{N} = \frac{N}{M} = \frac{38.000}{190} = 200$$

$$\text{Cuasivarianza conglomerados: } s_c^2 = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^{10} N_i^2 \cdot (x_i - \bar{x}_c)^2 = \frac{23.011.250.019}{9} = 2.556.805.558$$

Estimador de la varianza:

$$\text{Var}(\bar{x}_c) = \frac{M}{N^2} \cdot \left(\frac{M-m}{m} \right) \cdot s_c^2 = \frac{190}{38.000^2} \times \left(\frac{190-10}{10} \right) \times (2.556.805.558) = 6.055.592$$

$$\text{Error de muestreo: } e_\mu = t_{0,025, 9} \cdot \sqrt{\text{Var}(\bar{x}_c)} = 2,262 \times \sqrt{6.055.592} = 176,024 \text{ kw/h}$$

$$\text{Error de muestreo en términos relativos: } \% e_\mu = \frac{e_\mu}{\bar{x}_c} \times 100 = \frac{176,024}{1.635} \times 100 = 10,76\%$$

Intervalo de confianza para el consumo medio de electricidad:

$$I(\mu) = [\bar{x}_c \pm e_\mu] = [1.635 \pm 176,024] = [1.458,976, 1.811,024]$$

Sí el error de muestreo no debe superar el 5% del consumo medio en electricidad, se tiene:

$$e_\mu^* = \bar{x}_c \times 0,05 = 1.635 \times 0,05 = 81,75$$

$$e_\mu^* = t_{\alpha/2, (m-1)} \cdot \sqrt{\frac{M}{N^2} \cdot \left(\frac{M-m}{m} \right) \cdot s_c^2} \rightarrow m = \frac{t_{\alpha/2, (m-1)}^2 \cdot M^2 \cdot s_c^2}{e_\mu^* \cdot N^2 + t_{\alpha/2, (m-1)}^2 \cdot M \cdot s_c^2}$$

$$\text{En consecuencia, } m = \frac{2,262^2 \times 190^2 \times 2.556.805.558}{81,75^2 \times 38.000^2 + 2,262^2 \times 190 \times 2.556.805.558} \approx 39 \text{ conglomerados}$$



b) Intervalo de confianza para el consumo total de electricidad de la población:

$$I(\tau) = [\hat{x}_\tau \pm e_\tau] = \left[N \cdot \bar{x}_C \pm t_{\alpha/2, (m-1)} \cdot \sqrt{M \cdot \left(\frac{M-m}{m} \right) \cdot s_\tau^2} \right]$$

Estimador del consumo total: $\hat{x}_\tau = N \cdot \bar{x}_C = 38.000 \times 1.635 = 62.130.000 \text{ Kw/h}$

Estimador de la varianza del consumo total:

$$\text{Var}(\hat{x}_\tau) = \text{Var}(N \cdot \bar{x}_C) = N^2 \cdot \text{Var}(\bar{x}_C) = 38.000^2 \times 6.055,592 = 8.744.270.000.000$$

$$\text{Error de muestreo: } e_\tau = t_{0,025, 9} \cdot \sqrt{\text{Var}(\bar{x}_C)} = 2,262 \times \sqrt{8.744.270.000.000} = 6.688.895 \text{ kw/h}$$

$$\text{Error de muestreo en términos relativos: \% } e_\tau = \frac{e_\tau}{\bar{x}_C} \times 100 = \frac{6.688.895}{62.130.000} \times 100 = 10,76\%$$

Intervalo de confianza para el consumo total de electricidad:

$$I(\tau) = [\hat{x}_C \pm e_\tau] = [62.130.000 \pm 6.688.895] = [55.441.105, 68.818.895]$$

El número de conglomerados (m) que se requieren para un error muestral del 5% del consumo total, es decir, un error $e^\bullet = \bar{x}_C \times 0,05 = 62.130.000 \times 0,05 = 3.106.500$, se obtiene despejando:

$$e^\bullet = t_{\alpha/2, (m-1)} \cdot \sqrt{M \cdot \left(\frac{M-m}{m} \right) \cdot s_\tau^2} \quad \rightarrow \quad m = \frac{t_{\alpha/2, (m-1)}^2 \cdot M^2 \cdot s_\tau^2}{e^\bullet^2 + t_{\alpha/2, (m-1)}^2 \cdot M \cdot s_\tau^2} \quad t_{0,025, 9} = 2,262$$

$$m = \frac{2,262^2 \times 190^2 \times 2.556.805.558}{3.106.500^2 + 2,262^2 \times 190 \times 2.556.805.558} = 40 \text{ conglomerados}$$

c) Intervalo de confianza (95%) de la proporción estimada de mujeres por vivienda en la población.

$$I(p) = [\hat{p}_p \pm e_p] = \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^m N_i \cdot p_i \pm z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{M}{N^2} \cdot \left(\frac{M-m}{m} \right) \cdot s_p^2} \right]$$



Para facilitar los cálculos se construye la tabla:

N_i	p_i	$N_i \cdot p_i$	$(p_i - \bar{p}_p)^2$	$N_i^2 \cdot (p_i - \bar{p}_p)^2$
168	0,53	89,04	0,0004	11,2896
174	0,79	137,46	0,0576	1.743,8976
177	0,39	69,03	0,0256	802,0224
179	0,44	78,76	0,0121	387,6961
163	0,65	105,95	0,0100	265,69
178	0,28	49,84	0,0729	2.309,7636
157	0,86	135,02	0,0961	2.368,7689
163	0,54	88,02	0,0001	2,6569
174	0,76	132,24	0,0441	1.335,1716
181	0,32	57,92	0,0529	1.733,0569
1.714		943,28		10.960,0136

$$N = 38.000 \quad n = \sum_{i=1}^{10} N_i = 1.714 \quad M = 190 \quad m = 10$$

Estimador puntual: $\hat{p}_p = \bar{p}_p = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{10} N_i \cdot p_i = \frac{1}{1714} \times 943,28 = 0,55$ mujeres/vivienda

Cuasivarianza entre conglomerados: $s_p^2 = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^{10} N_i^2 \cdot (p_i - \bar{p}_p)^2 = \frac{10.960,0136}{9} = 1.217,78$

Varianza de la proporción: $\text{Var}(\hat{p}_p) = \frac{1}{m \cdot \bar{N}^2} \cdot \left(\frac{M-m}{M} \right) \cdot s_p^2 = \frac{M}{N^2} \cdot \left(\frac{M-m}{m} \right) \cdot s_p^2$

Varianza de la proporción:

$$\text{Var}(\hat{p}_p) = \frac{M}{N^2} \cdot \left(\frac{M-m}{m} \right) \cdot s_p^2 = \frac{190}{38.000^2} \times \left(\frac{190-10}{10} \right) \times (1.217,78) = 0,002884$$

Error de muestreo de la proporción: $e_p = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\text{Var}(\hat{p}_p)} = 1,96 \times \sqrt{0,002884} = 0,1053$

Intervalo de confianza para la proporción poblacional de mujeres:

$$I(p) = [\hat{p}_p \pm e_p] = [0,55 \pm 0,1053] = [0,4447, 0,6553]$$

Para que el error de muestreo no supere el 10% en la proporción de mujeres, $e_p = 0,01$

Tamaño de la muestra:

$$m = \frac{z_{\alpha/2}^2 \cdot M^2 \cdot s_p^2}{e_p^2 \cdot N^2 + z_{\alpha/2}^2 \cdot M \cdot s_p^2} = \frac{1,96^2 \times 190^2 \times 1.217,78}{0,01^2 \times 38.000^2 + 1,96^2 \times 190 \times 1.217,78} = 164 \text{ conglomerados}$$



POBLACIONES FINITAS: MUESTREO ALEATORIO POR CONGLOMERADOS



De una población formada por N conglomerados se selecciona una muestra de tamaño n con el procedimiento siguiente: la 1^a extracción se realiza con probabilidades

desiguales P_i , siendo $\sum_i^N P_i = 1$, los $(n-1)$ conglomerados

restantes de la muestra se eligen con probabilidades iguales. Todas las extracciones se hacen sin reposición.
Se pide:

a) La probabilidad π_i de que el conglomerado u_i aparezca en la muestra.

b) Comprobar que $\sum_i^N \pi_i = n$

c) Calcular una estimación insesgada del total poblacional X , siendo $N=50$, $n=4$, X_i el total del conglomerado i -ésimo, y conociendo los siguientes datos de los conglomerados de la muestra:

P_i	0,026	0,017	0,022	0,013
X_i	100	80	120	60

Solución:

a) La probabilidad π_i de que la unidad u_i pertenezca a la muestra: Es la suma de la probabilidad de que aparezca en la 1^a extracción más la probabilidad de que no aparezca en la primera extracción por lo que aparezca en una de las $(n-1)$ extracciones restantes de las $(N-1)$ unidades que quedan en la población.

$$\pi_i = P_i + (1 - P_i) \cdot \frac{n-1}{N-1} = \frac{n-1}{N-1} + \left(1 - \frac{n-1}{N-1}\right) \cdot P_i = \frac{n-1}{N-1} + \left(\frac{N-n}{N-1}\right) \cdot P_i$$

$$\begin{aligned} b) \sum_i^N \pi_i &= \sum_i^N \left[\frac{n-1}{N-1} + \left(\frac{N-n}{N-1}\right) \cdot P_i \right] = N \cdot \left(\frac{n-1}{N-1}\right) + \left(\frac{N-n}{N-1}\right) \cdot \sum_i^N P_i \\ &= N \cdot \left(\frac{n-1}{N-1}\right) + \left(\frac{N-n}{N-1}\right) = n \cdot \left(\frac{N-1}{N-1}\right) = n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) \hat{X} &= \sum_{i=1}^4 \frac{X_i}{\pi_i} = \sum_{i=1}^4 \frac{X_i}{\left[\frac{n-1}{N-1} + \left(\frac{N-n}{N-1}\right) \cdot P_i \right]} = \frac{100}{\left[\frac{3}{49} + \left(\frac{46}{49}\right) \cdot 0,026 \right]} + \\ &+ \frac{80}{\left[\frac{3}{49} + \left(\frac{46}{49}\right) \cdot 0,017 \right]} + \frac{120}{\left[\frac{3}{49} + \left(\frac{46}{49}\right) \cdot 0,022 \right]} + \frac{60}{\left[\frac{3}{49} + \left(\frac{46}{49}\right) \cdot 0,013 \right]} = 4.487 \end{aligned}$$



POBLACIONES FINITAS: MUESTREO CONGLOMERADO COMPLEJO



Una empresa segoviana de porcino vende sus mercancías en el interior y exterior de España.

