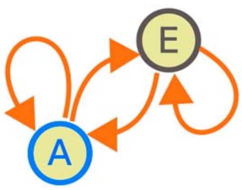
Instrumentos Estadísticos Avanzados
Facultad Ciencias Económicas y Empresariales
Departamento de Economía Aplicada
Profesor: Santiago de la Fuente Fernández

CADENAS DE MARKOV TIEMPO DISCRETO



CADENAS DE MARKOV FINITAS

- Cadenas de Markov en tiempo discreto (CMTD)
- Cadenas de Markov en tiempo continuo (CMTC)
- Procesos de Poisson

CADENAS DE MARKOV EN TIEMPO DISCRETO

Las cadenas de Markov fueron introducidas por el matemático ruso Andrei Markov (1856-1922) alrededor de 1905, con el objetivo de crear un modelo probabilístico parara analizar la frecuencia con la que aparecen las vocales en poemas y textos literarios.
Las cadenas de Markov pueden aplicarse a una amplia gama de fenómenos cientificos y sociales.

Andrei Markov fue alumno de la universidad de San Petersburgo, discipulo de Chebyshev como Liapunov, después de su doctorado en 1886 accedió como adjunto a la Academia de Ciencias de San Petersburgo, a propuesta del propio Chebyshev.
En 1989, cuando Chebyshev dejó la universidad, le sustituyó en los cursos de teoría de probabilidad. En 1925 Andrei Markov dejó definitivamente la universidad.

Aparte de su perfil académico, Andrei Markov fue un activista político oponiéndose a los privilegios de la nobleza zarista, llegando a rechazar las condecaraciones del zar en protesta por decisiones políticas relacionadas con la Academia de Ciencias.

Andrei Markov influyó sobre diversos campos de las matemáticas, sobresaliendo con la teoría de la probabilidad.
En 1887 completó la prueba que permitía generalizar el teorema central del límite que ya había avanzado Chebyshev, aunque su aportación más conocida se encuentra en los procesos estocásticos, elaborando un instrumento matemático que actualmente se conoce como cadena de Markov, instrumento que, hoy en día, se consideran una herramienta esencial en disciplinas como la economía, la ingeniería, la investigación de operaciones y muchas otras.

PROCESOS ESTOCÁSTICOS: CADENA DE MARKOV EN TIEMPO DISCRETO

Un proceso estocástico o proceso aleatorio $X(t)$ es un concepto matemático que se utiliza para usar magnitudes aleatorias que varían con el tiempo o para caracterizar una sucesión de variables aleatorias o estocásticas que varían en función de otra variable, generalmente el tiempo.

Cada variable o conjunto de variables sometidas a influencias o efectos aleatorios constituyen un proceso estocástico.

En teoría de la probabilidad, una cadena de Markov en tiempo discreto (CMTD) es un tipo especial de proceso estocástico discreto en el que la probabilidad de que ocurra un suceso depende solamente del suceso inmediatamente anterior. Esta característica de falta de memoria se conoce como *propiedad de Markov* (recibe el nombre del matemático ruso Andrei Markov, que lo introdujo en 1907).

Una cadena de Markov es una secuencia $(X_1, X_2, X_3, \cdots, X_n)$ de variables aleatorias, el dominio de estas variables es el llamado espacio estado.

El valor X_n es el estado del proceso en el tiempo n.

La distribución de la probabilidad condicionada de X_{n+1} en estados pasados es una función de X_n por sí sola, siendo x_i el estado del proceso en el instante i-ésimo:

$$P\left[X_{n+1} = x_{n+1} \,\middle|\, X_n = x_n, X_{n-1} = x_{n-1}, \cdots, X_2 = x_2, X_1 = x_1\right] = P\left[X_{n+1} = x_{n+1} \,\middle|\, X_n = x_n\right]$$

para cualesquiera $n \geq 0$ y $\left\{x_{n+1}, x_1, x_2, \cdots, x_n\right\} \in S$

Si $|S| < \infty$ se dice que la cadena de Markov es finita. En caso contrario se dice que es infinita.

CADENAS HOMOGÉNEAS Y NO HOMOGÉNEAS: Una cadena de Markov se dice homogénea si la probabilidad de ir del estado i al estado j en un paso no depende del tiempo en el que se encuentra la cadena

Cadena homogénea: $P\left[X_n = j \,\middle|\, X_{n-1} = i\right] = P\left[X_1 = j \,\middle|\, X_0 = i\right]$ para todo nodo n y $\forall\, i, j$

Si para alguna pareja de estados y para algún tiempo n la propiedad mencionada no se cumple se dice que la cadena de Markov es no homogénea.

PROBABILIDAD DE TRANSICIÓN Y MATRIZ DE TRANSICIÓN: Si una cadena de Markov está en el estado i-ésimo, hay una probabilidad p_{ij} de pasar al próximo estado j-ésimo, a esta probabilidad p_{ij} se la llama probabilidad de transición.

La probabilidad p_{ij} de pasar del estado i al estado j en un paso se llama probabilidad de transición de i a j: $p_{ij} = \text{Prob}\left(X_{n+1} = j \,\middle|\, X_n = i\right)$

Las probabilidades de transición conforman la matriz de transición P, que es con rigor una matriz (finita) sólo para cadenas de Markov finitas, aunque también se conserva el nombre y la notación para cadenas de Markov infinitas.

Cada fila de la matriz de transición debe sumar 1 por las propiedades básicas de probabilidad.

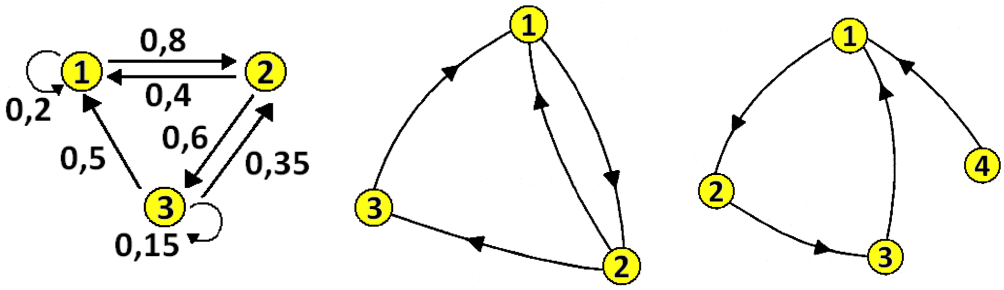
$$\sum_{j\in S} p_{ij} = \sum_{j\in S} P(X_1 = j \,|\, X_0 = 1) = P(X_1 \in S \,|\, X_0 = i) = 1$$

El modelo para redes se puede considerar una cadena de Markov donde S son los vértices del grafo dirigido y p_{ij} es el inverso del número de aristas salientes desde i cuando hay una arista de i a j y cero en otro caso.

