Hoja nº ....

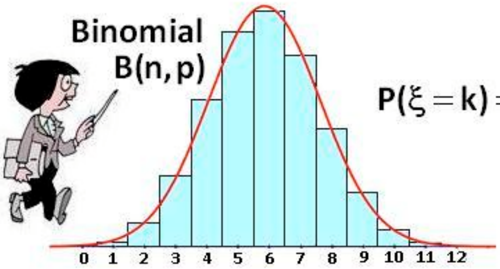
Asignatura .... Grupo ....

Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio del día ....

Guía para resolver ejercicios de distribuciones y muestreo.

✓ DISTRIBUCIONES DISCRETAS



$$P(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad \begin{cases} n = 1,2,3,\cdots \\ k = 1,2,3,\cdots,n \\ 0 < p < 1 \end{cases}$$

$$\mu_\xi = np \quad \sigma_\xi^2 = npq \quad \sigma_\xi = \sqrt{npq}$$

- La Moda es un número entero que verifica $(np - q \leq M_d \leq np + p)$ Generalmente es la parte entera de la media, pudiendo ser dos valores modales cuando $(np - q)$ y $(np + q)$ sean enteros

Sean *m* variables binomiales independientes de parámetros n_i y p

$$Y = \sum_{i=1}^{m} X_i \sim B\left(\sum_{i=1}^{m} n_i \,,\, p\right)$$

- Cuando $n > 50$ y $p < 0{,}1$, o $np < 5$: $B(n,p) \to P(\lambda = np)$

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

- Cuando $p \leq 0{,}5$ y $np > 5$: $B(n,p) \to N\left(np, \sqrt{npq}\right)$

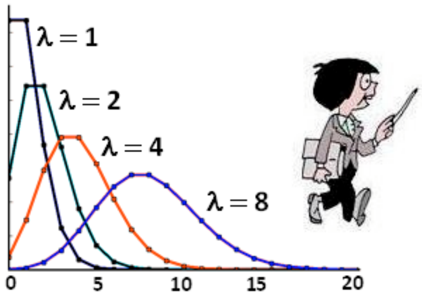
  Con la corrección de continuidad de una variable aleatoria discreta a una variable aleatoria continua.

Asignatura .... Grupo ....

Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio del día ....

Poisson P(λ)



$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad \begin{cases} \lambda > 0 \\ k = 0,1,2,\cdots \\ e = 2,71828... \end{cases}$$

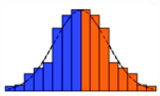
$$\mu_\xi = \lambda \quad \sigma_\xi^2 = \lambda \quad \sigma_\xi = \sqrt{\lambda}$$

Sean *m* variables de Poisson independientes de parámetro λ_i

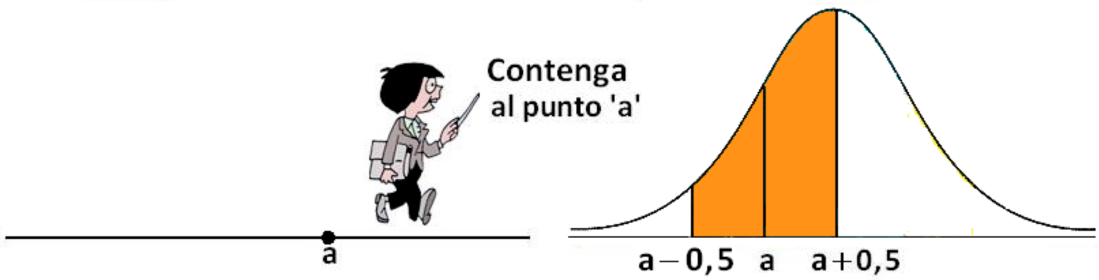
$$Y = \sum_{i=1}^{m} X_i \sim P\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i\right)$$

- Cuando $\lambda > 10 \quad P(\lambda) \to N\left(\lambda, \sqrt{\lambda}\right)$

Con la corrección de continuidad de una variable aleatoria discreta a una variable aleatoria continua.