Un auditor tiene que verificar si la facturación media anual por cliente es de 985 euros.

Para ello, en una primera fase divide a la clientela en dos estratos (interior o exterior), y dentro de cada estrato toma una muestra aleatoria de conglomerados (60 euros en el interior y 40 euros en el exterior). Posteriormente, en una segunda fase, dentro de cada conglomerado elige una muestra aleatoria de las facturas (10 euros en el interior y 8 euros en el exterior).

Los datos recogidos figuran en la tabla adjunta:

Estrato 1: Comercio Interior en España

U_{1i}	N_{1i}	n_{1i}	$\sum x_{1i}$	s_{1i}^2
1	204	22	24972	355229
2	141	15	18956	333384
3	126	13	16879	315661
4	173	18	23267	340769
5	126	14	17222	358772
6	157	17	19204	339507
7	165	18	19026	281421
8	139	15	21135	305978
9	141	15	16093	410228
10	118	13	15581	371733
	1490	160	192335	

Estrato 2: Comercio Exterior fuera de España

U_{2i}	N_{2i}	n_{2i}	$\sum x_{2i}$	s_{2i}^2
1	51	7	2382	22822
2	71	9	3068	20275
3	116	15	4593	7435
4	53	8	1890	19381
5	109	14	4015	15429
6	116	15	4364	17078
7	103	13	3392	5748
8	71	9	1796	10131
	690	90	25500	

Solución:

MUESTRAS COMPLICADAS: Se selecciona una muestra a partir de un diseño muestral que combina diferentes procedimientos muestrales. Por ejemplo, en encuestas donde el muestreo se realiza en varias etapas.

Los investigaciones realizan el muestreo en varias etapas, en la primera se estratifica a la población, en la segunda etapa se seleccionan aleatoriamente conglomerados, y en una tercera etapa se eligen aleatoriamente a los individuos dentro de los conglomerados.

La media poblacional anual de las facturas se obtiene a partir de las estimaciones obtenidas para cada estrato, con su respectiva ponderación.

Primero se analizan el estimador de la media y la varianza del estimador de la media dentro de cada estrato.



■ Estrato 1: Comercio Interior en España

Para facilitar los cálculos se construye la tabla:

U_{1i}	N_{1i}	n_{1i}	$\sum x_{1i}$	$\bar{x}_{1i} = \frac{\sum x_{1i}}{n_{1i}}$	$N_{1i} \cdot \bar{x}_{1i}$	s_{1i}^2	$\left(N_{1i} \cdot \bar{x}_{1i} - \frac{N_1}{m_1} \bar{x}_1 \right)^2$	$N_{1i}^2 \cdot \left(1 - \frac{n_{1i}}{N_{1i}} \right) \cdot \frac{s_{w1i}^2}{n_{1i}}$
1	204	22	24.972	1.135,1	231.558,55	355.229	2.738.554.479,14	1.079.096.630
2	141	15	18.956	1.263,7	178.186,40	333.384	1.083.567,72	710.748.964,8
3	126	13	16.879	1.298,4	163.596,46	315.661	244.324.536,27	622.298.075,5
4	173	18	23.267	1.292,6	223.621,72	340.769	1.970.860.676,46	913.773.265,3
5	126	14	17.222	1.230,1	154.998,00	358.772	587.061.187,78	650.955.312
6	157	17	19.204	1.129,6	177.354,59	339.507	3.507.220,11	790.131.868,2
7	165	18	19.026	1.057,0	174.405,00	281.421	23.255.017,00	682.586.905
8	139	15	21.135	1.409,0	195.851,00	305.978	276.345.885,90	632.859.957,3
9	141	15	16.093	1.072,9	151.274,20	410.228	781.378.348,44	874.572.804
10	118	13	15.581	1.198,5	141.427,54	371.733	1.428.825.419,04	637.721.877,7
	1490	160	192.335		1.792.273,46		8.055.196.337,87	7.594.745.660

$$M_1 = 60 \quad m_1 = 10 \quad N_1 = \sum_{i=1}^{10} N_{1i} = 1490 \quad \bar{N}_1 = \frac{N_1}{m_1} = \frac{1490}{10} = 149$$

$$\text{Valor medio de las facturas de los conglomerados: } \bar{x}_1 = \frac{1}{N_1} \cdot \sum_{i=1}^{10} N_{1i} \cdot \bar{x}_{1i} = \frac{1.792.273,46}{1.490} = 1.202,87$$

Cuasivarianza "entre" los conglomerados:

$$s_{1b}^2 = \frac{1}{10-1} \sum_{i=1}^{10} \left(N_{1i} \cdot \bar{x}_{1i} - \frac{1490}{10} \times 1.202,87 \right)^2 = \frac{8.055.196.337,87}{9} = 895.021.815,32$$

Cuasivarianza "dentro" para el conjunto de conglomerados:

$$s_{1w}^2 = \sum_{i=1}^{10} N_{1i}^2 \cdot \left(1 - \frac{n_{1i}}{N_{1i}} \right) \cdot \frac{s_{w1i}^2}{n_{1i}} = 7.594.745.660$$

Varianza del estimador de la media poblacional (varianzas "entre" y "dentro" de los conglomerados):

$$\begin{aligned} \text{Var}(\bar{x}_1) &= \frac{M}{m \cdot N_1^2} \cdot \left[(M-m) \cdot s_b^2 + s_w^2 \right] = \\ &= \frac{10}{60 \times 1.490^2} \cdot \left[(60-10) \times 895.021.815,32 + 7.594.745.660 \right] = 3.929,69 \end{aligned}$$



■ Estrato 2: Comercio exterior fuera de España

Para facilitar los cálculos se construye la tabla:

U_{2i}	N_{2i}	n_{2i}	$\sum x_{2i}$	$\bar{x}_{2i} = \frac{\sum x_{2i}}{n_{2i}}$	$N_{2i} \cdot \bar{x}_{2i}$	s_{2i}^2	$\left(N_{2i} \cdot \bar{x}_{2i} - \frac{N_2}{m_2} \bar{x}_2 \right)^2$	$N_{2i}^2 \cdot \left(1 - \frac{n_{2i}}{N_{2i}} \right) \cdot \frac{s_{w_{2i}}^2}{n_{2i}}$
1	51	7	2382	340,29	17.354,57	22822	50.433.063,44	204.977.538,86
2	71	9	3068	340,89	24.203,11	20275	64.051,67	293.511.664,89
3	116	15	4593	306,20	35.519,20	7435	122.390.070,14	443.793.488,27
4	53	8	1890	236,25	12.521,25	19381	142.442.922,39	182.865.403,13
5	109	14	4015	286,79	31.259,64	15429	46.286.896,91	477.653.221,07
6	116	15	4364	290,93	33.748,27	17078	86.342.587,89	477.319.212,80
7	103	13	3392	260,92	26.875,08	5748	5.850.987,68	361.214.820,00
8	71	9	1796	199,56	14.168,44	10131	105.837.820,32	269.382.835,56
	690	90	25500		195.649,56		559.648.400,44	2.710.718.184,56

$$M_2 = 40 \quad m_2 = 8 \quad N_2 = \sum_{i=1}^8 N_{2i} = 690 \quad \bar{N}_2 = \frac{N_2}{m_2} = \frac{690}{8} = 86,25$$

$$\text{Valor medio de las facturas de los conglomerados: } \bar{x}_2 = \frac{1}{N_2} \cdot \sum_{i=1}^8 N_{2i} \cdot \bar{x}_{2i} = \frac{195.649,56}{690} = 283,55$$

Cuasivarianza "entre" los conglomerados:

$$s_{2b}^2 = \frac{1}{8-1} \sum_{i=1}^8 \left(N_{2i} \cdot \bar{x}_{2i} - \frac{690}{8} \times 283,55 \right)^2 = \frac{559.648.400,44}{7} = 79.949.771,49$$

Cuasivarianza "dentro" para el conjunto de conglomerados:

$$s_{2w}^2 = \sum_{i=1}^8 N_{2i}^2 \cdot \left(1 - \frac{n_{2i}}{N_{2i}} \right) \cdot \frac{s_{w_{2i}}^2}{n_{2i}} = 2.710.718.184,56$$

Varianza del estimador de la media poblacional (varianzas "entre" y "dentro" de los conglomerados):

$$\begin{aligned} \text{Var}(\bar{x}_2) &= \frac{M}{m \cdot N_2^2} \cdot \left[(M-m) \cdot s_b^2 + s_w^2 \right] = \\ &= \frac{8}{40 \times 690^2} \times \left[(40-8) \times 79.949.771,49 + 2.710.718.184,56 \right] = 2.213,45 \end{aligned}$$

- Media poblacional anual de las facturas a partir de las estimaciones obtenidas para cada estrato, con su respectiva ponderación.

$$N_1 = 1490 \quad \bar{x}_1 = 1.202,87 \quad \text{Var}(\bar{x}_1) = 3.929,69$$

$$N_2 = 690 \quad \bar{x}_2 = 283,55 \quad \text{Var}(\bar{x}_2) = 2.213,45$$

$$N = N_1 + N_2 = 1.490 + 690 = 2.180$$



Estimación de la media poblacional anual de las facturas:

$$\bar{x} = \sum_{h=1}^2 \frac{N_h}{N} \cdot \bar{x}_h = \frac{1490}{2180} \times 1.202,87 + \frac{690}{2180} \times 283,55 = 911,89$$

Estimación de la varianza del valor medio poblacional anual de las facturas:

$$\text{Var}(\bar{x}) = \sum_{h=1}^2 \left(\frac{N_h}{N} \right)^2 \cdot \text{Var}(\bar{x}_h) = \left(\frac{1490}{2180} \right)^2 \times 3.929,69 + \left(\frac{690}{2180} \right)^2 \times 2.213,45 = 2.057,51$$

Error de muestreo, con un nivel del 95% : $e_\mu = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\text{Var}(\bar{x})} = 1,96 \times \sqrt{2.057,51} = 88,90$

Error relativo de muestreo: $\% e_\mu = \frac{e_\mu}{\bar{x}} \cdot 100 = \frac{88,90}{911,89} \cdot 100 = 9,75 \%$

Intervalo de confianza para la media poblacional anual de las facturas:

$$I(\mu) = [\bar{x} \pm e_\mu] = [911,89 \pm 88,90] = [822,99, 1000,79]$$

El auditor verifica que la facturación media anual por cliente es de 985 euros, al ser una cantidad comprendida dentro del intervalo de confianza para la media poblacional de las facturas.



