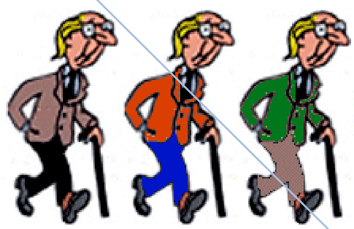
Universidad Autónoma de Madrid

Instrumentos Estadísticos Avanzados
Facultad Ciencias Económicas y Empresariales
Departamento de Economía Aplicada
Profesor: Santiago de la Fuente Fernández

MODELOS DE COLAS:



- M/M - M/M///k
- M/M/1/c - M/M/s/k
- M/M/c/c

Formalización de sistemas de espera (Colas)

A / B / C / D / E / F

A: Ley de llegadas al sistema

B: Ley de los tiempos de servicio

C: Número de canales o servidores (s) en paralelo, supuestamente iguales

D: Ley de los tiempos de servicio, generalemente si es FIFO se omite

E: Capacidad de la cola, número máximo de unidades que pueden encontrarse simultáneamente en el interior del sistema

F: Tamaño del centro emisor

A: Ley de llegadas al sistema. Las llegadas corresponden a un proceso markoviano. Si la tasa de llegadas es constante a lo largo del tiempo, los tiempos entre llegadas siguen una ley exponencial y el número de llegadas por unidad de tiempo una ley de Poisson. De ahí que indistintamente a las llegadas constantes se pueden referir con los términos exponenciales y poissonianos. Cuando las llegadas son infinitas se denotan por M. El parámetro más utilizado para la tasa de llegadas es λ

B: El parámetro más utilizado para la tasa de servicio es μ (número medio de unidades por unidad de tiempo que es capaz de entrar en un canal o servidor). Cuando las llegadas al sistema son infinitas se denotan por M

D: La disciplina de cola puede ser:

G: Disciplina general cualquiera, sin proporidades

FIFO: Primera unidad en llegar, primera en ser atendida

LIFO: Última unidad en llegar, primera en ser atendida

SIRO: Al azar.

Señalar que ser la primera unidad en ser atendida no equivale a ser la primera en salir del sistema. Cuando hay más de un canal o servidor, una unidad puede salir del sistema después de otra unidad que haya empezado a ser atendida antes.

F: Las llegadas del centro emisor pueden ser infinitas o finitas (k, un número natural). Que el centro emisor sea infinito significa que no se modifica por el hecho de que algunas unidades se encuentren en el sistema, por lo que la ley de llegadas es independiente del número de llegadas que contenga el sistema. Por el contrario, si el centro emisor es finito, con k unidades inicialmente, sus características dependen del número de elementos en el sistema.

La formalización general de un sistema de espera (Cola) con disciplina FIFO es: M / M / s / c / k

Dejar en blanco un símbolo de la formalización se interpreta que es infinito (M)

En este sentido,

$M\ /\ M \quad \rightarrow \quad M\ /\ M\ /\ \infty\ /\ \infty\ /\ \infty$

$M\ /\ M\ /\ \ /\ \ /\ k \quad \rightarrow \quad M / M / \infty / \infty / k$

$M\ /\ M\ /\ s\ /\ c \quad \rightarrow \quad M / M / s / c / \infty \quad (k = \infty)$

$M\ /\ M\ /\ s\ /\ s$ Erlang B $\rightarrow \quad M / M / s / c / \infty \quad (c = s\ ,\ k = \infty)$

Modelos de colas

- Modelo M / M
- Modelo M / M / / / k

MODELO DE COLAS $\boxed{M/M \equiv (M/M/\infty/\infty/\infty)}$

Es un sistema con un número muy grande de servidores (sistemas de autoservicio, visitas a una ciudad, etc). El tiempo de servicio tiene igual distribución con el número de servidores.

Tasa de llegadas: $\lambda_n = \lambda$

Tasa de servicio: $\mu_n = n\,\mu$

Intensidad de tráfico: $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$

Probabilidad de ningún cliente en el sistema: $p_0 = e^{-\frac{\lambda}{\mu}}$

Probabilidad de n clientes en el sistema: $p_n = \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0$

MEDIDAS DE RENDIMIENTO:

Tasa de llegada efectiva: $\bar{\lambda} = \sum\limits_{n=1} n\,p_n = \rho$

Número promedio de clientes en el sistema: $L_s = \dfrac{\lambda}{\mu} = \bar{\lambda} = \sum\limits_{n=1} n\,p_n$

Número promedio de clientes en la cola: $L_q = 0$

Tiempo promedio de clientes en el sistema: $W_s = \dfrac{1}{\mu}$

Tiempo promedio de clientes en la cola: $W_q = 0$

Data Description	ENTRY
Número de servidores	M infinito
Tasa de servicio	μ
Tasa de llegada	λ
Capacidad de la cola	
Tamaño de la población	
Coste del servidor ocupado	
Coste del servidor desocupado	
Coste de espera de los clientes	
Coste de los clientes siendo servidos	
Coste por perdida de clientes - cola finita -	
Coste unitario de capacidad de cada unidad de cola	

El departamento de personal de Mercadona tiene contratado 100 puestos de trabajo. Los empleados dejan su puesto de trabajo con una tasa de 3,4 al mes, mientras que la empresa requiere de 4 meses para completar las vacantes.
Un análisis anterior indica que la cantidad de empleados que faltan a su puesto de trabajo sigue una distribución de Poisson.

a) Calcular las medidas de rendimiento.
b) ¿Cuál es la probabilidad de que haya más de 6 puestos de trabajo vacantes en cualquier momento?.
c) ¿Cuántas personas en nómina debe tener la empresa para que trabajen un promedio de 100 empleados?

Solución:

a) Cada vez que un empleado deja la empresa, su puesto entra en la cola de puestos vacantes. Suponiendo que se inicia de inmediato la búsqueda de un empleado, el modelo de cola es de una cantidad infinita de servidores. Se trata, pues, de una cola M/M o una cola $(M/M/\infty/\infty/\infty)$

Tasa de llegadas: $\lambda = 3{,}4$

Tasa de servicio: $\mu = \frac{1}{4} = 0{,}25$

Intensidad de vacantes: $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{3{,}4}{0{,}25} = 13{,}6$

Puestos reales de trabajo: $100 - 13{,}6 = 86{,}4$

Número promedio de empleados en el sistema: $L_s = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{3{,}4}{0{,}25} = 13{,}6$

Número promedio de empleados en la cola: $L_q = 0$

Tiempo promedio de empleados en el sistema: $W_s = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{0{,}25} = 4$ meses

Tiempo promedio de empleados en la cola: $W_q = 0$

b) Probabilidad de ningún empleado en el sistema: $p_0 = e^{-13{,}6} = 0{,}0000012$

Probabilidad de n empleados en el sistema: $p_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n e^{-\frac{\lambda}{\mu}} = \frac{1}{n!}\, 13{,}6^n\, e^{-13{,}6}$

n	p_n	$n \cdot p_n$	Acumulada
0	0,0000	0,0000	0,0000
1	0,0000	0,0000	0,0000
2	0,0001	0,0002	0,0001
3	0,0005	0,0015	0,0006
4	0,0018	0,0072	0,0024
5	0,0048	0,024	0,0072
6	0,0109	0,0654	0,0181
7	0,0212	0,1484	0,0393
8	0,036	0,288	0,0753
9	0,0544	0,4896	0,1297
10	0,074	0,74	0,2037
11	0,0915	1,0065	0,2952
12	0,1037	1,2444	0,3989
13	0,1085	1,4105	0,5074
14	0,1054	1,4756	0,6128
15	0,0955	1,4325	0,7083
16	0,0812	1,2992	0,7895
17	0,065	1,105	0,8545
18	0,0491	0,8838	0,9036
19	0,0351	0,6669	0,9387
20	0,0239	0,478	0,9626
21	0,0155	0,3255	0,9781
22	0,0096	0,2112	0,9877
23	0,0057	0,1311	0,9934
24	0,0032	0,0768	0,9966
25	0,0017	0,0425	0,9983
26	0,0009	0,0234	0,9992
27	0,0005	0,0135	0,9997
28	0,0002	0,0056	0,9999
29	0,0001	0,0029	1
	1	13,5992	

$$p_1 = \frac{1}{1!}\, 13,6\; e^{-13,6} = 0,0000169$$

$$p_2 = \frac{1}{2!}\, 13,6^2\; e^{-13,6} = 0,0001147$$

$$p_3 = \frac{1}{3!}\, 13,6^3\; e^{-13,6} = 0,0005201$$

$$p_4 = \frac{1}{4!}\, 13,6^4\; e^{-13,6} = 0,0017682$$

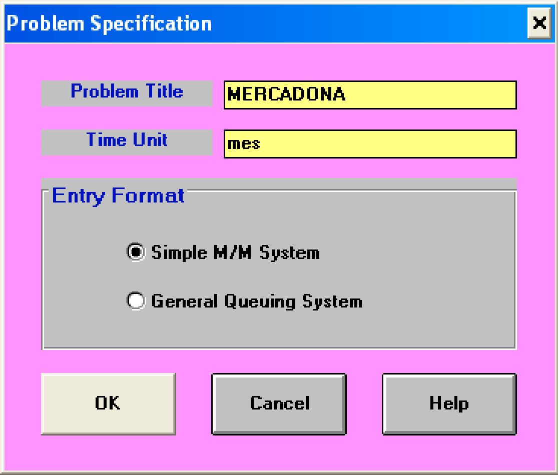
$$p_5 = \frac{1}{5!}\, 13,6^5\; e^{-13,6} = 0,0048096$$

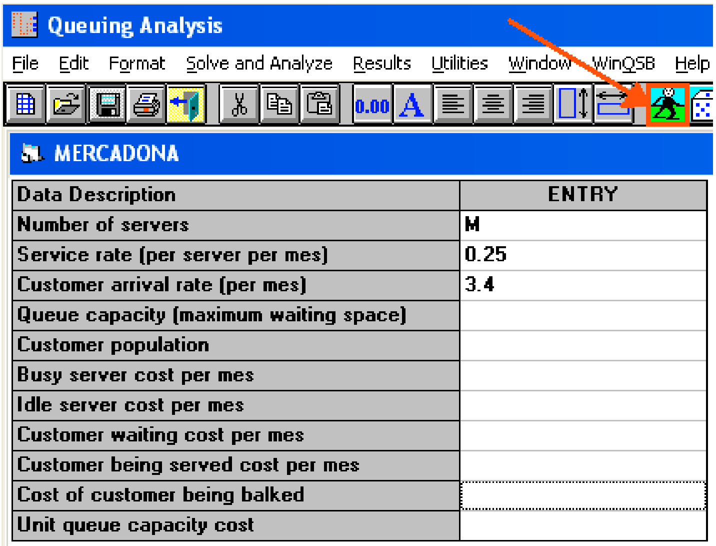
$$p_6 = \frac{1}{6!}\, 13,6^6\; e^{-13,6} = 0,0109017$$

$$P(x > 6) = 1 - P(x \leq 6) = 1 - (p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6) =$$
$$= 1 - 0,0181325 = 0,9818675 \quad (98,2\%)$$