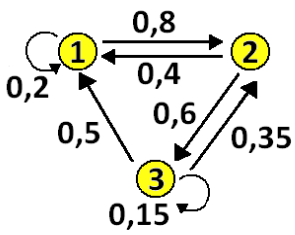
La matriz de transición en un solo paso, dada una cadena de Markov con *k* estados posibles $S = (s_1, s_2, \cdots, s_k)$ y probabilidades de transición estacionarias, viene dada por la expresión:

$$\text{Si } p_{ij} = P\left[X_{n+1} = s_j \,\middle|\, X_n = s_i\right] \;\Rightarrow\; P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1k} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{k1} & p_{k2} & \vdots & p_{kk} \end{pmatrix}$$

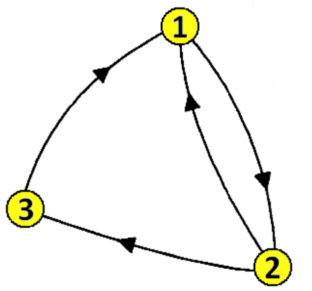
Calcular la matriz de transición asociada a los grafos:



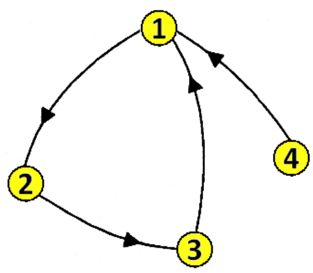
Solución:



$$\begin{array}{c} \text{Estado} \\ \\ P = \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0,2 & 0,8 & 0 \\ 0,4 & 0 & 0,6 \\ 0,5 & 0,35 & 0,15 \end{bmatrix} \end{array}$$



$$\begin{array}{c} \text{Estado} \\ \\ P = \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$



$$\begin{array}{c} \text{Estado} \\ \\ P = \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

MATRIZ DE TRANSICIÓN EN PLAZOS

El Vector distribución es un vector fila no negativo con una entrada para cada estado del sistema.

Vector probabilidad es un vector $v = (v_1, v_2, \cdots, v_k)$ con entradas no negativas, de forma que se agregan hasta llegar a 1. Las entradas pueden representar las probabilidades de encontrar un sistema en cada uno de los estados.

$$v_i \geq 0 \quad \text{para } i = 1, 2, \ldots, n \qquad \sum_{i=1}^{n} v_i = 1$$

El vector de distribución $v = (v_1, v_2, \cdots, v_k)$ y la matriz de transición P determinan la probabilidad para el estado de la cadena en el segundo instante de tiempo, dicha probabilidad viene dada por el vector (vP)

Distribución después del 1 paso: vP

Distribución después del 2 paso: $(vP)P = vP^2$

Distribución después del 3 paso: $(vP^2)P = vP^3$

Distribución después de n pasos: vP^n

Una notación conveniente para representar las probabilidades de transición de n pasos es la matriz de transición de n pasos:

$$P^{(n)} = \begin{pmatrix} p_{11}^{(n)} & p_{12}^{(n)} & \cdots & p_{1k}^{(n)} \\ p_{21}^{(n)} & p_{22}^{(n)} & \cdots & p_{2k}^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{k1}^{(n)} & p_{k2}^{(n)} & \vdots & p_{kk}^{(n)} \end{pmatrix}$$

La probabilidad de transición en una fila y columna dadas es la transición del estado en esa fila al estado en la columna. Cuando $n = 1$ el superíndice *n* no se escribe y se hace referencia a ésta como una *matriz de transición*.

♦ Las probabilidades de transición en n pasos son las probabilidades de transición del estado i al estado j en n pasos, denotándose como:

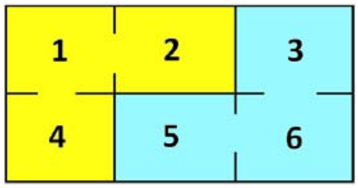
$$p_{ij}^{(n)} = P(X_n = j \mid X_0 = i) = P(X_{n+m} = j \mid X_m = i) \text{ , por tanto, } p_{ij}^{(1)} = p_{ij}$$

Las cadenas de Markov que se analizan a continuación tienen las propiedades:

- Un número finito de estados.
- Probabilidades de transición estacionarias.

PANTEAMIENTO Y ESTUDIO DE LA CADENA DE MARKOV

Se introduce un ratón en una de las celdas del laberinto de forma aleatoria. Dentro del laberinto, el ratón va a cualquier celda contigua o se queda en la celda que está con la misma probabilidad.



a) Probabilidad de estar en cierta celda en el instante 1
b) Probabilidad de estar en cierta celda en el instante 2

Solución:

a) Se definen las variables aleatorias: $X_n \equiv$ celda ocupada en el instante *n*

Los posibles estados son $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

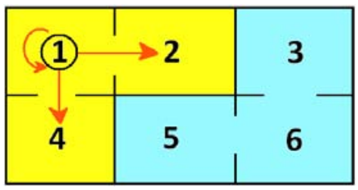
Probabilidades de transición $p_{ij} = P\left[X_{n+1} = j \mid X_n = i\right]$ son estacionarias porque no dependen del instante en que se encuentre el proceso.