TRANSFORMACIÓN DE VARIABLE ALEATORIA DISCRETA (X) A VARIABLE ALEATRORIA CONTINUA (X')



$$P(X = a) \quad \to \quad P(a - 0,5 \le X' \le a + 0,5)$$

$$P(X \le a) \quad \to \quad P(X' \le a + 0,5)$$

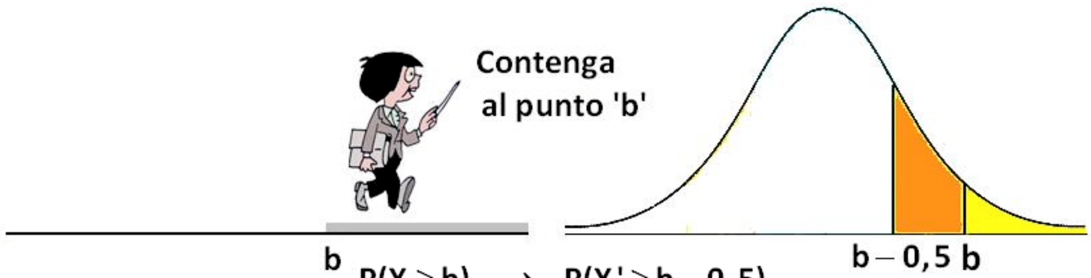
UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura.. Grupo.................................

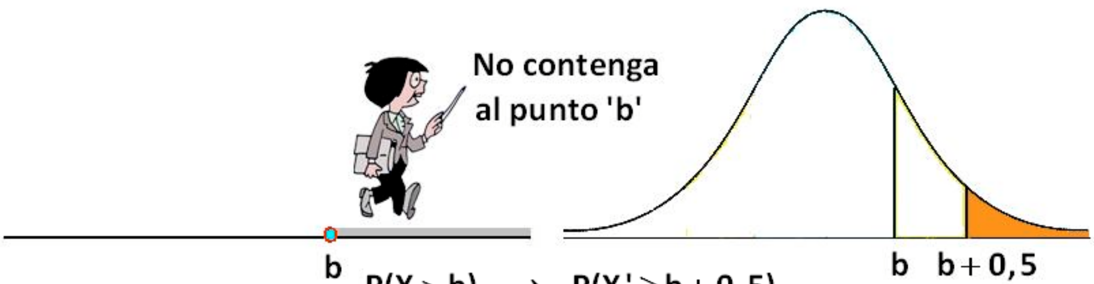
Apellidos .... Nombre......................................

Ejercicio del día ....

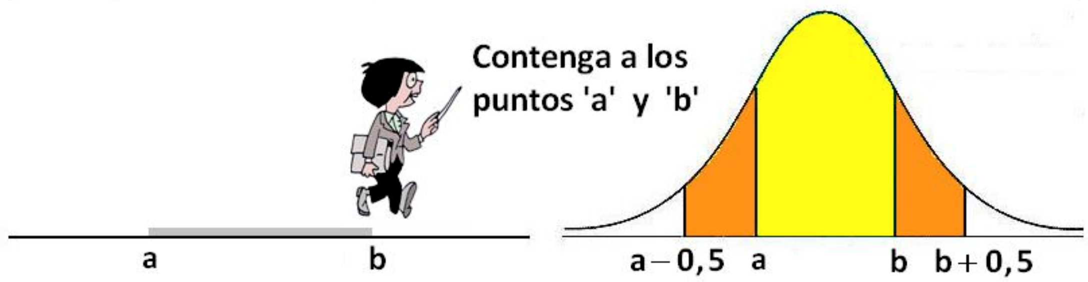
$P(X < a) \rightarrow P(X' \leq a - 0{,}5)$



$P(X \geq b) \rightarrow P(X' \geq b - 0{,}5)$



$P(X > b) \rightarrow P(X' \geq b + 0{,}5)$



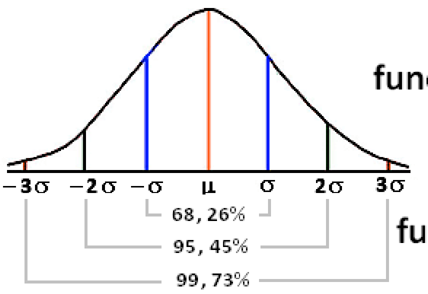
$P(a \leq X \leq b) \rightarrow P(a - 0{,}5 \leq X' \leq b + 0{,}5)$

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura .... Grupo ....
Apellidos .... Nombre ....
Ejercicio del día ....