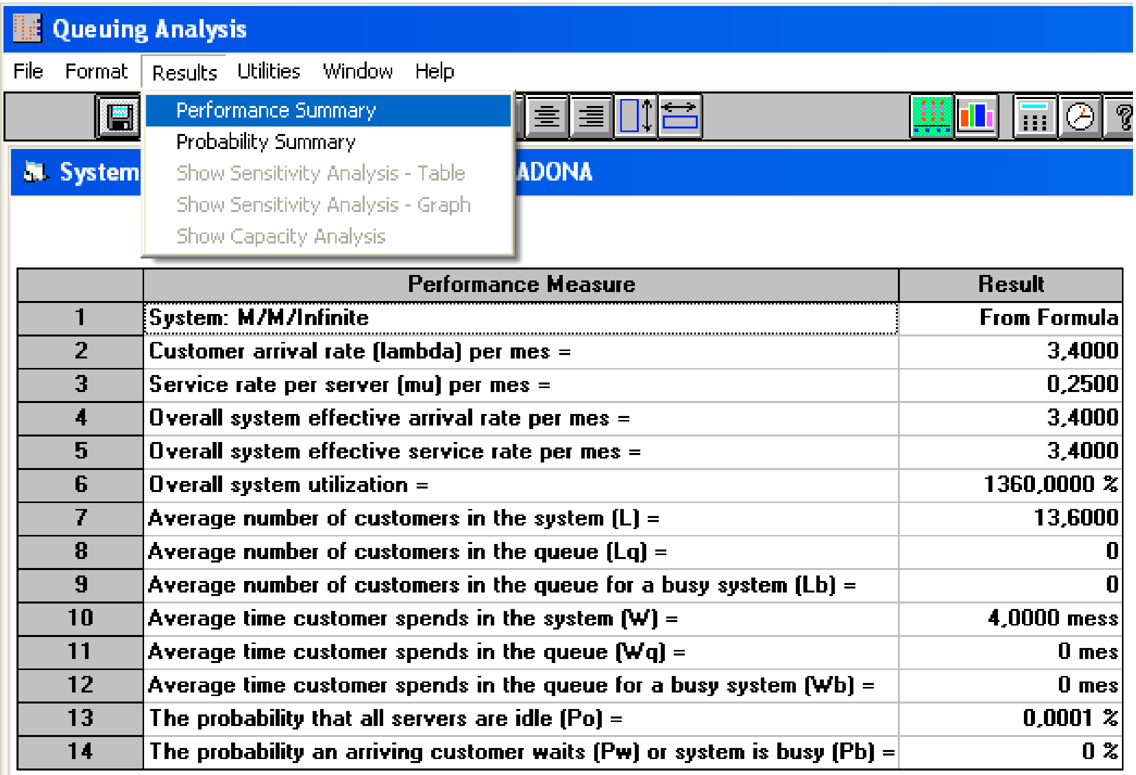
c) Para que la empresa tenga siempre 100 empleados trabajando en cualquier momento, tendrá que tener:

$$100 + \rho \;=\; 100 + 13,6 \;\simeq\; 114 \text{ empleados}$$

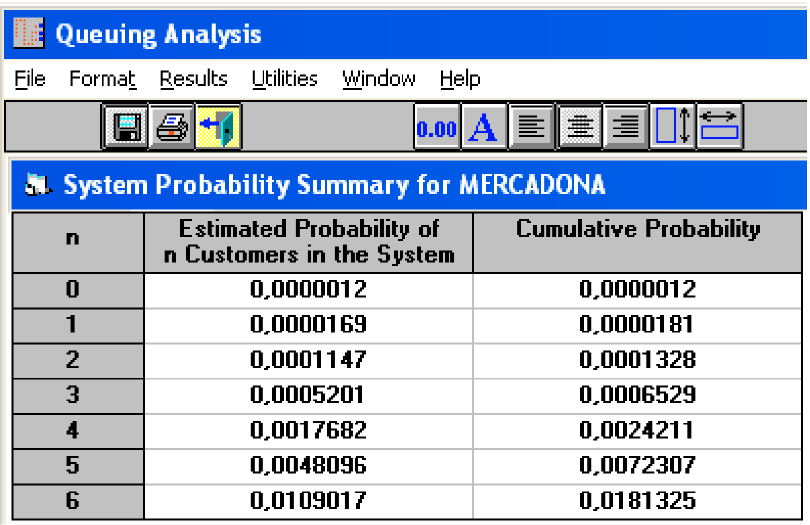




Data Description	ENTRY
Number of servers	M
Service rate (per server per mes)	0.25
Customer arrival rate (per mes)	3.4
Queue capacity (maximum waiting space)	
Customer population	
Busy server cost per mes	
Idle server cost per mes	
Customer waiting cost per mes	
Customer being served cost per mes	
Cost of customer being balked	
Unit queue capacity cost	



	Performance Measure	Result
1	System: M/M/Infinite	From Formula
2	Customer arrival rate (lambda) per mes =	3,4000
3	Service rate per server (mu) per mes =	0,2500
4	Overall system effective arrival rate per mes =	3,4000
5	Overall system effective service rate per mes =	3,4000
6	Overall system utilization =	1360,0000 %
7	Average number of customers in the system (L) =	13,6000
8	Average number of customers in the queue (Lq) =	0
9	Average number of customers in the queue for a busy system (Lb) =	0
10	Average time customer spends in the system (W) =	4,0000 mess
11	Average time customer spends in the queue (Wq) =	0 mes
12	Average time customer spends in the queue for a busy system (Wb) =	0 mes
13	The probability that all servers are idle (Po) =	0,0001 %
14	The probability an arriving customer waits (Pw) or system is busy (Pb) =	0 %



n	Estimated Probability of n Customers in the System	Cumulative Probability
0	0,0000012	0,0000012
1	0,0000169	0,0000181
2	0,0001147	0,0001328
3	0,0005201	0,0006529
4	0,0017682	0,0024211
5	0,0048096	0,0072307
6	0,0109017	0,0181325

Infinitos servidores con población finita

$$\boxed{M/M///k \equiv M/M/\infty/\infty/k}$$

Tasa de llegadas: λ

Tasa de servicio: μ

Intensidad de tráfico: $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$

Probabilidad de n clientes en sistema: $p_n = \dfrac{\dfrac{k!}{(k-n)!\, n!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n}{\left(1+\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^k} \quad n = 0, 1, 2, \ldots, k$

Número promedio de clientes en el sistema: $L_s = \sum_{n=1}^{k} n\, p_n \qquad L_s = k\left(\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)$

Número promedio de clientes en la cola: $L_q = 0$

Tiempo promedio de clientes en el sistema: $W_s = \dfrac{L_s}{\lambda}$

Tiempo promedio de clientes en la cola: $W_q = 0$

Data Description	ENTRY
Número de servidores	M infinito
Tasa de servicio	μ
Tasa de llegada	λ
Capacidad de la cola	
Tamaño de la población	
Coste del servidor ocupado	
Coste del servidor desocupado	
Coste de espera de los clientes	
Coste de los clientes siendo servidos	
Coste por perdida de clientes - cola finita -	
Coste unitario de capacidad de cada unidad de cola	

$M/M/\infty/\infty/5$

$\lambda = 2 \quad \mu = 4$

Queuing Analysis

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

Performance Summary
Probability Summary
Show Sensitivity Analysis - Table
Show Sensitivity Analysis - Graph
Show Capacity Analysis

AERO

Service rate (per server per hora) :

Data Description	ENTRY
Number of servers	M
Service rate (per server per hora)	4
Customer arrival rate (per hora)	2
Queue capacity (maximum waiting space)	
Customer population	5
Busy server cost per hora	
Idle server cost per hora	
Customer waiting cost hora	
Customer being served cost per hora	
Cost of customer being balked	
Unit queue capacity cost	

Queuing Analysis

File Format Results Utilities Window Help

System Performance Summary for AERO

	Performance Measure	Result
1	System: M/M/Infinite//5	From Formula
2	Customer arrival rate (lambda) per hora =	2,0000
3	Service rate per server (mu) per hora =	4,0000
4	Overall system effective arrival rate per hora =	5,3498
5	Overall system effective service rate per hora =	5,3498
6	Overall system utilization =	50,0000 %
7	Average number of customers in the system (L) =	1,6667
8	Average number of customers in the queue (Lq) =	0
9	Average number of customers in the queue for a busy system (Lb) =	0
10	Average time customer spends in the system (W) =	0,3115 horas
11	Average time customer spends in the queue (Wq) =	0 hora
12	Average time customer spends in the queue for a busy system (Wb) =	0 hora
13	The probability that all servers are idle (Po) =	13,1687 %

Queuing Analysis

File Format Results Utilities Window Help

System Probability Summary for AERO

n	Estimated Probability of n Customers in the System	Cumulative Probability
0	0,1317	0,1317
1	0,3292	0,4609
2	0,3292	0,7901
3	0,1646	0,9547
4	0,0412	0,9959
5	0,0041	1,0000

Tasa de llegadas: $\lambda = 2$

Tasa de servicio: $\mu = 4$

Intensidad de tráfico: $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} = \dfrac{2}{4} = 0,5$

Probabilidad de n clientes en sistema: $p_n = \dfrac{\dfrac{k!}{(k-n)!\, n!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n}{\left(1+\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^k} \quad n = 0, 1, 2, \dots, k$

$$p_0 = \frac{1}{(1+0,5)^5} = 0,1317$$

$$p_1 = \frac{\dfrac{5!}{4!\,1!}(0,5)}{(1+0,5)^5} = 0,3292 \qquad p_2 = \frac{\dfrac{5!}{3!\,2!}(0,5)^2}{(1+0,5)^5} = 0,3292 \qquad p_3 = \frac{\dfrac{5!}{2!\,3!}(0,5)^3}{(1+0,5)^5} = 0,1646$$

$$p_4 = \frac{\dfrac{5!}{1!\,4!}(0,5)^4}{(1+0,5)^5} = 0,0412 \qquad p_5 = \frac{\dfrac{5!}{0!\,5!}(0,5)^5}{(1+0,5)^5} = 0,0041$$

Tasa efectiva de servicio:

$$\bar{\lambda} = \lambda \sum_{n=1}^{k-1} n\, p_n = 2 \sum_{n=1}^{4} n\, p_n = 2 \times (1 \times 0,3292 + 2 \times 0,3292 + 3 \times 0,1646 + 4 \times 0,0412) =$$

Número promedio de clientes en el sistema: $L_s = \sum_{n=1}^{k} n\, p_n = \sum_{n=1}^{5} n\, p_n$

$$L_s = (1 \times 0,3292 + 2 \times 0,3292 + 3 \times 0,1646 + 4 \times 0,0412 + 5 \times 0,0041) = 1,6667$$

O también, $L_s = k\left(\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}\right) = 5\left(\dfrac{2}{2+4}\right) = 1,6667$

Tiempo promedio de clientes en el sistema: $W_s = \dfrac{L_s}{\bar{\lambda}} = \dfrac{1,6667}{5,3498} = \dfrac{1,6667}{5,3498} = 0,3515$

Sistemas de colas:

$$M/M/1/c/ \ \equiv \ M/M/1/c/\infty$$

$$M/M/s/c \ \equiv \ M/M/s/c/\infty$$

$$M/M/c/c \ \equiv \ M/M/c/c/\infty \qquad (s = c \ , \text{Erlang B})$$

MODELO DE COLAS $\boxed{M/M/1/k \;\equiv\; M/M/1/k/\infty}$

Este tipo de sistemas de colas se caracteriza por tener una cola finita, como indica la cuarta inicial de la notación de Kendall.