POBLACIONES FINITAS: MUESTREO BIETÁPICO POR CONGLOMERADOS



En el distrito de Tetuán (seis barrios, con 37.464 familias estructuradas en 190 manzanas de viviendas) se ha seleccionado una muestra piloto de seis manzanas de viviendas y dentro de ellas se han tomado muestras aleatorias de familias recogiendo la renta familiar. En la tabla adjunta se muestran los datos recogidos:

Manzanas de viviendas	N_i	n_i	Renta familiar (miles de euros)					
1	20	4	924	5.120	2.696	3.912		
2	10	3	3.527	4.519	5.976			
3	20	5	1.446	2.550	2.944	2.270	4.890	
4	20	4	1.884	3.108	2.730	2.430		
5	10	4	3.012	4.710	3.750	3.784		
6	15	5	1.350	2.045	4.068	2.412	3.220	

Se pide:

- Intervalo de confianza para la media poblacional y error relativo de muestreo.
- ¿Cuántos conglomerados hay que analizar con un presupuesto de 6.920 euros, sabiendo que el coste de seleccionar las manzanas de viviendas es de 3 euros por conglomerado, mientras que el coste de muestrear a las familias dentro de cada conglomerado es de 10 euros?
- Intervalo de confianza para el total de la población.

Solución:

- La población objetivo es las 37.464 familias del distrito de Tetuán, con un método de selección muestral en dos etapas. En la primera etapa se seleccionan las manzanas de viviendas, y en la segunda etapa se seleccionan las familias.

Intervalo de confianza para la media poblacional:

$$I(\mu) = \left[\frac{M}{N} \cdot \frac{\sum_{i=1}^m N_i \cdot \bar{x}_i}{m} \pm z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{M}{m \cdot N^2} \cdot \left[(M-m) \cdot s_b^2 + s_w^2 \right]} \right]$$

En un primer paso, se calcula la media muestral de cada conglomerado, el promedio poblacional estimado y la cuasivarianza dentro de cada conglomerado.

$$M = 190 \quad m = 6 \quad N = 37.464 \quad \bar{N} = \frac{N}{M} = \frac{37.464}{190} = 197,179 \quad s_{w_i}^2 = \frac{1}{n_j - 1} \sum_{j=1}^{n_j} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2$$



Para facilitar los cálculos se recurre a la tabla:

C_i	N_i	n_i	Renta familiar (miles de euros)					\bar{x}_i	$N_i \cdot \bar{x}_i$	$\sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2$	$s_{w_i}^2$
1	20	4	924	5.120	2.696	3.912		3.163	63.260	9.622.060	3.207.353,33
2	10	3	3.527	4.519	5.976			4.674	46.740	3.034.838	1.517.419
3	20	5	1.446	2.550	2.944	2.270	4.890	2.820	56.400	6.563.552	1.640.888
4	20	4	1.884	3.108	2.730	2.430		2.538	50.760	801.144	267.048
5	10	4	3.012	4.710	3.750	3.784		3.814	38.140	1.451.016	483.672
6	15	5	1.350	2.045	4.068	2.412	3.220	2.619	39.285	4.443.488	1.110.872
											294.585

Media dentro de cada conglomerado: $\bar{x}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}$

Promedio poblacional estimado: $\bar{x} = \frac{M}{N} \cdot \frac{\sum_{i=1}^m N_i \cdot \bar{x}_i}{m} = \frac{190}{37.464} \cdot \frac{294.585}{6} = 249$

La varianza del estimador de la media poblacional es la suma de las varianzas entre y dentro de los conglomerados, resultando:

$$\text{Var}(\bar{x}) = \frac{M}{m \cdot N^2} \cdot [(M - m) \cdot s_b^2 + s_w^2]$$

Cuasivarianza "entre" los conglomerados: $s_b^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m \left(N_i \cdot \bar{x}_i - \frac{N}{M} \bar{x} \right)^2$

Cuasivarianza "dentro" para el conjunto de conglomerados: $s_w^2 = \sum_{i=1}^m N_i^2 \cdot \left(1 - \frac{n_i}{N_i} \right) \cdot \frac{s_{w_i}^2}{n_i}$

$$M = 190 \quad m = 6 \quad N = 37.464 \quad \left(N_i \cdot \bar{x}_i - \frac{N}{M} \bar{x} \right)^2 = \left(N_i \cdot \bar{x}_i - 197,179 \times 249 \right)^2$$

En la tabla se presentan las operaciones necesarias para realizar los cálculos:



C_i	N_i	n_i	\bar{x}_i	$N_i \cdot \bar{x}_i$	$s_{w_i}^2$	$\left(N_i \cdot \bar{x}_i - \frac{N}{M} \bar{x} \right)^2$	$\left(1 - \frac{n_i}{N_i} \right)$	$N_i^2 \cdot \left(1 - \frac{n_i}{N_i} \right) \cdot \frac{s_{w_i}^2}{n_i}$
1	20	4	3.163	63.260	3.207.353,33	200.574.395,2	0,800	256.588.267
2	10	3	4.674	46.740	1.517.419	5.558.141,02	0,700	35.406.443,3
3	20	5	2.820	56.400	1.640.888	53.325.469,3	0,750	98.453.280
4	20	4	2.538	50.760	267.048	2.763.670,18	0,800	21.363.840
5	10	4	3.814	38.140	483.672	120.068.362,2	0,600	7.255.080
6	15	5	2.619	39.285	1.110.872	96.286.549,63	0,667	33.326.160
				294.585		478.576.587,5		452.393.070

Cuasivarianza "entre" los conglomerados:

$$s_b^2 = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^6 \left(N_i \cdot \bar{x}_i - \frac{N}{M} \bar{x} \right)^2 = \frac{478.576.587,5}{5} = 95.715.317,51$$

Cuasivarianza "dentro" para el conjunto de conglomerados:

$$s_w^2 = \sum_{i=1}^6 N_i^2 \cdot \left(1 - \frac{n_i}{N_i} \right) \cdot \frac{s_{w_i}^2}{n_i} = 452.393.070$$

Varianza del estimador de la media poblacional (varianzas "entre" y "dentro" de los conglomerados):

$$\begin{aligned} \text{Var}(\bar{x}) &= \frac{M}{m \cdot N^2} \cdot \left[(M - m) \cdot s_b^2 + s_w^2 \right] = \\ &= \frac{190}{6 \times 37.464^2} \times \left[(190 - 6) \times 95.715.317,51 + 452.393.070 \right] = 407,557 \end{aligned}$$

El error muestral, asumiendo normalidad, con un 95% de fiabilidad:

$$e_\mu = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\text{Var}(\bar{x})} = 1,96 \times \sqrt{407,557} = 39,569 \text{ miles de euros}$$

$$\text{Error de muestreo en términos relativos: } \% e_\mu = \frac{e_\mu}{\bar{x}} \cdot 100 = \frac{39,569}{249} \times 100 = 15,89 \%$$

Intervalo de confianza para la media poblacional:

$$I(\mu) = \left[\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\text{Var}(\bar{x})} \right] = [249 \pm 39,569] = [209,431, 288,569]$$

b) El valor de n que minimiza la varianza de la media muestral para un coste fijo es: $\bar{n} = \sqrt{\frac{N \cdot s_w^2 \cdot c_1}{M \cdot s_b^2 \cdot c_2}}$

$$N = 37.464 \quad M = 190 \quad c_1 = 3 \quad c_2 = 10 \quad s_b^2 = 95.715.317,51 \quad s_w^2 = 452.393.070$$

$$\bar{n} = \sqrt{\frac{37.464 \times 452.393.070 \times 3}{190 \times 95.715.317,51 \times 10}} = 16,72 \approx 17 \text{ familias}$$



Con un presupuesto de 6.920 euros, los conglomerados que se pueden estimar son:

$$m = \frac{C}{c_1 + c_2 \cdot \bar{n}} = \frac{6920}{3 + 10 \times 17} = 40 \text{ conglomerados}$$

c) Intervalo de confianza para el total poblacional:

$$I(\tau) = \left[\hat{x} \pm z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\text{Var}(\hat{x})} \right] = \left[\frac{M}{m} \cdot \sum_{i=1}^m N_i \cdot \bar{x}_i \pm z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{M}{m} \cdot \left[(M-m) \cdot s_b^2 + s_w^2 \right]} \right]$$

$$\text{Estimador poblacional: } \hat{x} = \frac{M}{m} \cdot \sum_{i=1}^m N_i \cdot \bar{x}_i = \frac{190}{6} \cdot \sum_{i=1}^6 N_i \cdot \bar{x}_i = \frac{190}{6} \times 294.585 = 9.328.525$$

Varianza del total poblacional:

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{x}) &= \frac{M}{m} \cdot \left[(M-m) \cdot s_b^2 + s_w^2 \right] = \\ &= \frac{190}{6} \times \left[(190-6) \times 95.715.317,51 + 452.393.070 \right] = 572.027.000.000 \end{aligned}$$

$$\text{O bien, } \text{Var}(\hat{x}) = \text{Var}(N \cdot \bar{x}) = N^2 \cdot \text{Var}(\bar{x}) = 37.464^2 \times 407.557$$

$$\text{Error de muestreo: } e_\tau = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\text{Var}(\hat{x})} = 1,96 \times \sqrt{572.027.000.000} = 1.482.396,384 \text{ euros}$$

$$\text{Error relativo de muestreo: } \% e_\tau = \frac{e_\tau}{\bar{x}} \cdot 100 = \frac{1.482.396,384}{9.328.525} \times 100 = 15,89 \%$$

Intervalo de confianza para el total poblacional:

$$\begin{aligned} I(\tau) &= \left[\hat{x} \pm z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\text{Var}(\hat{x})} \right] = \left[9.328.525 \pm 1.482.396,384 \right] = \\ &= [7.846.128,616, 10.810.921,384] \end{aligned}$$



POBLACIONES FINITAS: MUESTREO BIETÁPICO POR CONGLOMERADOS



En un distrito del Ayuntamiento de Madrid, formado por 90 manzanas de viviendas, para estimar la proporción de viviendas que no están al corriente con el pago del IBI (Impuesto sobre Bienes Inmuebles), se ha utilizado la siguiente selección muestral:
En una primera etapa se eligieron muestras de 10 manzanas.