Matriz de transición:

$$P = \begin{array}{c} \text{Estados} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} & p_{15} & p_{16} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} & p_{25} & p_{26} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} & p_{35} & p_{36} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} & p_{45} & p_{46} \\ p_{51} & p_{52} & p_{53} & p_{54} & p_{55} & p_{56} \\ p_{61} & p_{62} & p_{63} & p_{64} & p_{65} & p_{66} \end{pmatrix} \end{array}$$

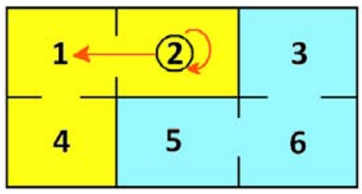
- Desde el estado 1

$$p_{11} = P\left[X_{n+1} = 1 \mid X_n = 1\right] \qquad p_{12} = P\left[X_{n+1} = 2 \mid X_n = 1\right]$$
$$p_{13} = P\left[X_{n+1} = 3 \mid X_n = 1\right] = 0 \qquad p_{14} = P\left[X_{n+1} = 4 \mid X_n = 1\right]$$
$$p_{15} = P\left[X_{n+1} = 5 \mid X_n = 1\right] = 0 \qquad p_{16} = P\left[X_{n+1} = 6 \mid X_n = 1\right] = 0$$



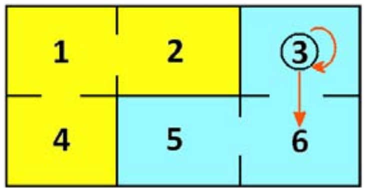
- Desde el estado 2

$$p_{21} = P\left[X_{n+1} = 1 \mid X_n = 2\right] \qquad p_{22} = P\left[X_{n+1} = 2 \mid X_n = 2\right]$$
$$p_{23} = P\left[X_{n+1} = 3 \mid X_n = 2\right] = 0 \qquad p_{24} = P\left[X_{n+1} = 4 \mid X_n = 2\right] = 0$$
$$p_{25} = P\left[X_{n+1} = 5 \mid X_n = 2\right] = 0 \qquad p_{26} = P\left[X_{n+1} = 6 \mid X_n = 2\right] = 0$$



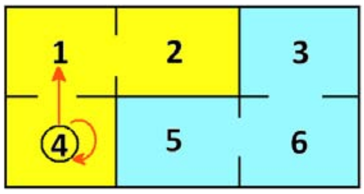
- Desde el estado 3

$$p_{31} = P\left[X_{n+1} = 1 \,|\, X_n = 3\right] = 0 \quad p_{32} = P\left[X_{n+1} = 2 \,|\, X_n = 3\right] = 0$$
$$p_{33} = P\left[X_{n+1} = 3 \,|\, X_n = 3\right] \quad p_{34} = P\left[X_{n+1} = 4 \,|\, X_n = 3\right] = 0$$
$$p_{35} = P\left[X_{n+1} = 5 \,|\, X_n = 3\right] = 0 \quad p_{36} = P\left[X_{n+1} = 6 \,|\, X_n = 3\right]$$



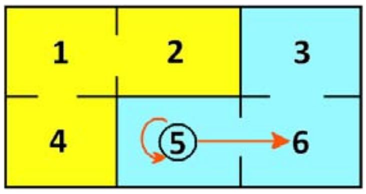
- Desde el estado 4

$$p_{41} = P\left[X_{n+1} = 1 \,|\, X_n = 4\right] \quad p_{42} = P\left[X_{n+1} = 2 \,|\, X_n = 4\right] = 0$$
$$p_{43} = P\left[X_{n+1} = 3 \,|\, X_n = 4\right] = 0 \quad p_{44} = P\left[X_{n+1} = 4 \,|\, X_n = 4\right]$$
$$p_{45} = P\left[X_{n+1} = 5 \,|\, X_n = 4\right] = 0 \quad p_{46} = P\left[X_{n+1} = 6 \,|\, X_n = 4\right] = 0$$



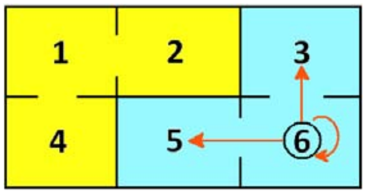
- Desde el estado 5

$$p_{51} = P\left[X_{n+1} = 1 \,|\, X_n = 5\right] = 0 \quad p_{52} = P\left[X_{n+1} = 2 \,|\, X_n = 5\right] = 0$$
$$p_{53} = P\left[X_{n+1} = 3 \,|\, X_n = 5\right] = 0 \quad p_{54} = P\left[X_{n+1} = 4 \,|\, X_n = 5\right] = 0$$
$$p_{55} = P\left[X_{n+1} = 5 \,|\, X_n = 5\right] \quad p_{56} = P\left[X_{n+1} = 6 \,|\, X_n = 5\right]$$



- Desde el estado 6

$$p_{61} = P\left[X_{n+1} = 1 \,|\, X_n = 6\right] = 0 \quad p_{62} = P\left[X_{n+1} = 2 \,|\, X_n = 6\right] = 0$$
$$p_{63} = P\left[X_{n+1} = 3 \,|\, X_n = 6\right] \quad p_{64} = P\left[X_{n+1} = 4 \,|\, X_n = 6\right] = 0$$
$$p_{65} = P\left[X_{n+1} = 5 \,|\, X_n = 6\right] \quad p_{66} = P\left[X_{n+1} = 6 \,|\, X_n = 6\right]$$



El vector de probabilidad inicial $v = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$, probabilidad de estar en cierta celda en el instante de tiempo 1.

Como el ratón va a cualquier celda contigua o se queda en la celda que está con la misma probabilidad, la matriz de transición es:

$$\begin{array}{l} \text{Estados} \quad 1 \qquad 2 \qquad 3 \qquad 4 \qquad 5 \qquad 6 \end{array}$$

$$P = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} p_{11} = p_{12} = p_{14} = 1/3 \\ p_{21} = p_{22} = 1/2 \\ p_{33} = p_{36} = 1/2 \\ p_{41} = p_{44} = 1/2 \\ p_{55} = p_{56} = 1/2 \\ p_{63} = p_{65} = p_{66} = 1/3 \end{array}$$

b) Para calcular la probabilidad de estar en cierta celda en el instante 2 se tiene que recurrir al poducto (vP)

$$vP = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{5}{36} & \frac{5}{36} & \frac{5}{36} & \frac{5}{36} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}$$

El vector de probabilidad de estar en cierta celda en el instante de tiempo 2 es

$$vP = \left(\frac{2}{9}, \frac{5}{36}, \frac{5}{36}, \frac{5}{36}, \frac{5}{36}, \frac{2}{9} \right)$$

ECUACIONES DE CHAPMAN-KOLMOGOROV

Las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov proporcionan un método para calcular las probabilidades de transición de n pasos $p_{ij}^{(n)}$

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^{M} p_{ik}^{(m)}\, p_{kj}^{(n-m)} \quad i, j = 0, 1, \ldots, M \quad ; \quad m = 0, 1, \ldots, n-1 \quad ; \quad n = m+1, m+2, \ldots$$

Estas ecuaciones señalan que al ir del *estado i* al *estado j* en n pasos. El proceso estará en algún estado k después de exactamente m pasos $(m < n)$.