El modelo $M/M/1/k$ es aquel en el que un servidor atiende todas las peticiones.

El sistema es aquel en la que los clientes que llegan dejan la cola a partir de una determinada longitud ya que no están dispuestos a soportar una larga espera.

El número máximo de clientes en el sistema en estos modelos se encuentran limitado a k, que coincide con la suma del número de servidores y el tamaño de la cola, por lo que la capacidad de la cola es $(k-1)$

El factor de saturación (intensidad del tráfico) : $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$ determina como varían las probabilidades p_n de que haya n clientes en el sistema.

Sí $\rho < 1 \;\rightarrow$ La oferta de demanda supera a la oferta de servicio.

Sí $\rho = 1 \;\rightarrow$ Todos los estados son equiprobables.

Sí $\rho > 1 \;\rightarrow$ La oferta de servicio supera a la oferta de demanda.

La solución para el estado estacionario existe incluso sí $\rho \geq 1$.

Probabilidades del estado: $p_n = \dfrac{(1-\rho)\,.\,\rho^n}{1-\rho^{k+1}} \quad n = 0, 1, 2, \ldots, k \;\;\rightarrow\;\; p_0 = \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{k+1}}$

$p_n = \rho^n \,.\, p_o \quad n = 1, 2, \ldots, k$

Utilización del sistema: $1 - p_0$

Cálculo de probabilidades estado: $p_n = \rho^n \,.\, p_0$ para $n = 1, 2, \ldots, k \quad \sum_{n=0}^{k} p_k = 1$

En esta situación, sí el sistema está lleno (de capacidad c) no se permite la entrada de nuevos clientes al sistema. En consecuencia, la tasa de llegada efectiva no es constante y varía con el tiempo (dependiendo sí el sistema está o no lleno).

La tasa de llegada efectiva $\overline{\lambda}$ es el número medio de clientes que son atendidos en el sistema, $\overline{\lambda} < \lambda$ al considerar los clientes rechazados cuando el sistema está completo.

Tasa efectiva de llegada: $\overline{\lambda} = \lambda.(1-p_k)$

Utilización efectiva del sistema: $\overline{\rho} = \dfrac{\overline{\lambda}}{\mu}$

Número promedio de clientes en el sistema: $L_s = \sum_{n=1}^{k} n \,.\, p_n$

Número medio de clientes en cola: $L_q = \sum_{n=2}^{k} (n-1) \,.\, p_n \qquad \left[L_s = L_q + (1-p_0) \right]$

Tasa efectiva de llegada: $\bar{\lambda} = \lambda \,.\, \sum_{n=0}^{k-1} p_n$

Tiempo promedio de estancia en el sistema: $W_s = \frac{L_s}{\bar{\lambda}} \qquad \left(W_s = W_q + \frac{1}{\mu} \right)$

Tiempo promedio de espera en la cola: $W_q = \frac{L_q}{\bar{\lambda}}$

Número promedio de clientes en la cola para un sistema ocupado: $L_b = \frac{L_q}{1 - p_o}$

Tiempo promedio de clientes en la cola para un sistema ocupado: $W_b = \frac{W_q}{1 - p_o}$

MEDIDAS DE RENDIMIENTO:

Tasa efectiva: $\bar{\lambda} = \lambda \,.\, (1 - p_k) = \lambda \left[1 - \frac{(1-\rho) \,.\, \rho^k}{1 - \rho^{k+1}} \right]$

Número promedio de clientes en el sistema: $L_s = \begin{cases} \frac{\rho}{(1-\rho)} - \frac{(k+1) \,.\, \rho^{k+1}}{1-\rho^{k+1}} & \rho \neq 1 \\ \frac{k}{2} & \rho = 1 \end{cases}$

Número promedio de clientes en la cola: $L_q = L_s - (1 - p_0) = \begin{cases} L_s - \frac{(1-\rho^k) \,.\, \rho}{1-\rho^{k+1}} & \rho \neq 1 \\ \frac{k \,.\, (k-1)}{2 \,.\, (k+1)} & \rho = 1 \end{cases}$

MODELO DE COLA $M/M/1/k \equiv M/M/1/k/\infty$

Queuing Analysis	
Data Description	**ENTRY**
Número de servidores	1
Tasa de servicio	μ
Tasa de llegada	λ
Capacidad de la cola	$k - 1$ finita
Tamaño de la población	M infinita
Coste del servidor ocupado	$c_q + c_s$
Coste del servidor desocupado	c_s
Coste de espera de los clientes	c_q
Coste de los clientes siendo servidos	
Coste por perdida de clientes - cola finita -	
Coste unitario de capacidad de cada unidad de cola	euro

Number of servers (Numero de servidores): $s = 1$

Service rate (Tasa de servicio): $\mu =$

Customer arrival rate (Tasa de llegada de clientes): $\lambda =$

Queue capacity (Capacidad de la cola: Por defecto aparece M indicando que es infinita. Cuando la cola es finita se pone el tamaño máximo de la cola menos el número de servidores $(k-1)$

Customer population (Tamaño de la población de clientes): Aparece por defecto M, indicando que es infinita. En caso de fuente limitada se pone el tamaño de la población.

Busy server cost per hour: Coste del servidor ocupado $\equiv c_q + c_s$

Idle server sost per hour: Coste del servidor desocupado $\equiv c_s$

Customer waiting cost per hour: Coste de espera de los clientes $\equiv c_q$

Customer being served cost per hour: Coste de los clientes siendo servidos

Cost of customer being balked: Coste por la pérdida de clientes, en el caso que la cola sea finita

Unit queue capacity cost: Coste unitario de capacidad de cada unidad de cola

En un taller mecánico llegan vehículos para una puesta a punto antes de pasar la ITV, las llegadas siguen un proceso de Poisson de promedio 18 vehículos/hora.
Las dimensiones del taller sólo permiten que haya 4 vehículos, y las ordenanzas municipales no permiten esperar en la vía pública. El taller despacha un promedio de 6 vehículos/hora de acuerdo con una distribución exponencial. Se pide:

a) Probabilidad de que no haya ningún vehículo en el taller. Calcular las probabilidades
b) Promedio de vehículos en el taller
c) ¿Cuánto tiempo pasa por término medio un vehículo en el taller?
d) ¿Cuánto tiempo esperan por término medio los vehículos en la cola?
e) ¿Cuál es la longitud media de la cola?

Solución:

a) Es un modelo de cola $M/M/1/4$ con $k = 4$ vehículos

Hay un sola cola, con disciplina FIFO, la capacidad del sistema es limitada, de modo que sólo puede haber 4 vehículos como máximo en el taller, con lo cual el número máximo de vehículos en la cola es $(4-1=3)$.

Las llegadas siguen un proceso de Poisson de parámetro $\lambda = 18$ vehículos/hora, los tiempos entre llegadas se distribuyen exponencialmente $\text{Exp}(\lambda = 18)$.

Los tiempos entre servicios se distribuyen exponencialmente $\text{Exp}(\mu = 6)$ siendo $\mu = 6$ vehículos/hora el número medio que el taller (servidor) es capaz de atender.

El factor de saturación $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} = \dfrac{18}{6} = 3$ determina como varían las probabilidades p_n de que haya n vehículos en el sistema.

Probabilidad de que no haya ningún vehículo en el taller:

$$p_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{k+1}} = \frac{1-3}{1-3^5} = 0,008264$$

Para calcular las probabilidades: $p_n = \rho^n \, . \, p_0$ $\begin{cases} p_1 = 3 \times 0,008264 = 0,0248 \\ p_2 = 3^2 \times 0,008264 = 0,0744 \\ p_3 = 3^3 \times 0,008264 = 0,2232 \\ p_4 = 3^4 \times 0,008264 = 0,6694 \end{cases}$

b) Promedio de vehículos en el taller (sistema):

$$L_s = \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(k+1)\,.\,\rho^{k+1}}{1-\rho^{k+1}} = \frac{3}{1-3} - \frac{5 \times 3^5}{1-3^5} = -\frac{3}{2} + \frac{1215}{242} = 3,5207 \text{ vehículos}$$

c) Tiempo promedio de un vehículo en el taller: $W_s = \dfrac{L_s}{\overline{\lambda}}$

Tasa de llegada efectiva:

$$\overline{\lambda} = \lambda \left[1 - \frac{(1-\rho) \, . \, \rho^k}{1-\rho^{k+1}} \right] = 18 \left[1 - \frac{(1-3) \, . \, 3^4}{1-3^5} \right] = 5,9504 \text{ vehículos/hora}$$