Manzanas de viviendas	N_i	n_i	a_i
1	56	11	3
2	40	8	2
3	66	13	4
4	42	8	3
5	58	12	3
6	52	10	5
7	48	10	3
8	45	9	2
9	65	13	5
10	30	10	4

En una segunda etapa se eligieron muestras aleatorias de viviendas dentro de cada manzana seleccionada.

En la tabla adjunta figuran los datos con que se ha trabajado y el atributo $a_i \equiv$ no han pagado el IBI

Se pide:

- Intervalo de confianza (95%) para la proporción poblacional de viviendas que no han pagado el IBI.
- Con un presupuesto de 3.000 euros, sabiendo que el coste por conglomerado es de cinco euros y 8 euros por vivienda, ¿cuántos conglomerados y cuántas viviendas se pueden muestrear?

Solución:

- El tamaño medio poblacional se puede estimar a partir de los tamaños de los conglomerados que forman la muestra.

Intervalo de confianza para la proporción poblacional en un muestreo bietápico:

$$I(p) = \left[\hat{p} \pm z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\text{Var}(\hat{p})} \right] = \left[\frac{1}{N_1} \cdot \sum_{i=1}^m N_i \cdot \hat{p}_i \pm z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{m}{M \cdot N_1^2} \cdot \left[(M - m) \cdot s_b^2 + s_w^2 \right]} \right]$$



La tabla adjunta recoge los resultados para calcular el estimador de la proporción poblacional.

Manzanas de viviendas	N _i	n _i	a _i	$\hat{p}_i = \frac{a_i}{n_i}$	N _i · \hat{p}_i
1	56	11	3	0,2727	15,27
2	40	8	2	0,2500	10,00
3	66	13	4	0,3077	20,31
4	42	8	3	0,3750	15,75
5	58	12	3	0,2500	14,50
6	52	10	5	0,5000	26,00
7	48	10	3	0,3000	14,40
8	45	9	2	0,2222	10,00
9	65	13	5	0,3846	25,00
10	30	10	4	0,4000	12,00
	502				163,23

$$\text{Estimador de la proporción poblacional: } \hat{p} = \frac{1}{N_1} \cdot \sum_{i=1}^{10} N_i \cdot \hat{p}_i = \frac{1}{502} \times 163,23 = 0,325$$

El 32,5 % de las viviendas no han pagado el IBI

C _i	N _i	n _i	\hat{p}_i	\hat{q}_i	N _i · \hat{p}_i	$\left(N_i \cdot \hat{p}_i - \frac{n}{m} \hat{p} \right)^2$	$\left(1 - \frac{n_i}{N_i} \right)$	$N_i^2 \cdot \left(1 - \frac{n_i}{N_i} \right) \cdot \frac{\hat{p}_i \cdot \hat{q}_i}{n_i}$
1	56	11	0,2727	0,7273	15,27	1,1032	0,8036	45,4395
2	40	8	0,2500	0,7500	10,00	39,9809	0,8000	30,0000
3	66	13	0,3077	0,6923	20,31	15,8774	0,8030	57,3182
4	42	8	0,3750	0,6250	15,75	0,3284	0,8095	41,8359
5	58	12	0,2500	0,7500	14,50	3,3235	0,7931	41,6875
6	52	10	0,5000	0,5000	26,00	93,6435	0,8077	54,6000
7	48	10	0,3000	0,7000	14,40	3,6981	0,7917	38,3040
8	45	9	0,2222	0,7778	10,00	39,9809	0,8000	31,1111
9	65	13	0,3846	0,6154	25,00	75,2896	0,8000	61,5385
10	30	10	0,4000	0,6000	12,00	18,6887	0,6667	14,4000
	502				163,23	291,9141		416,2347

Cuasivarianza de la proporción "entre" los conglomerados:

$$s_b^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m \left(N_i \cdot \hat{p}_i - \frac{n}{m} \hat{p} \right)^2 = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^{10} \left(N_i \cdot \hat{p}_i - \frac{n}{m} \hat{p} \right)^2 = \frac{291,9141}{9} = 32,4349$$

Cuasivarianza de la proporción "dentro" para el conjunto de conglomerados:

$$s_w^2 = \sum_{i=1}^{10} N_i^2 \cdot \left(1 - \frac{n_i}{N_i} \right) \cdot \frac{\hat{p}_i \cdot \hat{q}_i}{n_i} = 416,2347$$



La varianza del estimador de la proporción poblacional es la suma de las varianzas "entre" y "dentro" de los conglomerados:

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{p}) &= \frac{m}{M \cdot N_1^2} \cdot [(M - m) \cdot s_b^2 + s_w^2] = \\ &= \frac{10}{90 \cdot 502^2} \cdot [(90 - 10) \cdot 32,4349 + 416,2347] = 0,00132 \end{aligned}$$

Error de muestreo: $e_p = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\text{Var}(\hat{p})} = 1,96 \times \sqrt{0,00132} = 0,071 \quad (7,1\%)$

Para obtener un error de muestreo menor habría que aumentar el tamaño de la muestra, tanto de conglomerados como de viviendas.

Intervalo de confianza para la proporción de viviendas de la población que no han pagado el IBI

$$I(p) = [\hat{p} \pm e_p] = [0,325 \pm 0,071] = [0,254, 0,396]$$

b) Con un presupuesto $C = 3.000$ euros, con un coste de trabajo por conglomerado de $c_1 = 5$ euros y $c_2 = 8$ euros por vivienda, se pueden muestrear:

$$\bar{n} = \sqrt{\frac{n \cdot s_w^2 \cdot c_1}{m \cdot s_b^2 \cdot c_2}} = \sqrt{\frac{502 \times 416,2347 \times 5}{10 \times 32,4349 \times 8}} = 20 \text{ viviendas}$$

Conglomerados que se pueden estimar: $m = \frac{C}{c_1 + c_2 \cdot \bar{n}} = \frac{3.000}{5 + 8 \times 20} = 18 \text{ conglomerados}$



POBLACIONES FINITAS: MUESTREO SISTEMÁTICO



El Ayuntamiento de Cobos de Fuentidueña quiere determinar el gasto medio y total de agua de los habitantes del pueblo. Se ha confeccionado un listado de las facturas trimestrales de los paisanos en euros, representando por 1 los habitantes que residen de continuo en el pueblo y por 0 los que tienen su residencia como segunda vivienda.

FACTURA DEL AGUA DE COBOS DE FUENTIDUEÑA

ID	Gasto	Control
1	67,34	1
2	24,85	0
3	32,94	1
4	23,67	0
5	68,15	1
6	63,45	1
7	74,87	1
8	56,62	1
9	42,43	1
10	8,37	0
11	89,04	1
12	12,58	0
13	95,71	1
14	24,15	0
15	30,42	1
16	6,89	0
17	14,78	0
18	74,62	1
19	85,18	1
20	56,62	1
21	52,14	1
22	15,64	0
23	24,78	0
24	84,32	1
25	37,45	0
26	66,83	1
27	5,72	0
28	37,68	1

ID	Gasto	Control
29	35,87	1
30	86,28	1
31	4,29	0
32	16,82	0
33	42,24	0
34	56,28	1
35	88,18	1
36	7,12	0
37	58,06	1
38	60,34	1
39	38,48	0
40	74,27	1
41	8,72	0
42	92,14	1
43	96,56	1
44	64,83	1
45	47,32	0
46	98,38	1
47	8,16	0
48	17,92	0
49	38,85	1
50	76,98	1
51	87,35	1
52	41,32	0
53	84,38	1
54	42,25	1
55	6,74	0
56	35,78	0

ID	Gasto	Control
57	90,14	1
58	12,34	0
59	6,96	0
60	8,42	0
61	36,54	1
62	28,27	0
63	53,87	1
64	54,14	1
65	86,94	1
66	5,14	0
67	16,78	0
68	41,45	1
69	57,04	1
70	62,91	0
71	62,56	1
72	61,28	1
73	33,14	0
74	74,19	1
75	21,08	0
76	86,75	1
77	24,64	0
78	25,36	0
79	38,98	1
80	12,61	0
81	39,94	0
82	11,62	0
83	74,86	1
84	72,76	1



ID	Gasto	Control
85	85,93	1
86	23,48	0
87	15,67	0
88	27,39	0
89	86,83	1
90	98,18	1
91	8,49	0
92	96,34	1
93	39,52	0
94	54,68	1
95	83,08	1
96	17,64	0
97	55,45	1
98	50,73	1
99	8,97	0
100	46,34	1
101	24,35	0
102	91,36	1
103	54,09	1
104	85,86	1
105	14,31	0
106	82,37	1
107	52,18	1
108	24,36	0
109	47,37	1
110	53,35	1
111	31,06	0
112	17,83	0
113	81,89	1
114	66,73	1
115	11,45	0
116	73,18	1
117	13,64	0
118	73,89	1
119	32,13	0
120	9,24	0

ID	Gasto	Control
121	77,64	1
122	31,41	0
123	61,29	1
124	42,36	1
125	8,42	0
126	64,02	1
127	18,32	0
128	89,77	1
129	85,67	1
130	84,49	1
131	85,21	1
132	79,86	1
133	76,29	1
134	77,29	1
135	88,49	1
136	14,75	0
137	7,28	0
138	45,87	1
139	45,34	1
140	63,52	1
141	20,02	0
142	39,53	0
143	34,64	1
144	16,75	0
145	43,72	1
146	32,08	1
147	72,04	1
148	96,63	1
149	94,42	1
150	9,78	1
151	8,84	0
152	65,12	1
153	93,64	1
154	79,06	1
155	30,56	1
156	21,24	0

ID	Gasto	Control
157	90,73	1
158	56,65	1
159	7,77	0
160	85,11	1
161	97,42	1
162	11,98	0
163	74,34	1
164	23,26	0
165	17,96	0
166	67,38	1
167	41,44	1
168	4,95	0
169	83,96	1
170	37,86	1
171	88,54	1
172	14,15	0
173	55,45	1
174	40,32	1
175	79,04	1
176	55,37	1
177	29,84	1
178	76,08	1
179	90,69	1
180	39,54	1
181	84,68	1
182	85,39	1
183	83,24	1
184	78,87	1
185	95,24	1
186	77,39	1
187	23,84	0
188	5,31	0
189	92,38	1
190	27,76	0
191	51,94	1
192	87,49	1



ID	Gasto	Control
193	82,68	1
194	39,72	1
195	64,81	1

ID	Gasto	Control
196	13,74	0
197	15,76	0
198	43,52	1

ID	Gasto	Control
199	97,66	1
200	8,48	0

Con una muestra sistemática de 20 viviendas, se pide:

- Intervalo de confianza para el gasto medio poblacional.
- Intervalo de confianza para el gasto total poblacional.
- Intervalo de confianza para la proporción poblacional de viviendas ocupadas.