De esta forma, $p_{ik}^{(m)}\, p_{kj}^{(n-m)}$ es sólo la probabilidad condicional de que, si comienza en el *estado i*, el proceso vaya al estado k después de m pasos y después al estado j en $(n-m)$ pasos. En consecuencia, al resumir estas probabilidades condicionadas sobre todos los estados posibles k se debe obtener $p_{ij}^{(n)}$.

Los casos especiales de $m = 1$ y $m = n-1$, para todos los estados i y j, conducen a las expresiones:

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^{M} p_{ik}\, p_{kj}^{(n-1)} \qquad p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^{M} p_{ik}^{(n-1)}\, p_{kj}$$

Para $n = 2$, para todos los estados i y j, estas expresiones se convierten en $p_{ij}^{(2)} = \sum_{k=0}^{M} p_{ik}\, p_{kj}$, donde las $p_{ij}^{(2)}$ son los elementos de la matriz $P^{(2)}$.

Denotar que estos elementos también se obtienen al multiplicar la matriz de transición de un paso por sí misma, es decir: $P^{(2)} = P \times P = P^2$

Del mismo modo, las expresiones anteriores de $p_{ij}^{(n)}$ cuando $m = 1$ y $m = n-1$ indican que la matriz de probabilidades de transición de n pasos es:

$$\begin{aligned} P^{(n)} &= P\,P^{(n-1)} = P^{(n-1)}\,P = \\ &= P\,P^{n-1} = P^{n-1}\,P = \\ &= P^n \end{aligned}$$

Por tanto, la matriz de probabilidades de transición de n pasos P^n se puede obtener al calcular la n-ésima potencia de la matriz de transición de un paso P.

DISTRIBUCIÓN MARGINAL DEL PASO N-ÉSIMO

Conocidas las probabilidades de transición en *n pasos* se calcula la distribución marginal del paso n-ésimo:

$$P(X_n = j) = \sum_i P(X_n = j \mid X_0 = i) = \sum_i p_{ij}^{(n)}\, \pi_i^0$$

La distribución de probabilidad inicial de X_0 es:

$$\pi^0 = (\pi_0^0, \pi_1^0, \cdots, \pi_i^0, \cdots) \text{ con } \pi_i^0 = P(X_0 = i)$$

La distribución de probabilidad en *n pasos* será:

$$\pi^n = (\pi_0^n, \pi_1^n, \cdots, \pi_i^n, \cdots) \text{ con } \pi_i^n = P(X_n = i)$$

Por tanto, $\pi^n = \pi^0\, P^n$

ESTADO ESPERADO:

- *Estado esperado en el instante n suponiendo que se parte del estado i:*

$$P(X_n \mid X_0 = i) = \sum_{j=0}^{\infty} j\, P(X_n = j \mid X_0 = i) = \sum_{j=0}^{\infty} j\, p_{ij}^{(n)}$$

- *Estado esperado en el instante n:*

$$P(X_n = j) = \sum_{j=0}^{\infty} j\, P(X_n = j) = \sum_{j=0}^{\infty} j \sum_i p_{ij}^{(n)}\, \pi_i^0$$

VECTOR DE PROBABILIDAD ESTACIONARIO: Un vector de probabilidad π (finito o infinito numerable) se dice estacionario para una cadena de Markov en tiempo discreto (CMTD) si cualquier transición de acuerdo con la matriz P verifica:

$$\pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i\, p_{ij} \quad j \geq 0 \qquad \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1$$

$\pi_j \equiv$ probabilidad estacionaria de estar en el estado j

$\mu_j = \dfrac{1}{\pi_j} \equiv$ frecuencia que tarda en ser visitado el estado j

Al vector de probabilidad estacionario π también se le denomina distribución estacionaria o distribución de equilibrio.

ESTADO ESTABLE

Las cadenas de Markov poseen una propiedad notable en cuanto a que tienden a aproximarse a lo que se llama estado estable.

El estado estable se determina resolviendo la ecuación $\pi P = \pi$, añadiendo la ecuación $\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1$

VECTOR DE PROBABILIDAD LÍMITE:

Un vector de probabilidades $\pi^0 = (\pi_0^0, \pi_1^0, \cdots, \pi_i^0, \cdots)$ de una cadena de Markov en tiempo discreto se díce límite si:

$$\tilde{\pi} = \lim_{n\to\infty} \pi^n = \lim_{n\to\infty} \pi^0 \, P^n = \pi^0 \lim_{n\to\infty} P^n = \pi^0 \tilde{P}$$

- El vector de probabilidades π de una cadena de Markov en tiempo discreto se dice el único vector de probabilidades de equilibrio de la cadena sí P^n y π^n convergen independientemente de la distribución inicial π^0, cada probabilidad es mayor estrictamente que cero.

En una región el clima solo puede ser soleado (S) o nublado (N), suponiendo que las condiciones climaticas en días sucesivos forman una cadena de Markov con probabilidades estacionarias, siendo la matriz de transición:

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} S & N \end{array} \\ \begin{array}{c} S \\ N \end{array} & \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix} \end{array}$$

a) Si el martes está nublado, ¿cuál es la probabilidad de que esté nublado el miércoles?

b) Si el martes está nublado, ¿cuál es la probabilidad de que el jueves haga sol?

c) Suponiendo que la probabilidad de que el martes haga sol es 0,2 y la probabilidad de que esté nublado es 0,8. Calcular:

- Probabilidad de que esté nublado el miércoles.
- Probabilidad de que esté nublado el jueves
- Probabilidad de que esté nublado el viernes.