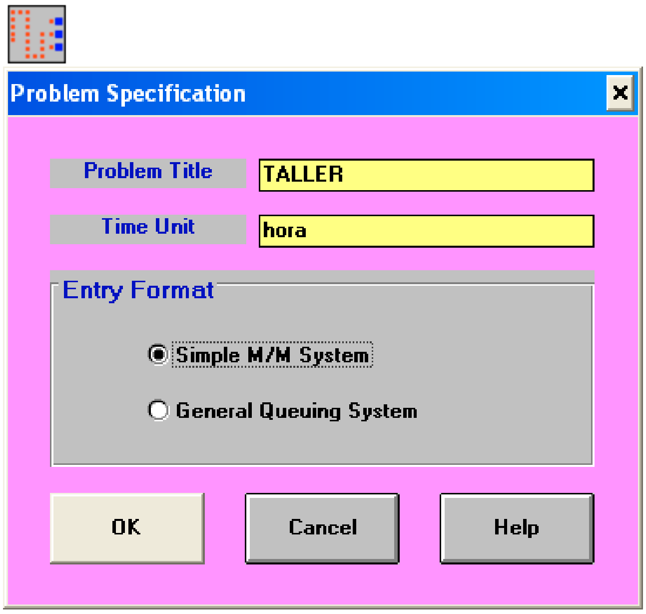
$$W_s = \frac{L_s}{\overline{\lambda}} = \frac{3,5207}{5,9504} = 0,5917 \text{ horas}$$

d) Tiempo medio de espera de vehículos en la cola:

$$W_q = W_s - \frac{1}{\mu} = 0,5917 - \frac{1}{6} = 0,4250 \text{ horas}$$

e) Longitud de la cola: $L_q = \overline{\lambda} \, . \, W_q = 5,9504 \text{ x } 0,4250 = 2,5289$ vehículos

o bien, $L_q = L_s - \dfrac{(1-\rho^k) \, . \, \rho}{1-\rho^{k+1}} = 3,52 - \dfrac{(1-3^4) \, . \, 3}{1-3^5} = 2,5289$ vehículos



Queuing Analysis

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

TALLER

Data Description	ENTRY
Number of servers	1
Service rate (per server per hour)	6
Customer arrival rate (per hour)	18
Queue capacity (maximum waiting space)	3
Customer population	M
Busy server cost per hour	
Idle server cost per hour	
Customer waiting cost per hour	
Customer being served cost per hour	
Cost of customer being balked	
Unit queue capacity cost	

System Performance Summary for TALLER

	Performance Measure	Result
1	System: M/M/1/4	From Formula
2	Customer arrival rate (lambda) per hora =	18,0000
3	Service rate per server (mu) per hora =	6,0000
4	Overall system effective arrival rate per hora =	5,9504
5	Overall system effective service rate per hora =	5,9504
6	Overall system utilization =	99,1736 %
7	Average number of customers in the system (L) =	3,5207
8	Average number of customers in the queue (Lq) =	2,5289
9	Average number of customers in the queue for a busy system (Lb) =	2,5500
10	Average time customer spends in the system (W) =	0,5917 horas
11	Average time customer spends in the queue (Wq) =	0,4250 horas
12	Average time customer spends in the queue for a busy system (Wb) =	0,4285 horas
13	The probability that all servers are idle (Po) =	0,8264 %
14	The probability an arriving customer waits (Pw) or system is busy (Pb) =	99,1736 %
15	Average number of customers being balked per hora =	12,0496

System Probability Summary for TALLER

n	Estimated Probability of n Customers in the System	Cumulative Probability
0	0,0083	0,0083
1	0,0248	0,0331
2	0,0744	0,1074
3	0,2231	0,3306
4	0,6694	1,0000

$$L_s = \sum_{n=1}^{4} n \,.\, p_n = 1 \times 0{,}0248 + 2 \times 0{,}0744 + 3 \times 0{,}2231 + 4 \times 0{,}6694 = 3{,}5207$$

$$L_s = L_q + (1 - p_0) \;\rightarrow\; L_q = L_s - (1 - p_0) = 3{,}5207 - (1 - 0{,}008264) = 2{,}5289$$

$$L_q = \sum_{n=2}^{4} (n-1)\,.\,p_n = 1 \times p_2 + 2 \times p_3 + 3 \times p_4 = 1 \times 0{,}0744 + 2 \times 0{,}2231 + 3 \times 0{,}6694 = 2{,}5289$$

$$\overline{\lambda} = \lambda \,.\, \sum_{n=0}^{3} p_n = 18 \times \left(p_0 + p_1 + p_2 + p_3\right) = 18 \times \left(1 - p_4\right) = 18 \times \left(1 - 0{,}6694\right) = 5{,}9504$$

$$W_s = \frac{L_s}{\overline{\lambda}} = \frac{3{,}5207}{5{,}9504} = 0{,}5917 \qquad W_q = \frac{L_q}{\overline{\lambda}} = \frac{2{,}5289}{5{,}9504} = 0{,}4250$$

Un asesor fiscal dispone de un local para atender a sus clientes, los cuales se concentran mayoritariamente entre los meses de mayo y junio. El local tiene una capacidad máxima de 8 asientos en espera, el cliente se va si no encuentra un asiento libre, y el tiempo entre llegada de clientes se puede considerar distribuido exponencialmente según un parámetro $\lambda = 20$ clientes por hora en período punta.
El tiempo de una consulta esta distribuido exponencialmente con una media de 12 minutos.
¿Cuántas consultas por hora realizará en promedio?
¿Cuál es el tiempo medio de permanencia en el local?

Solución:

Es un modelo $M/M/1/9$ $\quad k = 8$ clientes espera $+$ 1 cliente atendido

$\lambda = 20$ clientes/hora $\qquad \mu = \dfrac{60}{12} = 5$ clientes/hora

El factor de saturación $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} = \dfrac{20}{5} = 4$ determina como varían las probabilidades p_n de que haya n clientes en el sistema.

$$p_0 = \frac{(1-\rho)}{1-\rho^{k+1}} = \frac{(1-4)}{1-4^{10}} = 0{,}0000029$$

Probabilidades del estado: $p_n = \dfrac{(1-\rho)\,.\,\rho^n}{1-\rho^{k+1}} \quad \rightarrow \quad p_9 = \dfrac{(1-4)\,.\,4^9}{1-4^{10}} = 0{,}75$

O bien, $p_k = \rho^k\,.\,p_o = 4^9 . \dfrac{(1-4)}{1-4^{9+1}} = 0{,}75$

Tasa de llegada efectiva: $\bar{\lambda} = \lambda\,.\,(1-p_k) = 20\,.\,(1-0{,}75) = 5$ clientes/hora

Promedio de clientes en el sistema:

$$L_s = \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(k+1)\,.\,\rho^{k+1}}{1-\rho^{k+1}} = \frac{4}{1-4} - \frac{10 \times 4^{10}}{1-4^{10}} = 8{,}6667 \text{ clientes}$$

Tiempo promedio de estancia en el sistema: $W_s = \dfrac{L_s}{\bar{\lambda}} = \dfrac{8{,}6667}{5} = 1{,}7333$ horas

Queuing Analysis

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

Solve the Performance
Simulate the System
Perform Sensitivity Analysis
Perform Capacity Analysis

FISCAL

Unit queue capac

Data Description	ENTRY
Number of servers	1
Service rate (per server per mes)	5
Customer arrival rate (per mes)	20
Queue capacity (maximum waiting space)	8
Customer population	
Busy server cost per mes	
Idle server cost per mes	
Customer waiting cost per mes	
Customer being served cost per mes	
Cost of customer being balked	
Unit queue capacity cost	

System Performance Summary for FISCAL

	Performance Measure	Result
1	System: M/M/1/9	From Formula
2	Customer arrival rate (lambda) per hora =	20,0000
3	Service rate per server (mu) per hora =	5,0000
4	Overall system effective arrival rate per hora =	5,0000
5	Overall system effective service rate per hora =	5,0000
6	Overall system utilization =	99,9997 %
7	Average number of customers in the system (L) =	8,6667
8	Average number of customers in the queue (Lq) =	7,6667
9	Average number of customers in the queue for a busy system (Lb) =	7,6667
10	Average time customer spends in the system (W) =	1,7333 horas
11	Average time customer spends in the queue (Wq) =	1,5333 horas
12	Average time customer spends in the queue for a busy system (Wb) =	1,5333 horas
13	The probability that all servers are idle (Po) =	0,0003 %
14	The probability an arriving customer waits (Pw) or system is busy (Pb) =	99,9997 %
15	Average number of customers being balked per hora =	15,0000

Queuing Analysis

File Format Results Utilities Window Help

System Probability Summary for FISCAL

n	Estimated Probability of n Customers in the System	Cumulative Probability
0	0,0000029	0,0000029
1	0,0000114	0,0000143
2	0,0000458	0,0000601
3	0,0001831	0,0002432
4	0,0007324	0,0009756
5	0,0029297	0,0039053
6	0,0117188	0,0156241
7	0,0468750	0,0624991
8	0,1875002	0,2499993
9	0,7500007	1,0000000

Promedio de clientes en el sistema: $L_s = \sum_{n=0}^{9} n \, . \, p_n = 8,6667$

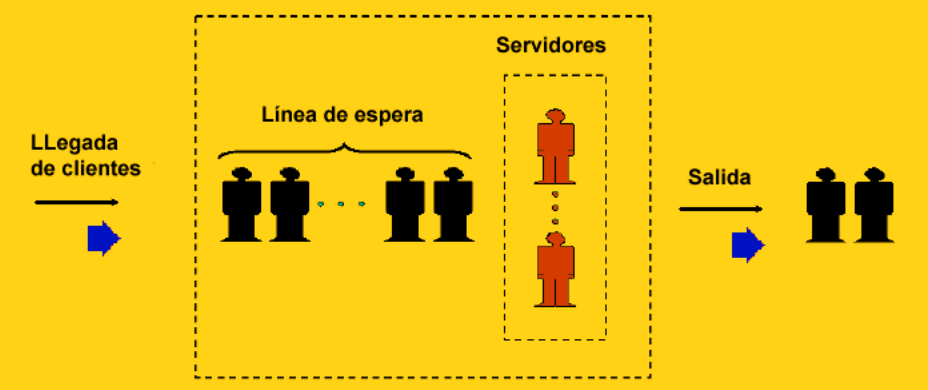
Promedio de clientes en la cola: $L_q = \sum_{n=2}^{9} (n-1) \,.\, p_n = 7{,}6667$

Tasa efectiva de llegada: $\overline{\lambda} = \lambda \,.\, \sum_{n=0}^{8} p_n = 20 \,.\, 0{,}2499993 = 5$

Tiempo promedio de estancia en el sistema: $W_s = \dfrac{L_s}{\overline{\lambda}} = \dfrac{8{,}6667}{5} = 1{,}7333$ horas

Tiempo promedio de estancia en la cola: $W_q = \dfrac{L_q}{\overline{\lambda}} = \dfrac{7{,}6667}{5} = 1{,}5333$ horas

MODELO DE COLA $\boxed{M/M/s/k \equiv M/M/s/k/\infty}$



En algunos sistemas la cola no puede albergar a un número indefinido de clientes. El sistema es de capacidad limitada.

El número máximo de clientes en el sistema en estos modelos se encuentran limitado a k , que coincide con la suma del número de servidores y el tamaño de la cola, por lo que la capacidad de la cola es $(k-s)$

El límite lo fija el parámetro k que incluye a los servidores.