Solución:

- Intervalo de confianza sistemático para el gasto medio poblacional, en muestras pequeñas ($n \leq 30$)

$$I(\mu) = \left[\bar{x} \pm e_{\mu} \right] = \left[\bar{x} \pm t_{\alpha/2, (n-1)} \cdot s_x \cdot \sqrt{\frac{(N-n)}{n \cdot N}} \right]$$

$$\text{Patrón sistemático: } k = \frac{N}{n} = \frac{200}{20} = 10$$

Se elige un número aleatorio (ID) del 1 hasta el 10. Sale el número 4. Obteniendo la muestra:

ID	Gasto
4	23,67
14	24,15
24	84,32
34	56,28
44	64,83
54	42,25
64	54,14
74	74,19
84	72,76
94	54,68
104	85,86
114	66,73
124	42,36
134	77,29
144	16,75
154	79,06
164	23,26
174	40,32
184	78,87
194	39,72

$$\text{Estimador del gasto medio poblacional: } \bar{x} = \frac{1}{20} \cdot \sum_{i=1}^{20} x_i = \frac{1.101,49}{20} = 55,07$$

Cuasivarianza del gasto medio sistemático:

$$s_x^2 = \frac{1}{(20-1)} \cdot \sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x})^2 = \frac{9552,8663}{19} = 502,78$$

Varianza estimada del gasto medio poblacional:

$$\text{Var}(\bar{x}) = \left(\frac{N-n}{N} \right) \cdot \frac{s_x^2}{n} = \left(\frac{200-20}{200} \right) \times \frac{502,78}{20} = 22,625$$

$$\text{Error de estimación: } e_{\mu} = t_{0,025, 19} \cdot \sqrt{\text{Var}(\bar{x})} = 2,0930 \times \sqrt{22,625} = 9,96$$

$$\text{Error relativo de estimación: \% } e_{\mu} = \frac{e_{\mu}}{\bar{x}} \cdot 100 = \frac{9,96}{55,07} \times 100 = 18,08\%$$

Intervalo de confianza para el gasto medio poblacional:

$$I(\mu) = \left[\bar{x} \pm e_{\mu} \right] = [55,07 \pm 9,96] = [48,11 , 62,03]$$



b) Intervalo de confianza sistemático para el total poblacional, en muestras pequeñas ($n \leq 30$)

$$I(\tau) = [\hat{x} \pm e_\tau] = \left[N \cdot \bar{x} \pm t_{\alpha/2, (n-1)} \cdot s_x \cdot \sqrt{\frac{N \cdot (N-n)}{n}} \right]$$

Estimador del total poblacional: $\hat{x} = N \cdot \bar{x} = 200 \times 55,07 = 11.014$

Varianza estimada del total poblacional:

$$\text{Var}(\hat{x}) = \text{Var}(N \cdot \bar{x}) = N^2 \cdot \text{Var}(\bar{x}) = 200^2 \times 22,625 = 905.000$$

$$\text{Error de estimación: } e_\tau = t_{0,025, 19} \cdot \sqrt{\text{Var}(N \cdot \bar{x})} = 2,0930 \times \sqrt{905.000} = 1.991,10$$

$$\text{Error relativo de estimación: \% } e_\tau = \frac{e_\tau}{\hat{x}} \cdot 100 = \frac{1.991,10}{11.014} \times 100 = 18,08\%$$

El error muestral del gasto total en agua es de 1.991,10 euros, valor que representa el 18,08 % del estimador del gasto total en agua.

Intervalo de confianza para el gasto total poblacional:

$$I(\tau) = [\hat{x} \pm e_\tau] = [11.014 \pm 1.991,10] = [9.022,9, 13.0005,1]$$

b) Intervalo de confianza sistemático para la proporción poblacional de viviendas ocupadas:

$$I(p) = [\hat{p} \pm e_p] = \left[\hat{p} \pm z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{(N-n)}{n \cdot (N-1)} \cdot \hat{p} \cdot \hat{q}} \right]$$

$$\text{Otros investigadores: } I(p) = [\hat{p} \pm e_p] = \left[\hat{p} \pm z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{(N-n)}{N \cdot (n-1)} \cdot \hat{p} \cdot \hat{q}} \right]$$



ID	Gasto
4	0
14	0
24	1
34	1
44	1
54	1
64	1
74	1
84	1
94	1
104	1
114	1
124	1
134	1
144	0
154	1
164	0
174	1
184	1
194	1

Para elaborar el intervalo de confianza de la proporción poblacional de viviendas ocupadas de continuo (1):

Estimador de la proporción poblacional:

$$\hat{p} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n a_i = \frac{1}{10} \cdot \sum_{i=1}^{10} a_i = \frac{16}{20} = 0,8 \quad a_i \equiv \begin{cases} 1 & \text{ocupada de continuo} \\ 0 & \text{segunda residencia} \end{cases}$$

Varianza estimada de la proporción poblacional:

$$\text{Var}(\hat{p}) = \left(\frac{N - n}{N - 1} \right) \cdot \frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n} = \left(\frac{200 - 20}{200 - 1} \right) \times \frac{0,8 \times 0,2}{20} = 0,00723$$

Otros investigadores:

$$\text{Var}(\hat{p}) = \left(\frac{N - n}{N} \right) \cdot \frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n-1} = \left(\frac{200 - 20}{200} \right) \times \frac{0,8 \times 0,2}{19} = 0,00758$$

Error de muestreo con una fiabilidad del 95%:

$$e_{\hat{p}} = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\text{Var}(\hat{p})} = 1,96 \times \sqrt{0,00723} = 0,1667 (16,67\%)$$

Intervalo de confianza proporción poblacional:

$$I(p) = [\hat{p} \pm e_p] = [0,8 \pm 0,1667] = [0,6333, 0,9667]$$



POBLACIONES FINITAS: MUESTREO SISTEMÁTICO



La publicación de las puntuaciones de unas oposiciones ha sido realizada en 10 hojas con 30 opositores en cada una de ellas, estando éstos ordenados alfabéticamente. Una inspección, sin copiar las puntuaciones de los 300 opositores, desea conocer cuál ha sido la puntuación media obtenida y su error de muestreo aproximado.

Para ello, selecciona un opositor al azar entre los que figuran en la primera hoja, y recoge su puntuación y la de los opositores que, en el resto de las hojas, ocupaban la misma posición que éste.

Las puntuaciones recogidas han sido: $\sum_{i=1}^{10} x_i = 65 \quad \sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 532,75$

Solución:

Sea X = "Puntuación obtenida por un opositor". Para obtener información sobre la puntuación media de los 300 opositores (media poblacional), la inspección ha realizado un muestreo sistemático seleccionando 10 puntuaciones con un intervalo de muestreo:

$$k = \frac{N}{n_s} = \frac{300}{10} = 30 \quad (\text{elige un opositor de cada hoja } n_s = 10)$$

Intervalo de confianza sistemático replicado para la media poblacional con varianza poblacional desconocida, en muestras pequeñas ($n \leq 30$):

$$I(\mu) = \left[\bar{x} \pm t_{\alpha/2, (n-1)} \cdot s_{\bar{x}_i} \cdot \sqrt{\left(\frac{N-n}{N \cdot n_s} \right)} \right]$$

$$\text{Estimador de la media poblacional: } \bar{x} = \frac{1}{n_s} \cdot \sum_{i=1}^{n_s} \bar{x}_i = \frac{1}{10} \cdot \sum_{i=1}^{10} \bar{x}_i = \frac{65}{10} = 6,5$$

Cuasivarianza de las medias muestrales sistemáticas:

$$s_{\bar{x}_i}^2 = \frac{1}{(n_s - 1)} \cdot \sum_{i=1}^{n_s} (\bar{x}_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{(n_s - 1)} \cdot \left[\sum_{i=1}^{10} \bar{x}_i^2 - \frac{1}{n_s} \cdot \left(\sum_{i=1}^{10} \bar{x}_i \right)^2 \right] = \frac{1}{9} \cdot \left[532,75 - \frac{65^2}{10} \right] = 12,25$$

Error aproximado de estimación de la media:

$$e_{\mu} = t_{\alpha/2, (n-1)} \cdot s_{\bar{x}_i} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N \cdot n_s}} = 2,2622 \cdot \sqrt{12,25} \cdot \sqrt{\frac{300-10}{300 \cdot 10}} = 2,466$$



POBLACIONES FINITAS: MUESTREO SISTEMÁTICO REPLICADO



El técnico del Ayuntamiento de un pueblo dispone de un listado de 200 viviendas con el gasto de agua. Para analizar el gasto medio y total del gasto de agua de las viviendas utiliza un muestreo sistemático replicado, tomando una muestra de 40 viviendas, obviando la perturbadora variación cíclica de ocupaciones periódicas de viviendas.

Suponiendo que eres el técnico del Ayuntamiento y dispones del listado del gasto de agua de 200 viviendas, se pide:

- Intervalo de confianza (95%) para la media poblacional del gasto de viviendas.
- Intervalo de confianza (95%) para el gasto total del agua de Fuenterrebollo.
- Intervalo de confianza (95%) para la proporción de viviendas ocupadas del pueblo.

Solución:

- Con el listado del gasto de agua por vivienda se diseña el muestro replicado.

Muestras sistemáticas: $n_s = 10$

$$\text{Patrón sistemático: } k = \frac{N}{n} = \frac{200}{40} = 5$$

Valor del patrón sistemático replicado: $k^* = n_s \cdot k = 10 \cdot 5 = 50$

$$\text{Número de viviendas de cada muestra: } \frac{n}{n_s} = \frac{40}{10} = 4$$

Se generan 10 números aleatorios entre 1 y $k^* = 50$, que son los puntos de inicio aleatorio para las $n_s = 10$ muestras sistemáticas de viviendas.