Solución:

a) Si el martes está nublado, la probabilidad de que esté nublado el miércoles es $p_{22} = 0,4$

b) Si el martes está nublado para calcular la probabilidad de que el jueves haga sol se necesita calcular la matriz de transición en 2 pasos:

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} S & N \end{array} \\ \begin{array}{c} S \\ N \end{array} & \begin{pmatrix} 0,67 & 0,33 \\ 0,66 & 0,34 \end{pmatrix} \end{array}$$

La probabilidad del jueves con sol es 0,66

c) Si el martes la probabilidad de sol es 0,2 y la probabilidad nublado 0,8, esto es, $\pi = (0,2, 0,8)$; el miércoles está nublado (después del 1 paso):

$$\pi P = (0,2, 0,8) \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix} = (\underbrace{0,62}_{S}, \underbrace{0,38}_{N}) \quad \text{probabilidad } = 0,38 \text{ miércoles nublado}$$

- Para calcular la probabilidad de que el jueves esté nublado:

$$\pi P^2 = (0,2, 0,8) \begin{pmatrix} 0,67 & 0,33 \\ 0,66 & 0,34 \end{pmatrix} = (\underbrace{0,662}_{S}, \underbrace{0,338}_{N})$$

La probabilidad del jueves nublado es 0,338

♦ Para calcular la probabilidad de que el viernes esté nublado:

$$P^3 = P^2 x\, P = \begin{pmatrix} 0,67 & 0,33 \\ 0,66 & 0,34 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,667 & 0,333 \\ 0,666 & 0,334 \end{pmatrix}$$

$$\pi P^3 = (0,2, 0,8) \begin{pmatrix} 0,667 & 0,333 \\ 0,666 & 0,334 \end{pmatrix} = (\underbrace{0,6662}_{S}, \underbrace{0,3338}_{N})$$

La probabilidad del viernes nublado es 0,3338

Se sabe que un sistema de comunicaciones falla o no dependiendo si ha fallado o no el día anterior. La probabilidad de que falle un día sabiendo que ha fallado el día anterior es de 0,6, pero si no ha fallado el día anterior es de 0,4.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el sistema falle dentro de cuatro días sabiendo que hoy no ha fallado?

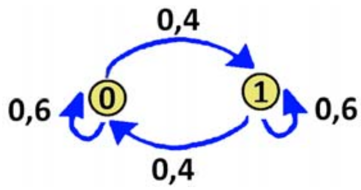
b) ¿Cuál es la probabilidad de que el sistema falle el cuarto día sabiendo que inicialmente la probabilidad de fallar es de 0,3 y la de no fallar es de 0,7?

c) ¿Cuál es el vector de probabilidades de equilibrio?

Solución:

a) Sean los estados $E = \{0 \equiv \text{falla}, 1 \equiv \text{no falla}\}$

$$\begin{array}{cc} & \text{Estado} \quad 0 \qquad 1 \\ P = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} \end{array}$$



La probabilidad pedida es $p_{10}^{(4)} = P(X_4 = 0 \mid X_0 = 1)$

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,52 & 0,48 \\ 0,48 & 0,52 \end{pmatrix}$$

$$P^3 = P \text{ x } P^2 = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,52 & 0,48 \\ 0,48 & 0,52 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,504 & 0,496 \\ 0,496 & 0,504 \end{pmatrix}$$

$$P^4 = P \text{ x } P^3 = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,504 & 0,496 \\ 0,496 & 0,504 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5008 & 0,4992 \\ \boxed{0,4992} & 0,5008 \end{pmatrix}$$

$$p_{10}^{(4)} = P(X_4 = 0 \mid X_0 = 1) = 0,4992$$

b) La distribución de probabilidad inicial es $\pi^0 = (0,3\ ,\ 0,7)$ y la distribución de probabilidad en *4 pasos* será $\pi^4 = \pi^0\, P^4$

$$P(X_4 = 0) = \sum_{i=0}^{1} p_{i0}^{(4)}\, \pi_i^0 = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,5008 \\ 0,4992 \end{pmatrix} = 0,5008 \text{ x } 0,3 + 0,4992 \text{ x } 0,7 = 0,49968$$

$$\pi^1 = \pi^0\, P = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,46 & 0,54 \end{pmatrix}$$

$$\pi^2 = \pi^0\, P^2 = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,52 & 0,48 \\ 0,48 & 0,52 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,492 & 0,508 \end{pmatrix}$$

$$\pi^3 = \pi^0\, P^3 = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,504 & 0,496 \\ 0,496 & 0,504 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4984 & 0,5016 \end{pmatrix}$$

$$\pi^4 = \pi^0\, P^4 = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,5008 & 0,4992 \\ 0,4992 & 0,5008 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,49968 & 0,50032 \end{pmatrix}$$

$$\pi^4 = (\pi_0^4, \pi_1^4) = (0,49968, 0,50032)$$

$$P(X_4 = 0) = \pi_0^4 = 0,49968$$

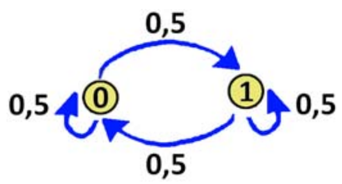
c) $$P^8 = P^4 \text{ x } P^4 = \begin{pmatrix} 0,5008 & 0,4992 \\ 0,4992 & 0,5008 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,5008 & 0,4992 \\ 0,4992 & 0,5008 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,50000128 & 0,49999872 \\ 0,49999872 & 0,50000128 \end{pmatrix}$$

$$P^{12} = P^4 \text{ x } P^8 = \begin{pmatrix} 0,5008 & 0,4992 \\ 0,4992 & 0,5008 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,50000128 & 0,49999872 \\ 0,49999872 & 0,50000128 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$$

$$P^{13} = P \text{ x } P^{12} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$$

La matriz a largo plazo de transición:

$$\tilde{P} = \lim_{n \to \infty} P^n = \lim_{n \to \infty} \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$$



El único vector de probabilidades de equilibrio se expresa por $\tilde{\pi} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$

de modo que, $\tilde{\pi} P = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} = \tilde{\pi}$

CÁLCULO DE P^n DE FORMA EFICIENTE

La matriz P^n se puede calcular de manera eficiente: $P = H\,D\,H^{-1} \quad \Rightarrow \quad P^n = H\,D^n\,H^{-1}$

D es la matriz de los autovalores, es decir, las ráices de su polinomio característico: $|P - \lambda\,I| = 0$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

H es la matriz de los autovectores: $(P - \lambda_i\,I)\,v = 0$, donde $H = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