Tasas de llegada y servicio: $\lambda_n = \begin{cases} \lambda & n = 0, \cdots, c+s-1 \\ 0 & n = c+s, c+s+1, \cdots \end{cases}$ $\quad \mu_n = \begin{cases} n.\mu & n = 1, \cdots, s \\ s.\mu & n = s+1, s+2, \cdots \end{cases}$

Probabilidades de cada estado del sistema: $p_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n!} . \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n . p_0 & n \le s \\ \dfrac{1}{s!.s^{n-s}} . \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n . p_0 & n \ge s \end{cases}$

$$\sum_{n=0}^{k} p_n = \sum_{n=0}^{s} \frac{1}{n!} . \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n . p_0 + \sum_{n=s+1}^{k} \frac{1}{s!\,.\,s^{n-s}} . \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n . p_0 = 1$$

$$\sum_{n=0}^{k} p_n = p_0 \left(\sum_{n=0}^{s} \frac{1}{n!} . \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \sum_{n=s+1}^{k} \frac{1}{s!\,.\,s^{n-s}} . \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \right) = 1$$

$$p_0 = \frac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{s} \frac{1}{n!} . \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \sum_{n=s+1}^{k} \frac{1}{s!\,.\,s^{n-s}} . \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}$$

Número medio de clientes en el sistema: $L_s = \sum_{n=0}^{k} n . p_n = L_q + \dfrac{\bar{\lambda}}{\mu}$

Número medio de clientes en la cola: $L_q = \sum_{n=s+1}^{k} (n-s) . p_n$

Tasa efectiva de llegada: $\overline{\lambda} = \lambda \sum_{n=0}^{k-1} p_n$

$$L_s = \sum_{n=0}^{k} n \, . \, p_n = L_q + \frac{\overline{\lambda}}{\mu} \quad \rightarrow \quad \overline{\lambda} = \mu \, (L_s - L_q)$$

Utilización efectiva del sistema: $\overline{\rho} = \dfrac{\overline{\lambda}}{s\,\mu}$

Tiempo medio de clientes en el sistema: $W_s = \dfrac{L_s}{\overline{\lambda}}$

Tiempo medio de clientes en la cola: $W_q = \dfrac{L_q}{\overline{\lambda}}$

$$L_q = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s . \frac{\rho \, . \, p_0}{s! \, . \, (1-\rho)^2} . \left[1 - \rho^{k-s} - (k-s) \, . \, \rho^{k-s} . (1-\rho)\right]$$

Número promedio clientes en cola para un sistema ocupado: $L_b = \dfrac{L_q}{p_w} \qquad p_w = \sum_{n \geq s}^{k} p_n$

Tiempo promedio clientes en cola para un sistema ocupado: $W_b = \dfrac{W_q}{p_w} \qquad p_w = \sum_{n \geq s}^{k} p_n$

MODELO DE COLA M / M / s / k $\equiv$ M / M / s / k / ∞

Queuing Analysis

Data Description	ENTRY
Número de servidores	s
Tasa de servicio	μ
Tasa de llegada	λ
Capacidad de la cola	k - s finita
Tamaño de la población	M infinita
Coste del servidor ocupado	$c_q + c_s$
Coste del servidor desocupado	c_s
Coste de espera de los clientes	c_q
Coste de los clientes siendo servidos	
Coste por perdida de clientes - cola finita -	
Coste unitario de capacidad de cada unidad de cola	euro

Number of servers (Numero de servidores): $s =$

Service rate (Tasa de servicio): $\mu =$

Customer arrival rate (Tasa de llegada de clientes): $\lambda =$

Queue capacity (Capacidad de la cola: Por defecto aparece M indicando que es infinita. Cuando la cola es finita se pone el tamaño máximo de la cola menos el número de servidores $(k - s)$

Customer population (Tamaño de la población de clientes): Aparece por defecto M, indicando que es infinita. En caso de fuente limitada se pone el tamaño de la población.

Busy server cost per hour: Coste del servidor ocupado $\equiv c_q + c_s$

Idle server sost per hour: Coste del servidor desocupado $\equiv c_s$

Customer waiting cost per hour: Coste de espera de los clientes $\equiv c_q$

Customer being served cost per hour: Coste de los clientes siendo servidos

Cost of customer being balked: Coste por la pérdida de clientes, en el caso que la cola sea finita

Unit queue capacity cost: Coste unitario de capacidad de cada unidad de cola

COLA FINITA: INVESTIGACIÓN

Un grupo de investigadores, formado por seis personas, dispone de dos terminales para realizar cálculos. El trabajo promedio de cálculo requiere de 20 minutos de tiempo de terminal, y el tiempo promedio entre solicitudes de servicio es de 30 minutos. Se supone que estas solicitudes están distribuidas exponencialmente. Se desea saber:

a) Número estimado de investigadores que esperan utilizar una terminal.
b) Tiempo total perdido diariamente si se considera una jornada de 8 horas.
c) Medidas de rendimiento.

Solución:

a) Se trata de una modelo de cola M/M/2/6

Tasa de llegada: $\lambda = \dfrac{60}{30} = 2$ clientes/hora   Tasa de servicio: $\mu = \dfrac{60}{20} = 3$ clientes/hora

$$p_0 = \frac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{s} \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \sum_{n=s+1}^{c} \frac{1}{s!\,.\,s^{n-s}} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n} = \frac{1}{1,9988} = 0,5003$$

$$\sum_{n=0}^{2} \frac{1!}{n!} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n + \sum_{n=3}^{6} \frac{1}{2!\,.\,2^{n-2}} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n = 1,8922 + 0,1076 = 1,9998$$

$$\sum_{n=0}^{2} \frac{1!}{n!} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n = 1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1,8922$$

$$\sum_{n=3}^{6} \frac{1}{2!\,.\,2^{n-2}} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0,0741 + 0,0247 + 0,0082 + 0,0003 = 0,1076$$

Probabilidades de cada estado del sistema: $p_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n!} \cdot \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n \,.\, p_0 & n \leq 2 \\[2ex] \dfrac{1}{s!\,.\,s^{n-s}} \cdot \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n \,.\, p_0 & n \geq 2 \end{cases}$

$$p_1 = \frac{1}{1!} \cdot \left(\frac{2}{3}\right) .\ 0,5003 = 0,3336 \qquad p_2 = \frac{1}{2!\,.\,2^{2-2}} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 .\ 0,5003 = 0,1112$$

$$p_3 = \frac{1}{2!\ 2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 .\ 0,5003 = 0,0371 \qquad p_4 = \frac{1}{2!\,.\,2^2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 .\ 0,5003 = 0,0124$$

$$p_5 = \frac{1}{2!\ 2^3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5 .\ 0,5003 = 0,0041 \qquad p_6 = \frac{1}{2!\ 2^4} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^6 .\ 0,5003 = 0,0014$$

Tabla estados de probabilidad

n	p_n	$n\,p_n$	$(n-2)\,p_n$
0	0,5003		
1	0,3336	0,3336	
2	0,1112	0,2224	
3	0,0371	0,1113	0,0371
4	0,0124	0,0496	0,0248
5	0,0041	0,0205	0,0123
6	0,0014	0,0008	0,0005
		0,7454	0,0796

Número medio de clientes en el sistema: $L_s = \sum_{n=0}^{6} n\,.\,p_n = 0,7454$

Número medio de clientes en cola: $L_q = \sum_{n=3}^{6} (n-s)\,.\,p_n = 0,0796$

Tasa efectiva de llegada: $\overline{\lambda} = 2 \sum_{n=0}^{5} p_n = 2\,(1-0,0014) = 1,9973$

$\overline{\lambda} = \mu\,(L_s - L_q) \quad \rightarrow \quad \overline{\lambda} = 3\,(0,7454 - 0,0796) = 1,9973$

Utilización efectiva del sistema: $\overline{\rho} = \dfrac{1,9973}{2\,.\,3} = 0,3329$

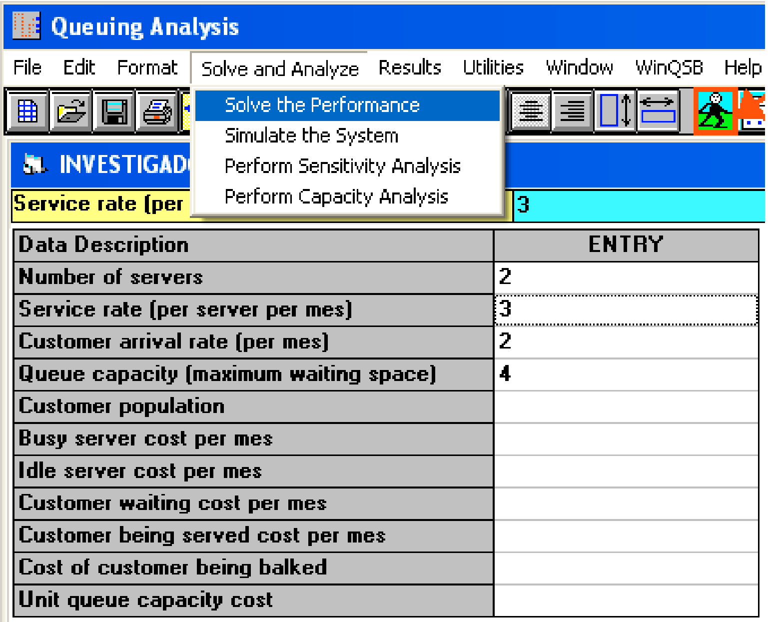
Tiempo promedio de clientes en el sistema: $W_s = \dfrac{L_s}{\overline{\lambda}} = \dfrac{0,7454}{1,9973} = 0,3732$ horas

Tiempo promedio de clientes en la cola: $W_q = \dfrac{L_q}{\overline{\lambda}} = \dfrac{0,0796}{1,9973} = 0,30399$ horas