Los resultados fueron: 10, 38, 3, 42, 24, 9, 49, 47, 50 y 34, que son los puntos de inicio aleatorios de las 10 muestras sistemáticas de viviendas de 4 elementos cada una.

Muestra	1º elemento		2º elemento		3º elemento		4º elemento	
	Inicio	Gasto	" + 50 "	Gasto	" + 100 "	Gasto	" + 150 "	Gasto
1	3	32,94	53	84,38	103	54,09	153	93,64
2	9	42,43	59	6,96	109	47,37	159	7,77
3	10	8,37	60	8,42	110	53,35	160	85,11
4	24	84,32	74	74,19	124	42,36	174	40,32
5	34	56,28	84	72,76	134	77,29	184	78,87
6	38	60,34	88	27,39	138	45,87	188	5,31
7	42	92,14	92	96,34	142	39,53	192	87,49
8	47	8,16	97	55,45	147	72,04	197	15,76
9	49	6,96	99	8,97	149	94,42	199	97,66
10	50	76,98	100	46,34	150	9,78	200	8,48

Las filas de la tabla contienen los elementos de las muestras replicadas de tamaño 4 asociadas con las posiciones que ocupan en el listado.



En la tabla adjunta, obtenida la información de las 10 muestras, se estima las medias dentro de cada muestra sistemática de tamaño 4.

Muestra	Elementos				Media de muestra
	1º	2º	3º	4º	
1	32,94	84,38	54,09	93,64	$\bar{x}_1 = 66,263$
2	42,43	6,96	47,37	7,77	$\bar{x}_2 = 26,133$
3	8,37	8,42	53,35	85,11	$\bar{x}_3 = 38,813$
4	84,32	74,19	42,36	40,32	$\bar{x}_4 = 60,298$
5	56,28	72,76	77,29	78,87	$\bar{x}_5 = 71,300$
6	60,34	27,39	45,87	5,31	$\bar{x}_6 = 34,728$
7	92,14	96,34	39,53	87,49	$\bar{x}_7 = 78,875$
8	8,16	55,45	72,04	15,76	$\bar{x}_8 = 37,853$
9	6,96	8,97	94,42	97,66	$\bar{x}_9 = 52,003$
10	76,98	46,34	9,78	8,48	$\bar{x}_{10} = 35,395$
					$\bar{x} = 50,166$
					$s_x^2 = 327,848$

Estimador de la media poblacional: $\bar{x} = \frac{1}{10} \cdot \sum_{i=1}^{10} \bar{x}_i = 50,166$

Cuasivarianza entre las medias muestrales: $s_{\bar{x}_i}^2 = \frac{1}{9} \cdot \sum_{i=1}^{10} (\bar{x}_i - \bar{x})^2 = 327,848$

Varianza estimada de la media muestral poblacional:

$$\text{Var}(\bar{x}) = \left(\frac{N-n}{N} \right) \cdot \frac{s_{\bar{x}_i}^2}{n_s} = \left(\frac{200-40}{200} \right) \times \frac{327.848}{10} = 26,228$$

Error de estimación de la media: $e_\mu = t_{\alpha/2, (n-1)} \cdot \sqrt{\text{Var}(\bar{x})} = 2,262 \times \sqrt{26,228} = 11,584$

Intervalo de confianza (95%) del sistemático replicado para la media poblacional del gasto de vivienda:

$$I(\mu) = \left[\bar{x} \pm t_{\alpha/2, (n-1)} \cdot \sqrt{\left(\frac{N-n}{N} \right) \cdot \frac{s_{\bar{x}_i}^2}{n_s}} \right] = \left[50,166 \pm 2,262 \cdot \sqrt{26,228} \right] = \\ = [38,582 , 61,750]$$



b) Intervalo de confianza sistemático replicado para el gasto total del pueblo:

$$I(\tau) = \left[\hat{x} \pm e_\tau \right] = \left[N \cdot \bar{x} \pm t_{\alpha/2, (n-1)} \cdot s_{\bar{x}_i} \cdot \sqrt{\frac{N \cdot (N-n)}{n_s}} \right]$$

Estimador del gasto total del pueblo: $\hat{x} = N \cdot \bar{x} = 200 \times 50,166 = 10.033,2$

Varianza estimada del total: $\text{Var}(\hat{x}) = \text{Var}(N \cdot \bar{x}) = N^2 \cdot \text{Var}(\bar{x}) = 200^2 \times 26,228 = 1.049,120$

Error de estimación del gasto total: $e_\tau = t_{0,025, 9} \cdot \sqrt{\text{Var}(\bar{x})} = 2,262 \times \sqrt{1049,120} = 2.316,89$

Error de estimación relativo del gasto total: $\% e_\tau = \frac{e_\tau}{\hat{x}} \times 100 = \frac{2.316,89}{10.033,2} \times 100 = 23\%$

El error de estimación representa un 23% del gasto total.

Intervalo de confianza sistemático replicado para el gasto total del pueblo:

$$I(\tau) = \left[\hat{x} \pm e_\tau \right] = [10.033,2 \pm 2.316,89] = [7.716,31 , 12.350,09]$$

c) Intervalo de confianza sistemático replicado para la proporción de viviendas ocupadas del pueblo:

Las filas de la tabla contienen los elementos de las muestras replicadas de tamaño $m = 4$ asociadas con las posiciones que ocupan en el listado.

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{vivienda ocupada de continuo} \\ 0 & \text{segunda residencia} \end{cases}$$

Muestra	1º elemento		2º elemento		3º elemento		4º elemento	
	Inicio	Control	" + 50 "	Control	" + 100 "	Control	" + 150 "	Control
1	3	1	53	1	103	1	153	1
2	9	1	59	0	109	1	159	0
3	10	0	60	0	110	1	160	1
4	24	1	74	1	124	1	174	1
5	34	1	84	1	134	1	184	1
6	38	1	88	0	138	1	188	0
7	42	1	92	1	142	0	192	1
8	47	0	97	1	147	1	197	0
9	49	1	99	0	149	1	199	1
10	50	1	100	1	150	1	200	0

Se estiman las proporciones de viviendas ocupadas de continuo dentro de cada muestra sistemática.

Proporciones dentro de cada muestra sistemática: $\hat{p}_i = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m a_{ij}$ $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{con atributo} \\ 0 & \text{sin atributo} \end{cases}$



Muestra	Elementos				Proporción de muestras \hat{p}_i	$(\hat{p}_i - \bar{p})^2$
	1º	2º	3º	4º		
1	1	1	1	1	$\hat{p}_1 = 1$	0,075625
2	1	0	1	0	$\hat{p}_2 = 0,5$	0,050625
3	0	0	1	1	$\hat{p}_3 = 0,5$	0,050625
4	1	1	1	1	$\hat{p}_4 = 1$	0,075625
5	1	1	1	1	$\hat{p}_5 = 1$	0,075625
6	1	0	1	0	$\hat{p}_6 = 0,5$	0,050625
7	1	1	0	1	$\hat{p}_7 = 0,75$	0,000625
8	0	1	1	0	$\hat{p}_8 = 0,5$	0,050625
9	1	0	1	1	$\hat{p}_9 = 0,75$	0,000625
10	1	1	1	0	$\hat{p}_{10} = 0,75$	0,000625
					$\sum_{i=1}^{10} \hat{p}_i = 7,25$	$\sum_{i=1}^{10} (\hat{p}_i - \bar{p})^2 = 0,43125$

$$\hat{p}_1 = \frac{1}{4} \cdot \sum_{j=1}^4 a_{ij} = \frac{4}{4} = 1 \quad \hat{p}_2 = \frac{1}{4} \cdot \sum_{j=1}^4 a_{ij} = \frac{2}{4} = 0,5 \quad \hat{p}_7 = \frac{1}{4} \cdot \sum_{j=1}^4 a_{ij} = \frac{3}{4} = 0,75$$

Intervalo de confianza sistemático replicado para la proporción del pueblo:

$$I(p) = [\hat{p} \pm e_p] = \left[\hat{p} \pm z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\left(\frac{N-n}{N} \right) \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n_s} (\hat{p}_i - \bar{p})^2}{n_s \cdot (n_s - 1)}} \right] = \left[\hat{p} \pm z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\left(\frac{N-n}{N} \right) \cdot \frac{s_p^2}{n_s}} \right]$$

$$\text{Estimador de la proporción poblacional: } \hat{p} = \bar{p} = \frac{1}{10} \cdot \sum_{i=1}^{10} \hat{p}_i = \frac{7,25}{10} = 0,725$$

$$\text{Cuasivarianza de las proporciones muestrales: } s_p^2 = \frac{1}{9} \cdot \sum_{i=1}^{10} (\hat{p}_i - \bar{p})^2 = \frac{0,43125}{9} = 0,0479167$$

Varianza estimada de la proporción poblacional:

$$\text{Var}(\hat{p}) = \left(\frac{N-n}{N} \right) \cdot \frac{s_p^2}{n_s} = \left(\frac{200-40}{200} \right) \times \frac{0,0479167}{10} = 0,00383$$

Error muestral (95% confianza) de la proporción poblacional:

$$e_p = z_{0,025} \cdot \sqrt{\text{Var}(\hat{p})} = 1,96 \times \sqrt{0,00383} = 0,1213 (12,13\%)$$



Intervalo de confianza sistemático replicado para la proporción del pueblo:

$$I(p) = [\hat{p} \pm e_p] = [0,725 \pm 0,1213] = [0,6037, 0,8463]$$



POBLACIONES FINITAS: MUESTREO SISTEMÁTICO REPLICADO



El auditor de una asociación de comerciantes decide aplicar un muestreo sistemático replicado para estimar el promedio y el total de ventas diarias (en miles de euros) de los 500 afiliados.

En el estudio sistemático replicado toma una muestra preliminar piloto de 5 elementos cada una. La información aparece en la tabla adjunta.

	1º elemento Arranque		2º elemento " + 100 "		3º elemento " + 200 "		4º elemento " + 300 "		5º elemento " + 400 "	
Muestra	ID	Factura	ID	Factura	ID	Factura	ID	Factura	ID	Factura
1	7	284	107	414	207	394	307	358	407	360
2	19	351	119	342	219	462	319	371	419	382
3	38	479	138	355	238	262	338	442	438	385
4	74	181	174	416	274	336	374	306	474	310
5	83	193	183	293	283	374	383	493	483	393

Con un error de estimación del 5%, ¿cuál será el tamaño de la muestra con un nivel de confianza del 95%?