✓ DISTRIBUCIÓN CONTINUA

Distribución normal: $\xi \sim N(\mu,\sigma) \xrightarrow{z=\frac{\xi-\mu}{\sigma}} z \sim N(0,1)$



función densidad: $f(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

función distribución: $F(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx$

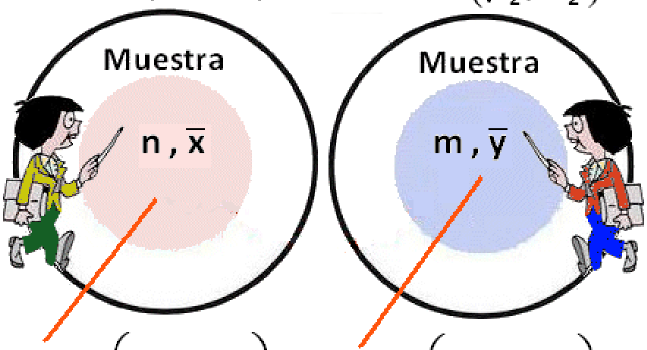
$$\mu_\xi=\mu \quad \sigma_\xi^2=\sigma^2 \quad \sigma_\xi=\sigma$$

Si $\xi_1 \sim N(\mu_1,\sigma_1)$ y $\xi_2 \sim N(\mu_2,\sigma_2)$ entonces la nueva variable:

$$\xi=\xi_1 \pm \xi_2 \sim N\left(\mu_1 \pm \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right) \qquad \xi = a\,\xi_1 + b \sim N(a\mu_1+b, a\sigma_1)$$

✓ MUESTREO

$X \sim N(\mu_1,\sigma_1)$ $\qquad$ $Y \sim N(\mu_2,\sigma_2)$



$$\xi=\bar{x}-\bar{y} \sim N\left(\mu_1-\mu_2, \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}}\right)$$

$\bar{x} \sim N\left(\mu_1, \dfrac{\sigma_1}{\sqrt{n}}\right)$ $\qquad$ $\bar{y} \sim N\left(\mu_2, \dfrac{\sigma_2}{\sqrt{m}}\right)$

Asignatura .... Grupo ....
Apellidos .... Nombre ....
Ejercicio del día ....

$X \sim N(\mu_1, \sigma_1)$ e $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2)$

Distribuciones de $W = aX - bY$, $U = \dfrac{X+Y}{2}$

$$E(W) = E(aX + bY) = a\,E(X) - b\,E(Y) = a\,\mu_1 - b\,\mu_2$$

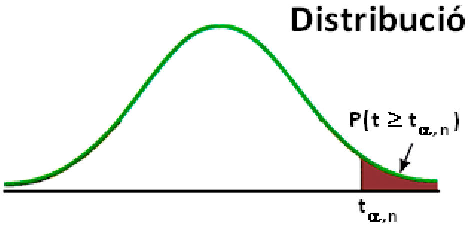
$$V(W) = V(aX + bY) = a^2\,V(X) + b^2\,V(Y) = a^2\,\sigma_1^2 + b^2\,\sigma_2^2$$

$$W \sim N\left(a\,\mu_1 - b\,\mu_2\,,\ \sqrt{a^2\,\sigma_1^2 + b^2\,\sigma_2^2}\right)$$

$$E(U) = E\left(\frac{X+Y}{2}\right) = \frac{1}{2}\,E(X) + \frac{1}{2}\,E(Y) = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2}$$

$$V(U) = V\left(\frac{X+Y}{2}\right) = \frac{1}{4}\,V(X) + \frac{1}{4}\,V(Y) = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{4}$$

$$U \sim N\left(\frac{\mu_1 + \mu_2}{2}\,,\ \frac{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}{2}\right)$$



Distribución t-Student:

Sean $n+1$ variables independientes entre sí: $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \xi$ con distribución $N(0,\sigma)$

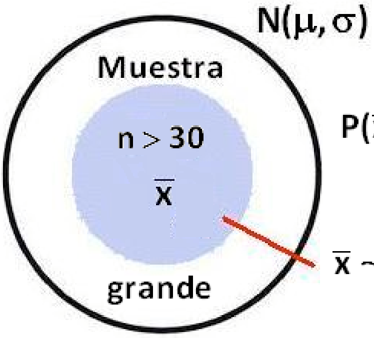
La variable $t_n = \dfrac{\xi}{\sqrt{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2}}$ se denomina t de Student con n grados de libertad

o bien, $t_n = \dfrac{\xi / \sigma}{\sqrt{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{\xi_i}{\sigma}\right)^2}} = \dfrac{z}{\sqrt{\dfrac{1}{n}\,\chi_n^2}}$ $t_n\left(0, \sqrt{\dfrac{n}{n-2}}\right)$ $\mu = 0$ $\sigma^2 = \dfrac{n}{n-2}$

Asignatura .... Grupo ....

Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio del día ....

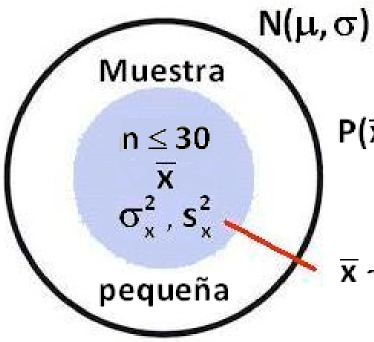


$$P(\bar{x} \geq k) = P\left(\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \geq \frac{k-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = P\left(z \geq \frac{k-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

$$\bar{x} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

En el muestreo el tamaño (n) es importante

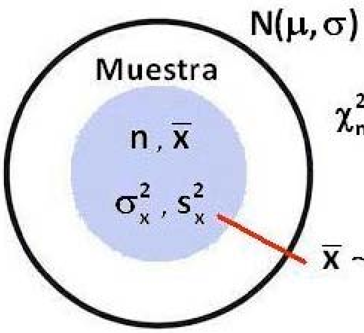
$$n\,\sigma_x^2 = (n-1)\,s_x^2$$



$$P(\bar{x} \geq k) = P\left(\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma_x/\sqrt{n-1}} \geq \frac{k-\mu}{\sigma_x/\sqrt{n-1}}\right) = P\left(t_{n-1} \geq \frac{k-\mu}{\sigma_x/\sqrt{n-1}}\right)$$

$$\bar{x} \sim t_{n-1}\left(\mu, \frac{\sigma_x}{\sqrt{n-1}}\right) \equiv t_{n-1}\left(\mu, \frac{s_x}{\sqrt{n}}\right)$$

Chi-cuadrado de Pearson: $\chi_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \qquad \xi_i \sim N(0,1)$



$$\chi_{n-1}^2 = \frac{\text{Varianza muestral observada}}{\text{Varianza muestral teórica}} = \frac{\sigma_x^2}{\left(\sigma/\sqrt{n}\right)^2} = \frac{n\,\sigma_x^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)\,s_x^2}{\sigma^2}$$

$$\bar{x} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\chi_{n+m}^2 = \chi_n^2 + \chi_m^2$$

$$\sqrt{2\chi_n^2} \xrightarrow{n>30} N\left(\sqrt{2n-1}\right)$$

$$\mu_{\chi_n^2} = n \qquad \sigma_{\chi_n^2}^2 = 2n \qquad \sigma_{\chi_n^2} = \sqrt{2n}$$

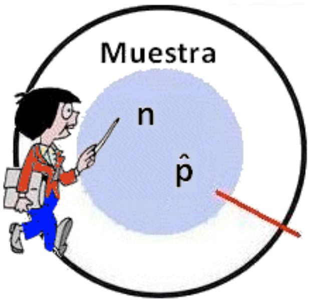
UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura .... Grupo ....

Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio del día ....

$$\xi \sim B(n,p) \quad \rightarrow \quad N\left(np, \sqrt{npq}\right)$$



$$P(\hat{p} \geq k) = P\left(\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{pq/n}} \geq \frac{k-p}{\sqrt{pq/n}}\right) = P\left(z \geq \frac{k-p}{\sqrt{pq/n}}\right)$$

$$\hat{p} = \frac{\xi}{n} \sim N\left(p, \sqrt{\frac{pq}{n}}\right)$$

Hoja nº ....

UAM
UNIVERSIDAD AUTONOMA
DE MADRID

Asignatura .... Grupo ....

Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio del día ....

UNICAMENTE PARA USO ESCOLAR (IMPRESO EN PAPEL RECICLADO)