Aunque el método es útil resulta pesado al realizar los cálculos

✓ Calcular los autovalores y autovectores de la matriz estócastica y calcular P^n y $\lim\limits_{n\to\infty} P^n$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Los autovalores se calculan a partir de $|P - \lambda\,I| = 0$

$$|P - \lambda\,I| = \begin{vmatrix} \frac{1}{4} - \lambda & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} - \lambda & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$|P - \lambda\,I| = \frac{1}{64}\begin{vmatrix} 1-4\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 1-4\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-4\lambda \end{vmatrix} = \frac{1}{64}\begin{vmatrix} 4-4\lambda & 2 & 1 \\ 4-4\lambda & 1-4\lambda & 1 \\ 4-4\lambda & 1 & 2-4\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1-\lambda}{16}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1-4\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-4\lambda \end{vmatrix} = \frac{1-\lambda}{16}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1-4\lambda & 0 \\ 0 & -1 & 1-4\lambda \end{vmatrix} = \frac{1}{16}(1-\lambda)\,(-1-4\lambda)\,(1-4\lambda) = 0$$

Los autovalores son $\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = \frac{1}{4} \quad \lambda_3 = -\frac{1}{4}$

Los autovectotes $(P - \lambda_i I)v = 0$ asociados a los autovalores serán:

$$\lambda_1 = 1 \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = -\frac{1}{4} \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matriz de los autovectores $H = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

De este modo, $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1/4)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1/4)^n \end{pmatrix} \xrightarrow{n \to \infty} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$P^n = H\, D^n\, H^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1/4)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1/4)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\lim_{n \to \infty} P^n = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ -1/6 & -1/6 & 1/3 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

CLASIFICACIÓN DE ESTADOS

- El estado j es accesible desde el estado i, denotado por $i \to j$, sí $p_{ij}^{(n)} > 0$ para algún $n \geq 0$

- Dos estados i y j comunican, denotado por $i \leftrightarrow j$, si son acessibles entre sí.

Denotando $\begin{cases} p_{ii}^{(0)} = P\big[X_0 = i \,\big|\, X_0 = i\big] = 1 \\ p_{ij}^{(0)} = P\big[X_0 = j \,\big|\, X_0 = i\big] = 0 \quad \text{si } i \neq j \end{cases}$

La relación de comunicación es una relación de equivalencia, esto es, verifican las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva.

a) Reflexiva: $i \leftrightarrow i \;\; \forall i$ al ser $p_{ii}^{(0)} = 1 > 0$

b) Simétrica: $i \leftrightarrow j \Leftrightarrow \exists\, n, m$ tal que $p_{ij}^{(n)} > 0$ y $p_{ji}^{(m)} > 0$

c) Transitiva: Sí $i \leftrightarrow j$ $\left(\exists\, n, m \text{ tal que } p_{ij}^{(n)} > 0 \text{ y } p_{ji}^{(m)} > 0\right)$ y $j \leftrightarrow k$ $\left(\exists\, n^\bullet, m^\bullet\right.$ tal que $\left. p_{jk}^{(n^\bullet)} > 0 \text{ y } p_{kj}^{(m^\bullet)} > 0\right)$ $\Rightarrow$ $i \leftrightarrow k$ pues $\exists\, n + n^\bullet, m + m^\bullet$ tal que

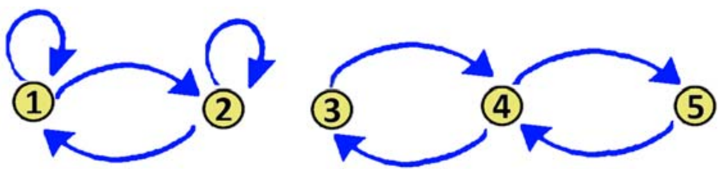
$$p_{ik}^{(n+n^\bullet)} = \sum_{r=0}^{\infty} p_{ir}^{(n)}\, p_{rk}^{(n^\bullet)} \geq p_{ij}^{(n)}\, p_{jk}^{(n^\bullet)} > 0 \quad \text{y} \quad p_{ki}^{(m+m^\bullet)} = \sum_{r=0}^{\infty} p_{kr}^{(m^\bullet)}\, p_{ri}^{(m)} \geq p_{kj}^{(m^\bullet)}\, p_{ji}^{(m)} > 0$$

La relación de comunicación define una partición en el espacio de estados agrupados en clases de equivalencia.

Sea la matriz de transición en un proceso de Markov en tiempo discreto (CMTD):

$$\begin{array}{c} \text{Estado} \\ 1 \\ 2 \\ P = 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 3/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

El grafo asociado a la CMTD es:



Las clases de equivalencia son $\{1, 2\}$ y $\{3, 4, 5\}$

♦ Si el estado inicial pertenece a la clase $\{1, 2\}$ entonces, cualquiera que sea el tiempo, permanecerá en esta clase, y para cualquier estudio del desarrollo dinámico de este sistema la matriz relevante será

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 3/4 \end{pmatrix}$$

♦ Si el proceso se inicia en los estados $\{3, 4, 5\}$ para cualquier tiempo posterior el proceso seguirá en ésta clase, y la matriz relevante será:

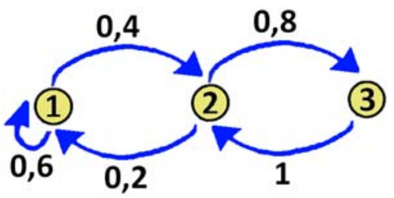
$$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Al haber dos clases existe una reducción de la matriz de transición que dependerá de cuál es el estado inicial del proceso. En consecuencia, esto induce a entrar en la definición:

- La cadena de Markov es irreducible si la relación de equivalencia de comunicación genera una única clase. Es decir, una cadena de Markov es irreducible si todos los estados son comunicativos.

✓ Cadena de Markov en tiempo discreto y diagrama de transición

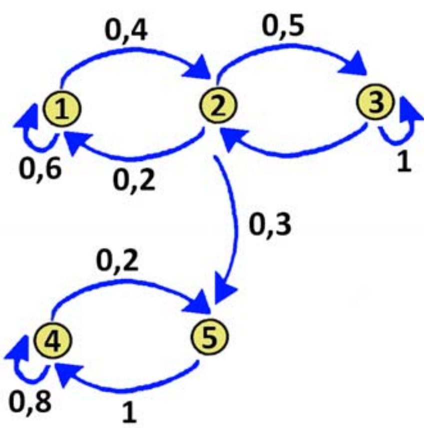
$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{Estado} & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ P = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 & 0 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}8 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$



La cadena de Markov es irreducible al tener una única clase de equivalencia.