Solución:

$$\text{El patrón sistemático es } k = \frac{N}{n} = \frac{500}{5} = 100$$

Para determinar los puntos de inicio aleatorio (ID) para las cinco muestras sistemáticas se han generado 5 números aleatorios entre 1 y 100, cuyos resultados han sido: 19 , 74 , 7 , 83 , 38

Muestra	Facturas de elementos					Medias muestras (\bar{x}_i)	$(\bar{x}_i - \bar{x})^2$
	1º	2º	3º	4º	5º		
1	284	414	394	358	360	$\bar{x}_1 = 362,000$	20,7936
2	351	342	462	371	382	$\bar{x}_2 = 381,600$	583,7056
3	479	355	262	442	385	$\bar{x}_3 = 384,600$	737,6656
4	181	416	336	306	310	$\bar{x}_4 = 309,800$	2.269,5696
5	193	293	374	493	393	$\bar{x}_5 = 349,200$	67,8976
					$\sum_{i=1}^5 \bar{x}_i = 1.787,2$	$\sum_{i=1}^5 (\bar{x}_i - \bar{x})^2 = 3.679,632$	

Intervalo de confianza sistemático replicado para la media poblacional con varianza poblacional desconocida en muestras pequeñas ($n \leq 30$):

$$I(\mu) = [\bar{x} \pm e_\mu] = \left[\bar{x} \pm t_{\alpha/2, (n-1)} \cdot s_{\bar{x}_i} \cdot \sqrt{\left(\frac{N-n}{N \cdot n_s} \right)} \right]$$

$$\text{Estimador de la media poblacional: } \bar{x} = \frac{1}{5} \cdot \sum_{i=1}^5 \bar{x}_i = \frac{1.787,2}{5} = 357,440$$



Cuasivarianza entre las medias muestrales: $s_{\bar{x}_i}^2 = \frac{1}{4} \cdot \sum_{i=1}^5 (\bar{x}_i - \bar{x})^2 = \frac{3.679,632}{4} = 919,908$

Varianza estimada de la media muestral poblacional:

$$\text{Var}(\bar{x}) = \left(\frac{N-n}{N} \right) \cdot \frac{s_{\bar{x}_i}^2}{n_s} = \left(\frac{500-25}{500} \right) \times \frac{919,908}{5} = 174,7825$$

Error de estimación de la media: $e_\mu = t_{\alpha/2, (n-1)} \cdot \sqrt{\text{Var}(\bar{x})} = 2,0639 \times \sqrt{174,7825} = 27,286$

Error de estimación relativo: % $e_\mu = \frac{e_\mu}{\bar{x}} \times 100 = \frac{27,286}{357,440} \times 100 = 7,634\%$

El error debido al muestreo es de 27,286 (miles de euros), representando el 7,634 % de las facturas medias. Para reducir el error a un 5% habrá que aumentar el tamaño $n = 25$ de la muestra, con lo que al ser muestras grandes ($n > 30$) se utiliza $z_{\alpha/2} = z_{0,025} = 1,96$

El tamaño de la muestra necesario para un error del 5% (confianza del 95%), se obtiene despejando el número de muestras sistemáticas (n_s) en el error de estimación:

$$\text{Tamaño de la muestra: } n_s = \frac{z_{\alpha/2}^2 \cdot s_{\bar{x}_i}^2 \cdot (N-n)}{N \cdot e_\mu^2} = \frac{1,96^2 \cdot 919,908 \cdot (500-25)}{500 \cdot 0,05^2 \cdot 357,44^2} = 10$$



POBLACIONES FINITAS: MÉTODOS INDIRECTOS DE ESTIMACIÓN



Mediante una tasación previa se desea estimar la producción media y la producción total de los 750 socios de una cooperativa agrícola. Se sabe que el total de superficie plantada es de 3840 hectáreas.

Se realizó un sorteo entre los socios para elegir a 20 de ellos a los que se les preguntó por la superficie plantada y se les tasó su producción.

Se adjuntan los resultados:

Producción (toneladas)	Superficie (hectáreas)	Producción (toneladas)	Superficie (hectáreas)
12	3,7	8	3
14	4,3	20	7
11	4,1	16	5,4
15	5	14	4,4
16	5,5	18	5,5
12	3,8	15	5
24	8	18	5,9
15	5,1	17	5,6
18	5,7	15	5
20	6	22	7,2

Intervalos de confianza para la producción media y total mediante estimadores de la razón y de muestreo aleatorio simple, con un nivel de confianza del 95%. Calcular y comparar los respectivos límites para el error de estimación.

Solución:

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i \cdot y_i$
12	3,7	144	13,69	44,4
14	4,3	196	18,49	60,2
11	4,1	121	16,81	45,1
15	5	225	25	75
16	5,5	256	30,25	88
12	3,8	144	14,44	45,6
24	8	576	64	192
15	5,1	225	26,01	76,5
18	5,7	324	32,49	102,6
20	6	400	36	120
8	3	64	9	24
20	7	400	49	140
16	5,4	256	29,16	86,4
14	4,4	196	19,36	61,6
18	5,5	324	30,25	99
15	5	225	25	75
18	5,9	324	34,81	106,2
17	5,6	289	31,36	95,2
15	5	225	25	75
22	7,2	484	51,84	158,4
320	105,2	5.398	581,96	1.770,2

a) Para cálculos posteriores se elabora la tabla
(X = producción en toneladas,
Y = superficie plantada en
hectáreas) y se calculan
estadísticos.

N = 750 socios n = 20

$\tau_y = 3.840$ ha



$$\sum_{i=1}^{20} x_i = 320 \quad \sum_{i=1}^{20} y_i = 105,2 \quad \sum_{i=1}^{20} x_i^2 = 5.398 \quad \sum_{i=1}^{20} y_i^2 = 581,96 \quad \sum_{i=1}^{20} x_i \cdot y_i = 1.770,2$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{20} y_i}{20} = \frac{320}{20} = 16 \quad \sigma_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x})^2}{20} = \frac{\sum_{i=1}^{20} x_i^2}{20} - \bar{x}^2 = \frac{5.398}{20} - 16^2 = 13,9$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{20} y_i}{20} = \frac{105,2}{20} = 5,26 \quad \sigma_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^{20} (y_i - \bar{y})^2}{20} = \frac{\sum_{i=1}^{20} y_i^2}{20} - \bar{y}^2 = \frac{581,96}{20} - 5,26^2 = 1,4304$$

$$s_x^2 = \frac{n}{n-1} \cdot \sigma_x^2 = \frac{20}{19} \cdot 13,9 = 14,6316 \quad s_y^2 = \frac{n}{n-1} \cdot \sigma_y^2 = \frac{20}{19} \cdot 1,4304 = 1,5057$$

$$\sigma_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{20} = \frac{\sum_{i=1}^{20} x_i \cdot y_i}{20} - \bar{x} \cdot \bar{y} = \frac{1.770,2}{20} - 16 \times 5,26 = 4,35$$

$$\text{Coeficiente correlación: } r_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{4,35}{\sqrt{13,9} \times \sqrt{1,4304}} = 0,9756$$

La relación entre las variables es alta, que junto a la información auxiliar de la variable Y, justifica la utilización de estimadores de razón.

Por otra parte, es lógico pensar que la relación pasa por el origen: "a 0 hectáreas de superficie plantada le corresponde 0 toneladas de producción".

$$\text{Estimador por la razón: } r = \frac{\sum_{i=1}^{20} x_i}{\sum_{i=1}^{20} y_i} = \frac{320}{105,2} = 3,042 \text{ tm/ha}$$

- Intervalo de confianza por la razón para la producción media poblacional:

$$I(\mu_x) = \left[\hat{\mu}_x \pm e_{r\mu} \right] = \left[r \cdot \mu_y \pm t_{\alpha/2, (n-1)} \cdot \sqrt{\left(\frac{N-n}{N \cdot n} \right) \cdot s_r^2} \right]$$

$$\tau_y = N \cdot \mu_y \rightarrow \mu_y = \frac{\tau_y}{N} = \frac{3.840}{750} = 5,12 \text{ ha/socio}$$

$$\text{Estimador de la media: } \hat{\mu}_x = r \cdot \mu_y = 3,042 \cdot 5,12 = 15,57 \text{ tm/socio}$$



$$s_r^2 = \frac{1}{19} \cdot \sum_{i=1}^{20} (x_i - r \cdot y_i)^2 = \frac{1}{19} \cdot \left(\sum_{i=1}^{20} x_i^2 + r^2 \cdot \sum_{i=1}^{20} y_i^2 - 2r \cdot \sum_{i=1}^{20} x_i \cdot y_i \right) = \\ = \frac{1}{19} \cdot (5.398 + 3,042^2 \times 581,96 - 2 \times 3,042 \times 1770,2) = 0,7065$$

Varianza del estimador de la media: $\hat{V}(\hat{\mu}_x) = \left(\frac{N-n}{N \cdot n} \right) \cdot s_r^2 = \left(\frac{750-20}{750 \cdot 20} \right) \times 0,7065 = 0,0344$

Error medio de la estimación ($t_{0,025, 19} = 2,093$):

$$e_{r\mu} = t_{\alpha/2, (n-1)} \cdot \sqrt{\text{Var}(\hat{\mu}_x)} = 2,093 \times \sqrt{0,0344} = 0,388$$

Intervalo de confianza por la razón para la producción media poblacional:

$$I(\mu_x) = [\hat{\mu}_x \pm e_{r\mu}] = [15,57 \pm 0,388] = [15,182, 15,958]$$

■ Intervalo de confianza por la razón para la producción total poblacional:

$$I(\tau_x) = [r \cdot \tau_y \pm e_{rt}] = \left[r \cdot \tau_y \pm t_{\alpha/2, (n-1)} \cdot \sqrt{N \cdot \left(\frac{N-n}{n} \right) \cdot s_r^2} \right]$$

Estimador del total: $\hat{\tau}_x = r \cdot \tau_y = 3,042 \times 3.840 = 11.681,28 \text{ tm}$