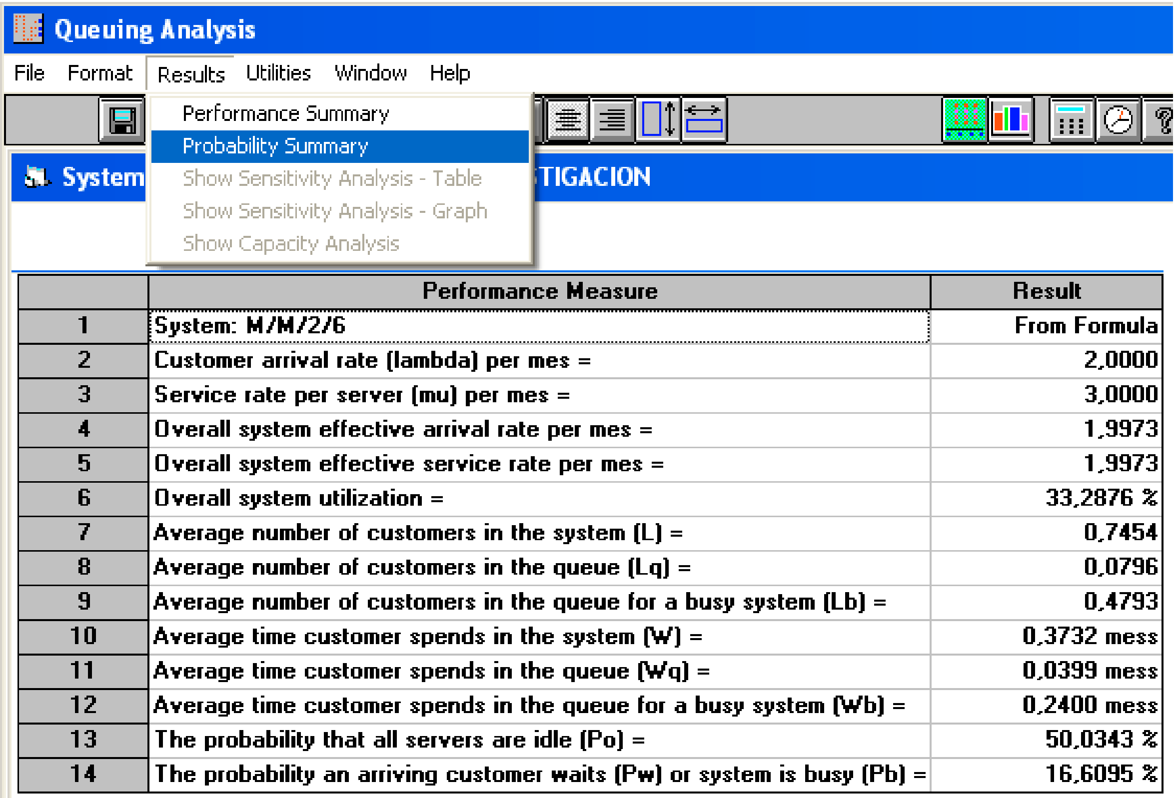
$$p_w = \sum_{n\geq 2}^{6} p_n = 1-(0,5003+0,3336) = 0,1661$$

Número promedio clientes en cola para un sistema ocupado: $L_b = \dfrac{L_q}{p_w} = \dfrac{0,0796}{0,1661} = 0,4793$ horas

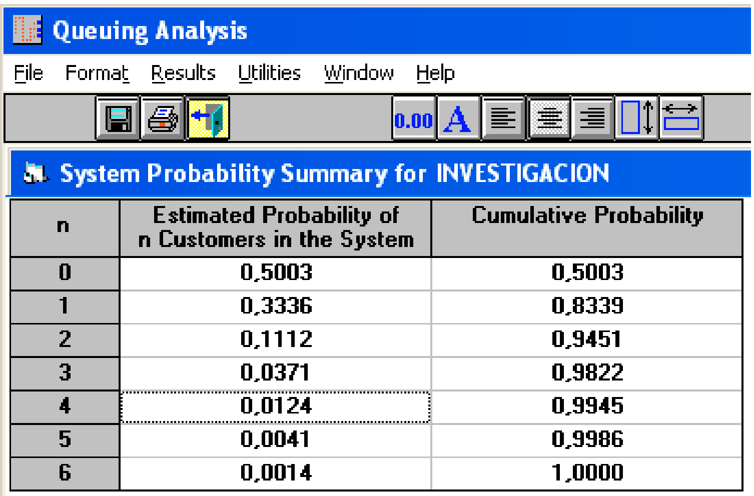
Tiempo promedio clientes en cola para un sistema ocupado: $W_b = \dfrac{W_q}{p_w} = \dfrac{0,0399}{0,1661} = 0,2400$ horas



Data Description	ENTRY
Number of servers	2
Service rate (per server per mes)	3
Customer arrival rate (per mes)	2
Queue capacity (maximum waiting space)	4
Customer population	
Busy server cost per mes	
Idle server cost per mes	
Customer waiting cost per mes	
Customer being served cost per mes	
Cost of customer being balked	
Unit queue capacity cost	



	Performance Measure	Result
1	System: M/M/2/6	From Formula
2	Customer arrival rate (lambda) per mes =	2,0000
3	Service rate per server (mu) per mes =	3,0000
4	Overall system effective arrival rate per mes =	1,9973
5	Overall system effective service rate per mes =	1,9973
6	Overall system utilization =	33,2876 %
7	Average number of customers in the system (L) =	0,7454
8	Average number of customers in the queue (Lq) =	0,0796
9	Average number of customers in the queue for a busy system (Lb) =	0,4793
10	Average time customer spends in the system (W) =	0,3732 mess
11	Average time customer spends in the queue (Wq) =	0,0399 mess
12	Average time customer spends in the queue for a busy system (Wb) =	0,2400 mess
13	The probability that all servers are idle (Po) =	50,0343 %
14	The probability an arriving customer waits (Pw) or system is busy (Pb) =	16,6095 %



n	Estimated Probability of n Customers in the System	Cumulative Probability
0	0,5003	0,5003
1	0,3336	0,8339
2	0,1112	0,9451
3	0,0371	0,9822
4	0,0124	0,9945
5	0,0041	0,9986
6	0,0014	1,0000

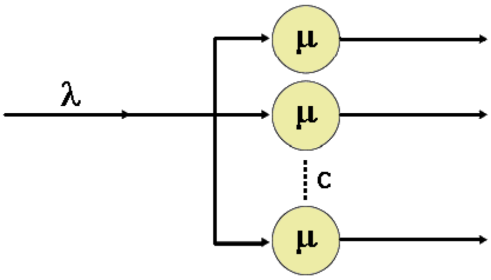
Sstema de pérdidas Erlang B

Modelos de cola sin cola

MODELO DE COLA $\boxed{M/M/c/c}$ $(s = c \ , \ k = c \ , \text{ Erlang B})$

Es un modelo de colas exponencial con un número limitado de servidores y con pérdidas. Se considera que el número de fuentes es infinito y, en consecuencia, una tasa de llegadas constante λ y una tasa de servicio μ en cada servidor. Las llegadas llegan aleatoriamente. Cada estado representa el número de unidades en la cola de espera.

En este caso, la capacidad del sistema es igual al número de servidores: $(k - s = 0)$.
Por lo tanto, no hay cola de espera, las unidades que encuentran los servidores ocupados se perderán sin tener la probabilidad de ser almacenadas.



Es un sistema de cola sin cola, estudiado por Agner Krarup Erlang (inventor de la teoría de colas) y se conoce como sistema de pérdidas Erlang B (Tablas de Erlang B).

Es un caso típico de una red telefónica con "c " líneas, de manera que cuando las líneas se encuentran ocupadas, el cliente obtiene una señal de ocupado y cuelga.

Al no tener cola, los valores $L_q = 0$ y $W_q = 0$, mientras que el tiempo del sistema es igual al tiempo de servicio $W_s = \dfrac{1}{\mu}$

Probabilidad de no haber clientes en el sistema: $p_0 = \dfrac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{c} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}$

Probabilidad de n clientes en el sistema: $p_n = \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0$

Intensidad del tráfico: $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$ Erlangs - Tabla $B(c\ ,\ \rho)$

Tasa efectiva de llegadas: $\bar{\lambda} = \lambda \displaystyle\sum_{n=0}^{c-1} p_n$ $\qquad \bar{\lambda} = \lambda \left[1 - \dfrac{1}{c!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^c p_0 \right]$

Utilización efectiva del sistema: $\bar{\rho} = \dfrac{\bar{\lambda}}{c\,\mu}$

Número promedio de clientes en el sistema: $L_s = \displaystyle\sum_{n=1}^{c} n\, p_n$ $\qquad \bar{\lambda} = \mu\, L_s$