✓ Cadena de Markov en tiempo discreto y diagrama de transición

$$\begin{array}{cc} \text{Estado} & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ P = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0{,}3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$



La cadena de Markov no es irreducible al tener tres clases de equivalencia: $\{1, 2\}$, $\{3\}$ y $\{4, 5\}$

- Un estado se llama estado transitorio si, después de haber entrado a este estado, el proceso nunca regresa a él. En otras palabras, un estado transitorio será visitado sólo un número finito de veces.

Es decir, el estado i es transitorio si y solo si un estado j $(j \neq i)$ es accesible desde el estado i, pero no viceversa.

Un estado i es transitorio $\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}(n) < \infty \quad \forall i$

Si el estado i es transitorio $\Rightarrow \mu_i = \dfrac{1}{\pi_i} = \infty$

Si el estado j es transitorio $\Rightarrow p_{ij} \xrightarrow{n \to \infty} 0 \quad \forall i$

En una cadena de Markov con espacio de estados finito no todos los estados pueden ser transitorios, ser transitorio es una propiedad de clase.

- Un estado es recurrente o persistente si, después de haber entrado a este estado, el proceso definitivamente regresará a este estado.
Por consiguiente, un estado es recurrente o persistente si y sólo sí no es transitorio.

✍ Un estado i es recurrente o persistente si $P(X_n = i \text{ para algún } n \geq 1 \,|\, X_0 = i) = 1$, es decir, si la probabilidad de regresar al estado i, habiendo empezado en i es 1.

Un estado i es recurrente o persistente $\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}(n) = \infty$

Si i es un estado recurrente o persistente, entonces:

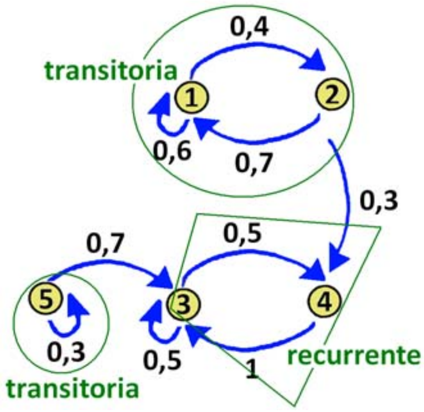
$$\begin{cases} \text{i es un estado persistente nulo si } \mu_i = \infty \\ \text{i es un estado persistente no nulo si } \mu_i < \infty \end{cases}$$

✍ Si el estado i no es recurrente, se dice que es un estado transitorio, es decir, si la probabilidad es menor que la unidad.

Todos los estados de una cadena de Markov de estado finito irreducible son recurrentes.

✓ Cadena de Markov en tiempo discreto y diagrama de transición

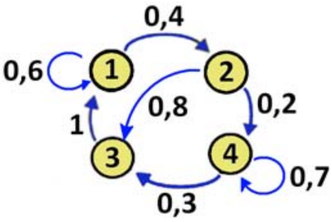
$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} \text{Estado} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\
P = & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 & 0 & 0 & 0 \\ 0,7 & 0 & 0 & 0,3 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,7 & 0 & 0,3 \end{pmatrix}
\end{array}
$$



La cadena de Markov no es irreducible al tener tres clases de equivalencia: $\{1, 2\}$ transitoria, $\{3, 4\}$ recurrente y $\{5\}$ transitoria.

✓ Cadena de Markov en tiempo discreto y diagrama de transición

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} \text{Estado} & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\
P = & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8 & 0,2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}
\end{array}
$$



La cadena de Markov es irreducible con todos los estados recurrentes.

PERIODICIDAD: El estado i tiene periodo k si $p_{ii}^{(n)} = 0$ cuando n no es divisible por k y k

es el mayor entero con esa propiedad, es decir k es el máximo común divisor del conjunto:

$$k = \text{mcd}\left\{ n \geq 0 \,\middle|\, p_{ii}^{(n)} > 0 \right\}$$

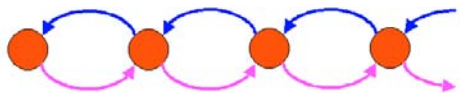
El periodo de un estado i de una cadena de Markov es el máximo común divisor del número de pasos necesarios para volver al estado i, suponiendo que se ha partido de él.

Un estado con periodo 1 se dice aperiódico.

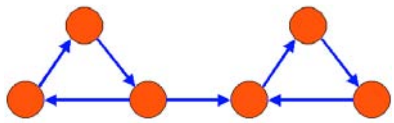
- Un estado i es ergódico si es aperiódico y recurrente positivo.

- Una cadena es ergódica si todos sus estados son ergódicos.

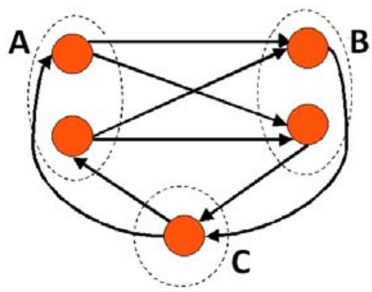
Todos los estados son periódicos de período $k = 2$



Todos los estados son periódicos de período $k = 3$

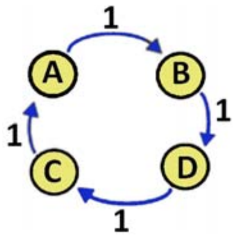


Cadena de Markov en tiempo discreto (CMTD) con período $k = 3$



Matriz y diagrama de transición de una cadena de Markov en tiempo discreto:

$$P = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$



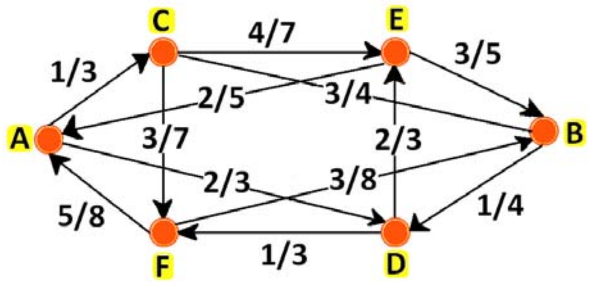
Todos los estados son periódicos con período $k = 4$