Varianza del estimador del total:

$$\hat{V}(\hat{\tau}_x) = N \cdot \left(\frac{N-n}{n} \right) \cdot s_r^2 = 750 \cdot \left(\frac{750-20}{20} \right) \cdot 0,7065 = 19.340,4375$$

Error total de la estimación ($t_{0,025, 19} = 2,093$):

$$e_{rt} = t_{\alpha/2, (n-1)} \cdot \sqrt{\text{Var}(\hat{\tau}_x)} = 2,093 \cdot \sqrt{19.340,4375} = 291,07$$

Se observa, $e_{rt} = N \cdot e_{r\mu} \rightarrow e_{rt} = 750 \times 0,388 = 291$

Intervalo de confianza por la razón para la producción total poblacional:

$$I(\tau_x) = [r \cdot \tau_y \pm e_{rt}] = [11.681,28 \pm 291] = [11.390,28, 11.099,28]$$

■ Intervalo de confianza con muestreo aleatorio simple para la producción media poblacional, con varianza poblacional desconocida:

$$I(\mu) = [\bar{x} \pm e_\mu] = \left[\bar{x} \pm t_{\alpha/2, (n-1)} \cdot s_x \cdot \sqrt{\frac{N-n}{n \cdot N}} \right]$$



$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{20} x_i}{20} = \frac{320}{20} = 16 \quad s_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = 14,6316$$

Varianza del estimador de la media: $\hat{V}(\hat{\mu}) = \left(\frac{N-n}{N \cdot n} \right) \cdot s_x^2 = \left(\frac{750-20}{750 \cdot 20} \right) \cdot 14,6316 = 0,7121$

Error medio ($t_{0,025, 19} = 2,093$): $e_\mu = t_{\alpha/2, (n-1)} \cdot \sqrt{\hat{V}(\bar{x})} = 2,093 \cdot \sqrt{0,7121} = 1,7662$

Intervalo de confianza con muestreo aleatorio simple para la producción media:

$$I(\mu) = [\bar{x} \pm e_\mu] = [16 \pm 1,7662] = [14,2338, 17,7662]$$

- Intervalo de confianza con muestreo aleatorio simple para la producción total poblacional, con varianza poblacional desconocida:

$$I(\tau) = [\hat{x} \pm e_\tau] = \left[N \cdot \bar{x} \pm t_{\alpha/2, (n-1)} \cdot \sqrt{\frac{N \cdot (N-n)}{n} \cdot s_x^2} \right]$$

$$\hat{x} = N \cdot \bar{x} = 750 \cdot 16 = 12.000 \text{ tm}$$

Error total de la estimación ($t_{0,025, 19} = 2,093$):

$$e_\tau = t_{\alpha/2, (n-1)} \cdot \sqrt{\frac{N \cdot (N-n)}{n} \cdot s_x^2} = 2,093 \cdot \sqrt{\frac{750 \cdot (750-20)}{20} \cdot 14,6316} = 1.324,65$$

$$\text{Se observa, } e_\tau = N \cdot e_\mu \rightarrow e_\tau = 750 \cdot 1,7662 = 1.324,65$$

Intervalo de confianza con muestreo aleatorio simple para la producción total poblacional:

$$I(\tau) = [\hat{x} \pm e_\tau] = [12.000 \pm 1.324,65] = [10.675,35, 13.324,65]$$

Señalar que el límite del error de estimación, tanto para la media como para el total, es mucho mayor que el cometido utilizando estimadores de razón.



POBLACIONES FINITAS: MÉTODOS INDIRECTOS DE ESTIMACIÓN



Para un grupo de 500 pequeños establecimientos se desea realizar un estudio sobre las ventas diarias. Se tiene información de que, por término medio, el gasto en publicidad es de 6 euros.

Se elige al azar una muestra de 15 establecimientos y se toman datos de su gasto en publicidad y ventas diarios en euros. Los resultados se reflejan en la tabla adjunta.

Utilizando los estimadores de regresión:

- Estimar la media poblacional y el tamaño de la muestra para que el error de estimación sea de 8 euros.
- Estimar total de ventas diarias.

Ventas diarias	Gastos publicidad
144	4,26
168	4,95
162	4,72
180	5,75
192	6,33
144	4,37
192	9,20
180	5,87
150	6,56
156	6,90
96	3,45
180	8,05
180	6,21
144	5,06
168	6,33

Solución:

a) Para facilitar los cálculos se elabora la tabla: ($X =$ Ventas diarias e $Y =$ Gastos diarios en publicidad)

$N = 500$ establecimientos

$n = 15$

$\mu_y = 6$ euros

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i \cdot y_i$
144	4,26	20.736	18,11	612,72
168	4,95	28.224	24,45	830,76
162	4,72	26.244	22,23	763,83
180	5,75	32.400	33,06	1035
192	6,33	36.864	40,01	1.214,4
144	4,37	20.736	19,10	629,28
192	9,20	36.864	84,64	1.766,4
180	5,87	32.400	34,40	1.055,7
150	6,56	22.500	42,97	983,25
156	6,90	24.336	47,61	1.076,4
96	3,45	9.216	11,90	331,2
180	8,05	32.400	64,80	1449
180	6,21	32.400	38,56	1.117,8
144	5,06	2.0736	25,60	728,64
168	6,33	28.224	40,01	1.062,6
2.436	87,98	404.280	547,45	14.656,98

$$\sum_{i=1}^{15} x_i = 2.436$$

$$\sum_{i=1}^{15} y_i = 87,98$$

$$\sum_{i=1}^{15} x_i^2 = 404.280$$

$$\sum_{i=1}^{15} y_i^2 = 547,5$$

$$\sum_{i=1}^{15} x_i \cdot y_i = 14.656,98$$



$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{15} x_i}{15} = \frac{2.436}{15} = 162,4 \quad \sigma_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{15} (x_i - \bar{x})^2}{15} = \frac{\sum_{i=1}^{15} x_i^2}{15} - \bar{x}^2 = \frac{404.280}{15} - 162,4^2 = 578,24$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{15} y_i}{15} = \frac{87,98}{15} = 5,865 \quad \sigma_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^{15} (y_i - \bar{y})^2}{15} = \frac{\sum_{i=1}^{15} x_i^2}{15} - \bar{x}^2 = \frac{547,50}{15} - 5,865^2 = 2,10$$

$$\sigma_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{15} (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{15} = \frac{\sum_{i=1}^{15} x_i \cdot y_i}{15} - \bar{x} \cdot \bar{y} = \frac{14.656,98}{15} - 162,4 \times 5,865 = 24,656$$

Coeficiente correlación: $r_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{24,656}{\sqrt{578,24} \times \sqrt{2,10}} = 0,7075$

Pendiente de la recta regresión: $b = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2} = \frac{24,656}{2,10} = 11,741$

Varianza residual: $\sigma_r^2 = \frac{n}{n-2} \cdot \sigma_x^2 \cdot (1 - r_{xy}^2) = \frac{15}{13} \times 578,24 \times (1 - 0,7075^2) = 333,229$

■ Intervalo de confianza de la regresión para la media poblacional:

$$I(\mu) = \left[\hat{\mu}_x \pm e_{r\mu} \right] = \left[\bar{x} + b \cdot (\mu_y - \bar{y}) \pm t_{\alpha/2, (n-1)} \cdot \sqrt{\left(\frac{N-n}{N \cdot n} \right) \cdot \sigma_r^2} \right]$$

Estimador de la media: $\hat{\mu}_x = \bar{x} + b \cdot (\mu_y - \bar{y}) = 162,4 + 11,741 \cdot (6 - 5,865) = 163,985$

Estimador de la varianza: $\hat{V}(\hat{\mu}_x) = \left(\frac{N-n}{N \cdot n} \right) \cdot \sigma_r^2 = \left(\frac{500-15}{500 \cdot 15} \right) \times 333,229 = 21,549$

Error medio de la estimación ($t_{0,025, 14} = 2,145$): $e_{r\mu} = 2,145 \cdot \sqrt{21,549} = 9,957$

Error de estimación relativo: % $e_{r\mu} = \frac{e_{r\mu}}{\hat{\mu}_x} \times 100 = \frac{9,957}{163,985} \times 100 = 6,07\%$

Intervalo de confianza media: $I(\mu) = \left[\hat{\mu}_x \pm e_{r\mu} \right] = (163,985 \pm 9,957) = (154,028, 173,942)$

El tamaño de la muestra necesario para un error de estimación de 8 euros (confianza del 95%), se obtiene despejando el número de muestras (n) en el error de estimación:

$$\text{Tamaño de la muestra: } n = \frac{t_{\alpha/2, (n-1)}^2 \cdot N \cdot \sigma_r^2}{N \cdot e_{r\mu}^2 + t_{\alpha/2, (n-1)}^2 \cdot \sigma_r^2} = \frac{2,145^2 \times 500 \times 333,229}{500 \times 8^2 + 2,145^2 \times 333,229} \approx 20 \text{ muestras}$$



b) Intervalo de confianza de la regresión para el total poblacional:

$$I(\tau_x) = \left[\hat{\tau}_x \pm e_{rt} \right] = \left[N \cdot \hat{\mu}_x \pm t_{\alpha/2, (n-1)} \cdot \sqrt{N \cdot \left(\frac{N-n}{n} \right) \cdot \sigma_r^2} \right]$$

Estimador del total: $\hat{\tau}_x = N \cdot \hat{\mu}_x = 500 \times 163,985 = 81.992,5$

Estimador de la varianza total: $\hat{V}(\hat{\mu}_\tau) = \hat{V}(N \cdot \hat{\mu}_x) = N^2 \cdot \hat{V}(\hat{\mu}_x) = 500^2 \times 21,549 = 5.387.250$

Error total de la estimación: $e_{rt} = t_{\alpha/2, (n-1)} \cdot \sqrt{\hat{V}(\hat{\mu}_\tau)} = 2,145 \times \sqrt{5.387.250} = 4.978,6415$

Se observa que $e_{rt} = N \cdot e_{r\mu} = 500 \times 9,9573 = 4.978,6415$

Intervalo de confianza del total:

$$I(\tau_x) = \left[\hat{\tau}_x \pm e_{rt} \right] = \left[81.992,5 \pm 4.978,6415 \right] = \left[77.013,8585 , 86.971,1415 \right]$$





Instrumentos Estadísticos Avanzados
Facultad Ciencias Económicas y Empresariales
Departamento de Economía Aplicada
Profesor: Santiago de la Fuente Fernández