Tiempo promedio de clientes en el sistema: $W_s = \dfrac{L_s}{\bar{\lambda}}$

Distribución del tiempo en servicio: $W(t) = 1 - e^{-\mu t}$

MODELO DE COLA Erlang B: M / M / c / c

Tabla Erlang B

Erlang B Traffic Table: *Maximum offered load versus B and S*

S/B	0.01%	0.05%	0.1%	0.5%	1%	2%	5%	10%	15%	20%	30%	40%
1	.0001	.0005	.0010	.0050	.0101	.0204	.0526	.1111	.1765	.2499	.4285	.6666
2	.0142	.0321	.0457	.1053	.1526	.2234	.3813	.5954	.7962	.9999	1.449	2.000
3	.0868	.1517	.1938	.3490	.4554	.6022	.8994	1.271	1.602	1.930	2.633	3.480
4	.2347	.3623	.4393	.7012	.8694	1.092	1.525	2.045	2.501	2.945	3.890	5.021
5	.4519	.6486	.7621	1.132	1.361	1.657	2.218	2.881	3.454	4.010	5.188	6.595
6	.7282	.9956	1.146	1.622	1.909	2.276	2.960	3.758	4.444	5.108	6.513	8.190
7	1.054	1.392	1.578	2.157	2.501	2.935	3.738	4.666	5.461	6.230	7.856	9.799
8	1.422	1.830	2.051	2.730	3.127	3.627	4.543	5.597	6.498	7.369	9.212	11.42
9	1.826	2.302	2.557	3.333	3.782	4.345	5.370	6.546	7.551	8.521	10.58	13.04
10	2.260	2.803	3.092	3.960	4.461	5.084	6.215	7.510	8.616	9.685	11.95	14.68
11	2.721	3.329	3.651	4.610	5.160	5.841	7.076	8.487	9.691	10.86	13.33	16.31
12	3.207	3.878	4.231	5.279	5.876	6.614	7.950	9.474	10.78	12.04	14.72	17.95
13	3.713	4.446	4.830	5.963	6.607	7.401	8.834	10.47	11.87	13.22	16.11	19.60
14	4.239	5.032	5.446	6.663	7.352	8.200	9.729	11.47	12.96	14.41	17.50	21.24
15	4.781	5.634	6.077	7.375	8.108	9.009	10.63	12.48	14.07	15.61	18.90	22.89
16	5.339	6.250	6.721	8.099	8.875	9.828	11.54	13.50	15.18	16.81	20.30	24.54
17	5.911	6.878	7.378	8.833	9.651	10.66	12.46	14.52	16.29	18.01	21.70	26.19
18	6.496	7.519	8.045	9.578	10.44	11.49	13.38	15.55	17.40	19.21	23.10	27.84
19	7.092	8.169	8.724	10.33	11.23	12.33	14.31	16.58	18.52	20.42	24.51	29.50
20	7.700	8.831	9.411	11.09	12.03	13.18	15.25	17.61	19.65	21.63	25.92	31.15
21	8.318	9.501	10.11	11.86	12.84	14.04	16.19	18.65	20.77	22.85	27.32	32.81
22	8.946	10.18	10.81	12.63	13.65	14.90	17.13	19.69	21.90	24.06	28.73	34.46
23	9.583	10.87	11.52	13.42	14.47	15.76	18.08	20.74	23.03	25.28	30.14	36.12
24	10.23	11.56	12.24	14.20	15.29	16.63	19.03	21.78	24.16	26.50	31.56	37.78
25	10.88	12.26	12.97	15.00	16.12	17.50	19.98	22.83	25.30	27.72	32.97	39.43
26	11.54	12.97	13.70	15.79	16.96	18.38	20.94	23.88	26.43	28.94	34.38	41.09
27	12.21	13.69	14.44	16.60	17.80	19.26	21.90	24.94	27.57	30.16	35.80	42.75
28	12.88	14.41	15.18	17.41	18.64	20.15	22.87	25.99	28.71	31.39	37.21	44.41
29	13.56	15.13	15.93	18.22	19.49	21.04	23.83	27.05	29.85	32.61	38.63	46.07
30	14.25	15.86	16.68	19.03	20.34	21.93	24.80	28.11	30.99	33.84	40.05	47.73
31	14.94	16.60	17.44	19.85	21.19	22.83	25.77	29.17	32.14	35.07	41.46	49.39
32	15.63	17.34	18.20	20.68	22.05	23.72	26.74	30.24	33.28	36.29	42.88	51.05
33	16.33	18.08	18.97	21.50	22.91	24.63	27.72	31.30	34.43	37.52	44.30	52.71
34	17.04	18.83	19.74	22.33	23.77	25.53	28.70	32.37	35.57	38.75	45.71	54.38
35	17.75	19.59	20.52	23.17	24.64	26.43	29.68	33.43	36.72	39.98	47.14	56.04
36	18.47	20.35	21.29	24.01	25.51	27.34	30.66	34.50	37.87	41.21	48.55	57.70
37	19.19	21.11	22.08	24.85	26.38	28.25	31.64	35.57	39.02	42.45	49.98	59.36
38	19.91	21.87	22.86	25.69	27.25	29.17	32.62	36.64	40.17	43.68	51.39	61.03
39	20.64	22.64	23.65	26.53	28.13	30.08	33.61	37.71	41.32	44.91	52.82	62.69
40	21.37	23.41	24.44	27.38	29.01	31.00	34.60	38.79	42.47	46.14	54.23	64.35
41	22.11	24.19	25.24	28.23	29.89	31.91	35.58	39.86	43.63	47.38	55.66	66.02
42	22.84	24.97	26.04	29.08	30.77	32.84	36.57	40.93	44.78	48.61	57.08	67.68
43	23.59	25.75	26.84	29.94	31.65	33.76	37.56	42.01	45.93	49.85	58.50	69.34
44	24.33	26.53	27.64	30.80	32.54	34.68	38.56	43.09	47.09	51.09	59.92	71.00
45	25.08	27.32	28.45	31.65	33.43	35.61	39.55	44.16	48.24	52.32	61.34	72.67
46	25.83	28.11	29.25	32.52	34.32	36.53	40.54	45.24	49.40	53.56	62.77	74.33
47	26.59	28.90	30.06	33.38	35.21	37.46	41.54	46.32	50.55	54.79	64.19	76.00
48	27.34	29.70	30.88	34.24	36.11	38.39	42.54	47.40	51.71	56.03	65.61	77.66
49	28.10	30.49	31.69	35.11	37.00	39.32	43.53	48.48	52.87	57.27	67.04	79.32
50	28.87	31.29	32.51	35.98	37.90	40.25	44.53	49.56	54.03	58.51	68.46	80.98

S/B	0.01%	0.05%	0.1%	0.5%	1%	2%	5%	10%	15%	20%	30%	40%
51	29.63	32.09	33.33	36.85	38.80	41.19	45.53	50.64	55.18	59.75	69.88	82.65
52	30.40	32.90	34.15	37.72	39.70	42.12	46.53	51.72	56.34	60.98	71.30	84.31
53	31.17	33.70	34.98	38.60	40.60	43.06	47.53	52.80	57.50	62.22	72.73	85.98
54	31.94	34.51	35.80	39.47	41.50	44.00	48.54	53.89	58.66	63.46	74.15	87.64
55	32.71	35.32	36.63	40.35	42.41	44.93	49.54	54.97	59.82	64.70	75.57	89.30
56	33.49	36.13	37.46	41.23	43.31	45.88	50.54	56.06	60.98	65.94	77.00	90.97
57	34.27	36.95	38.29	42.11	44.22	46.81	51.55	57.14	62.14	67.18	78.42	92.63
58	35.05	37.76	39.12	42.99	45.13	47.75	52.55	58.23	63.30	68.42	79.84	94.30
59	35.84	38.58	39.96	43.87	46.04	48.70	53.56	59.31	64.46	69.66	81.27	95.96
60	36.62	39.40	40.79	44.75	46.95	49.64	54.56	60.40	65.63	70.90	82.70	97.63
61	37.41	40.22	41.63	45.64	47.86	50.59	55.57	61.48	66.79	72.14	84.12	99.30
62	38.20	41.04	42.47	46.53	48.77	51.53	56.58	62.57	67.95	73.38	85.55	101.0
63	38.99	41.87	43.31	47.41	49.69	52.48	57.59	63.66	69.11	74.63	86.97	102.6
64	39.78	42.70	44.15	48.30	50.60	53.43	58.60	64.75	70.27	75.86	88.39	104.3
65	40.58	43.52	45.00	49.19	51.52	54.38	59.61	65.84	71.44	77.11	89.82	106.0
66	41.38	44.35	45.84	50.09	52.43	55.32	60.62	66.93	72.60	78.34	91.24	107.6
67	42.17	45.18	46.69	50.98	53.35	56.27	61.63	68.02	73.77	79.59	92.67	109.3
68	42.97	46.01	47.54	51.87	54.27	57.22	62.64	69.11	74.93	80.83	94.09	110.9
69	43.77	46.85	48.39	52.77	55.19	58.18	63.65	70.20	76.09	82.07	95.52	112.6
70	44.57	47.68	49.24	53.66	56.11	59.13	64.66	71.29	77.26	83.31	96.95	114.3
71	45.38	48.52	50.09	54.55	57.03	60.08	65.68	72.38	78.42	84.55	98.37	115.9
72	46.19	49.36	50.94	55.45	57.95	61.04	66.69	73.46	79.59	85.80	99.80	117.6
73	46.99	50.19	51.80	56.35	58.88	61.99	67.71	74.55	80.75	87.04	101.2	119.3
74	47.80	51.04	52.65	57.25	59.80	62.94	68.72	75.65	81.91	88.29	102.6	120.9
75	48.61	51.88	53.51	58.15	60.73	63.90	69.73	76.74	83.08	89.53	104.1	122.6
76	49.43	52.72	54.37	59.05	61.65	64.86	70.75	77.83	84.24	90.77	105.5	124.3
77	50.24	53.56	55.23	59.95	62.58	65.81	71.77	78.92	85.41	92.02	106.9	125.9
78	51.05	54.41	56.09	60.86	63.50	66.77	72.79	80.02	86.58	93.26	108.4	127.6
79	51.87	55.25	56.95	61.76	64.43	67.73	73.80	81.11	87.74	94.50	109.8	129.3
80	52.68	56.10	57.81	62.66	65.36	68.69	74.82	82.20	88.91	95.74	111.2	130.9
81	53.50	56.95	58.67	63.57	66.29	69.64	75.84	83.29	90.07	96.99	112.6	132.6
82	54.32	57.80	59.54	64.48	67.22	70.61	76.86	84.38	91.24	98.23	114.1	134.3
83	55.14	58.65	60.40	65.38	68.15	71.57	77.87	85.48	92.41	99.48	115.5	135.9
84	55.96	59.50	61.27	66.29	69.08	72.53	78.89	86.57	93.57	100.7	116.9	137.6
85	56.79	60.35	62.13	67.20	70.01	73.49	79.91	87.67	94.74	102.0	118.3	139.3
86	57.61	61.20	63.00	68.11	70.95	74.45	80.93	88.77	95.91	103.2	119.8	140.9
87	58.44	62.06	63.87	69.02	71.88	75.41	81.95	89.86	97.07	104.5	121.2	142.6
88	59.27	62.91	64.74	69.93	72.81	76.38	82.97	90.95	98.24	105.7	122.6	144.3
89	60.09	63.77	65.61	70.84	73.75	77.34	83.99	92.05	99.41	106.9	124.0	145.9
90	60.92	64.63	66.48	71.75	74.68	78.30	85.01	93.14	100.6	108.2	125.5	147.6
91	61.75	65.48	67.36	72.66	75.62	79.27	86.03	94.23	101.7	109.4	126.9	149.3
92	62.58	66.34	68.23	73.58	76.55	80.23	87.05	95.34	102.9	110.7	128.3	150.9
93	63.41	67.20	69.10	74.49	77.49	81.20	88.08	96.43	104.1	111.9	129.7	152.6
94	64.25	68.07	69.98	75.41	78.43	82.16	89.09	97.52	105.3	113.2	131.2	154.3
95	65.08	68.93	70.85	76.32	79.37	83.13	90.12	98.63	106.4	114.4	132.6	155.9
96	65.91	69.79	71.73	77.24	80.30	84.09	91.14	99.72	107.6	115.7	134.0	157.6
97	66.75	70.65	72.61	78.16	81.24	85.06	92.16	100.8	108.8	116.9	135.5	159.3
98	67.59	71.52	73.48	79.07	82.18	86.03	93.19	101.9	109.9	118.1	136.9	160.9
99	68.43	72.38	74.36	79.98	83.12	87.00	94.21	103.0	111.1	119.4	138.3	162.6
100	69.26	73.25	75.24	80.91	84.06	87.97	95.23	104.1	112.3	120.6	139.7	164.3

En un taller de mantenimiento de aeronaves las llegadas siguen un proceso de Poisson de promedio 3 aeronaves/día. Las dimensiones del recinto permiten albergar a una sola aeronave. El taller despacha un promedio de 2 aeronaves/día de acuerdo con una distribución exponencial.
Calcular las medidas de rendimiento.

Solución:

Es una cola $M/M/1/1$ con disciplina FIFO, con una capacidad limitada $c=1$ aeronave, con lo que el número de aeronaves en la cola es $(c-1=1-1=0)$. Es una cola sin cola.

Solución:

Tasas de llegada y servicio:

$\lambda = 3$ aeronaves/día $\quad \mu = 2$ aeronaves/día $\quad$ Factor saturación: $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} = \dfrac{3}{2} = 1,5$ Erlangs

Probabilidad de que no haya aeronaves en taller: $p_0 = \dfrac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{1} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n} = \dfrac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{1} \frac{1}{n!}\, 1,5^n} = \dfrac{1}{1+1,5} = 0,4$

Tasa efectiva de llegadas: $\bar{\lambda} = \lambda\, p_0 = 3 \times 0,4 = 1,2$ aeronaves/día

Utilización efectiva sistema: $\bar{\rho} = \dfrac{\bar{\lambda}}{\mu} = \dfrac{1,2}{2} = 0,6$

Probabilidad de estado: $p_n = \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0 \qquad p_1 = \dfrac{1}{1!}\, 1,5 \,.\, 0,4 = 0,6$

Número promedio de clientes en el sistema: $L_s = \displaystyle\sum_{n=1}^{1} n\, p_n = p_1 = 0,6$

Tiempo promedio de clientes en el sistema: $W_s = \dfrac{L_s}{\bar{\lambda}} = \dfrac{0,6}{1,2} = 0,5$ días $\qquad \bar{\lambda} = \mu\, L_s = 2 \,.\, 0,6 = 1,2$

Denotar que $W_s = \dfrac{1}{\mu} = \dfrac{1}{2} = 0,5$ días

Queuing Analysis

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

AERONAVES

Data Description	ENTRY
Number of servers	1
Service rate (per server per hora)	2
Customer arrival rate (per hora)	3
Queue capacity (maximum waiting space)	0
Customer population	
Busy server cost per hora	
Idle server cost per hora	
Customer waiting cost hora	
Customer being served cost per hora	
Cost of customer being balked	
Unit queue capacity cost	

Queuing Analysis

File Format Results Utilities Window Help

Performance Summary
Probability Summary
Show Sensitivity Analysis - Table
Show Sensitivity Analysis - Graph
Show Capacity Analysis

System ... NAVES

System Performance Summary for AERONAVES

	Performance Measure	Result
1	System: M/M/1/1	From Formula
2	Customer arrival rate (lambda) per hora =	3,00
3	Service rate per server (mu) per hora =	2,00
4	Overall system effective arrival rate per hora =	1,20
5	Overall system effective service rate per hora =	1,20
6	Overall system utilization =	60,00 %
7	Average number of customers in the system (L) =	0,60
8	Average number of customers in the queue (Lq) =	0
9	Average number of customers in the queue for a busy system (Lb) =	0
10	Average time customer spends in the system (W) =	0,50 días
11	Average time customer spends in the queue (Wq) =	0 día
12	Average time customer spends in the queue for a busy system (Wb) =	0 día
13	The probability that all servers are idle (Po) =	40,00 %
14	The probability an arriving customer waits (Pw) or system is busy (Pb) =	60,00 %
15	Average number of customers being balked per hora =	1,80

Queuing Analysis

File Format Results Utilities Window Help

System Probability Summary for AERONAVES

n	Estimated Probability of n Customers in the System	Cumulative Probability
0	0,40	0,40
1	0,60	1,00

Dos equipos médicos trabajan en dos salas de investigación, admitiendo ensayos clínicos cuando se encuentran sin trabajo teniendo las peticiones que abandonar. Las solicitudes de ensayos, indistintamente de la sala, siguen un proceso de Poisson con tasa de llegada de 8 ensayos/día. Cada sala da salida a los pedidos con tasa de 4 ensayos/día de acuerdo a una distribución exponencial. Calcular las medidas de rendimiento.

Solución:

Es una cola $M/M/2/2$ con lo que el número de ensayos clínicos en cola es $c-s = 2-2 = 0$

Tasa de llegada: $\lambda = 8$ ensayos/día Tasa de servicio: $\mu = 4$ ensayos/día $\dfrac{\lambda}{\mu} = 2$

Probabilidad de no haber clientes en el sistema: $p_0 = \dfrac{1}{\sum_{n=0}^{2} \dfrac{1}{n!}\, 2^n} = \dfrac{1}{1+2+2} = 0{,}2$

Probabilidad de estado: $p_n = \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0$ $p_1 = \dfrac{1}{1!}\, 2 \,.\, 0{,}2 = 0{,}4$ $p_2 = \dfrac{1}{2!}\, 2^2 \,.\, 0{,}2 = 0{,}4$

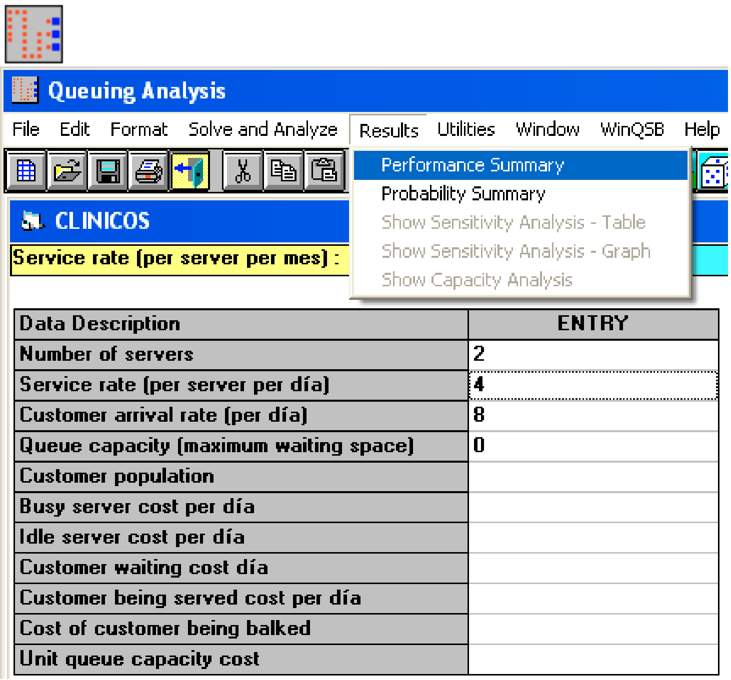
Tasa efectiva de llegadas: $\bar{\lambda} = \lambda \sum_{n=0}^{c-1} p_n = 8 \sum_{n=0}^{1} p_n = 8\,.\,(0{,}2+0{,}4) = 4{,}8$ ensayos/día

Utilización efectiva sistema: $\bar{\rho} = \dfrac{\bar{\lambda}}{c\,\mu} = \dfrac{4{,}8}{2\,.\,4} = 0{,}6$

Número promedio de clientes en el sistema: $L_s = \sum_{n=1}^{2} n\, p_n = p_1 + 2p_2 = 0{,}4 + 2\,.\,0{,}4 = 1{,}2$

Tiempo promedio de clientes en el sistema: $W_s = \dfrac{L_s}{\bar{\lambda}} = \dfrac{1{,}2}{4{,}8} = 0{,}25$ días $\bar{\lambda} = \mu\, L_s = 4\,.\,1{,}2 = 4{,}8$

Denotar que $W_s = \dfrac{1}{\mu} = \dfrac{1}{4} = 0{,}25$ días



Data Description	ENTRY
Number of servers	2
Service rate (per server per día)	4
Customer arrival rate (per día)	8
Queue capacity (maximum waiting space)	0
Customer population	
Busy server cost per día	
Idle server cost per día	
Customer waiting cost día	
Customer being served cost per día	
Cost of customer being balked	
Unit queue capacity cost	

Queuing Analysis

File Format Results Utilities Window Help

Performance Summary
Probability Summary
Show Sensitivity Analysis - Table
Show Sensitivity Analysis - Graph
Show Capacity Analysis

System ... COS

04-18-2022	Performance Measure	Result
1	System: M/M/2/2	From Formula
2	Customer arrival rate (lambda) per día =	8,0000
3	Service rate per server (mu) per día =	4,0000
4	Overall system effective arrival rate per día =	4,8000
5	Overall system effective service rate per día =	4,8000
6	Overall system utilization =	60,0000 %
7	Average number of customers in the system (L) =	1,2000
8	Average number of customers in the queue (Lq) =	0
9	Average number of customers in the queue for a busy system (Lb) =	0
10	Average time customer spends in the system (W) =	0,2500 días
11	Average time customer spends in the queue (Wq) =	0 día
12	Average time customer spends in the queue for a busy system (Wb) =	0 día
13	The probability that all servers are idle (Po) =	20,0000 %
14	The probability an arriving customer waits (Pw) or system is busy (Pb) =	40,0000 %
15	Average number of customers being balked per día =	3,2000

Queuing Analysis

File Format Results Utilities Window Help

System Probability Summary for CLINICOS

n	Estimated Probability of n Customers in the System	Cumulative Probability
0	0,2000	0,2000
1	0,4000	0,6000
2	0,4000	1,0000

Una empresa instala un sistema de comunicación entre sus dos sedes. Las llamadas reciben una señal de ocupado cuando las líneas están ocupadas. El sistema genera llamadas aleatoriamente, según un proceso de Poisson con una tasa de 105 llamadas/hora y las llamadas tardan cuatro minutos por término medio para ser contestadas.

a) La empresa pretende instalar las líneas necesarias para asegurar que la probabilidad de recibir la señal de ocupado sea inferior a 0,005. ¿Cuántas líneas hacen falta?

b) ¿Cuál será la probabilidad de recibir la señal de congestionado con sólo 10 líneas?

Solución:

a) Tasas de llegada y servicio:

$$\lambda = 105 \text{ llamadas/hora} = \frac{105}{60} = 1{,}75 \text{ llamadas/minuto}$$

$$\mu = \frac{1}{4} \text{ llamadas/minuto}$$

Intensidad del tráfico: $\dfrac{\lambda}{\mu} = \dfrac{1{,}75}{0{,}25} = 7$ Erlangs

A partir de la tabla Erlang B $(B = 0{,}5\%)$ hay que encontrar el valor mínimo de "c" que verifique la desigualdad $B(c\,,\,7) \leq 0{,}005$

Erlang B	0,5%
Servidores	
15	7,356

$B(c\,,\,7) \leq 0{,}005 \quad \rightarrow \quad c = 15$

b) Interpolando en la tabla Erlang $B(10\,,7)$ se encuentra el valor $B(10\,,\,7) \leq x$

Erlang B	5%	x%	10%
Servidores			
10	6,216	7	7,511

$$\frac{7{,}511 - 6{,}216}{0{,}1 - 0{,}05} = \frac{7 - 6{,}216}{x - 0{,}05}$$

$x = 0{,}079$

Universidad Autónoma de Madrid

Asignatura .... Grupo ....

Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio del día ....

Hoja nº ....

UAM
Universidad Autónoma de Madrid

Asignatura .... Grupo ....

Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio del día ....

MODELOS DE COLAS

- M / M - M / M / / / k
- M / M / 1 / c - M / M / s / k
- M / M / c / c

Instrumentos Estadísticos Avanzados
Facultad Ciencias Económicas y Empresariales
Departamento de Economía Aplicada
Profesor: Santiago de la Fuente Fernández