Dibujar el grafo de la cadena de Markov asociada a la matriz de transición.

$$
P = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} A & B & C & D & E & F \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 3/4 & 1/4 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 4/7 & 3/7 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & 1/3 \\
2/5 & 3/5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
5/8 & 3/8 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Solución:

La matriz representa una cadena de período 3

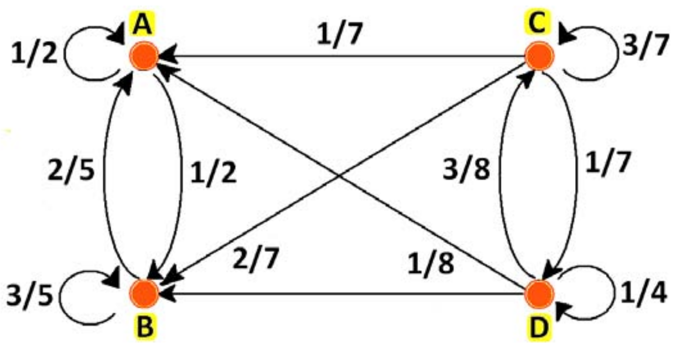


Dibujar el grafo de la cadena de Markov asociada a la matriz de transición.

$$
P = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\
\begin{pmatrix}
1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\
2/5 & 3/5 & 0 & 0 \\
1/7 & 2/7 & 3/7 & 1/7 \\
1/8 & 1/4 & 3/8 & 1/4
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Solución:

La matriz representa una cadena de período 3



CADENAS ABSORVENTES: Un estado se llama estado absorbente si, después de haber entrado ahí, el proceso nunca saldrá de él.

Por consiguiente, el estado i es un estado absorbente si y sólo si $p_{ii} = 1$.

Una cadena de Markov con espacio de estados finito se dice absorbente si se cumplen las condiciones:

- La cadena tiene al menos un estado absorbente.
- De cualquier estado no absorbente se accede a algún estado absorbente.

Denotando por A al conjunto de todos los estados absorbentes y a su complemento como D, la matriz de transición P se puede llevar a la forma:

$$P = \begin{pmatrix} \boxed{Q} & \boxed{R} \\ \boxed{0} & \boxed{I} \end{pmatrix}$$

La submatriz Q corresponde a los estados del conjunto D, I es la matriz unidad, O es la matriz nula, y R alguna submatriz.

La submatriz Q es la matriz de transición para la circulación entre los estados de absorción. La matriz fundamental para la cadena absorbente es

$$T = (I - Q)^{-1}$$

No importa dónde se encuentre la cadena, eventualmente terminará en un estado absorbente.

Sea, por ejemplo, un proceso de Markov con la siguiente matriz de transición:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} \text{Estado} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ P = & \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

El estado 2 es absorbente (por lo tanto, recurrente), porque si el proceso entra en él (tercera fila) nunca sale.

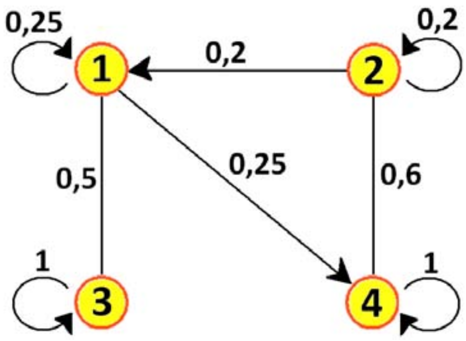
El estado 3 es transitorio porque una vez que el proceso se encuentra en él, existe una probabilidad positiva de nunca regresar. La probabilidad de que el proceso vaya del estado 3 al estado 2 en el primer paso es 1/3. Si el proceso está en el estado 2, permanece en ese estado.

Los estados 0 y 1 son recurrentes.

CADENAS REGULARES: Una cadena de Markov es regular (también primitiva o ergódica) si existe alguna potencia positiva de la matriz de transición cuyas entradas sean todas estrictamente mayores que cero.

Si una cadena es regular entonces es irreducible y no absorbente.

Sea el grafo de la cadena de Markov



Matriz de transición asociada al grafo:

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|cc} 0,25 & 0 & 0,5 & 0,25 \\ 0,2 & 0,2 & 0 & 0,6 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \end{array}$$

Q R O I

La matriz fundamental para la cadena absorbente es:

$$I - Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,25 & 0 \\ 0,2 & 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,75 & 0 \\ -0,2 & 0,8 \end{pmatrix} \quad \to \quad \left|(I-Q)^t\right| = \begin{vmatrix} 0,75 & -0,2 \\ 0 & 0,8 \end{vmatrix} = 0,6$$

$$T = (I-Q)^{-1} = \begin{pmatrix} 0,75 & 0 \\ -0,2 & 0,8 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 4/3 & 0 \\ 1/3 & 5/4 \end{pmatrix}$$

De este modo, desde el estado 2, se puede esperar visita al estado 1, 1/3 de veces antes de la absorción.

Interpretación del producto TR:

$$TR = \begin{pmatrix} 4/3 & 0 \\ 1/3 & 5/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,5 & 0,25 \\ 0 & 0,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/6 & 5/6 \end{pmatrix}$$

La segunda fila $\begin{pmatrix} 1/6 & 5/6 \end{pmatrix}$ significa que a partir del estado 2 hay una probabilidad de 1/6 de llegar en el primer estado de absorción (estado 5), y una probabilidad de 5/6 de llegar en el segundo estado de aborción (estado 6).

En un juego participan dos jugadores A y B. En cada turno del juego se lanza una moneda al aire. Si sale cara, el jugador A le da un euro al jugador B, si sale cruz, el

jugador B le da un euro al jugador A. El juego se inicia teniendo 3 euros el jugador A y 2 euros el jugador B y termina cuando uno de los dos no tenga euros.
Calcular el número medio de tiradas que tarda en acabar el juego.

Solución:

♦ Para calcular la probabilidad de fracaso del jugador A se tiene una cadena de Markov con un estado por cada posible estado de cuentas $S=\{1,2,3,4,5,0\}$

Matriz de transición asociada:

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \text{Estado} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \quad 0 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|cc} 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0,5 \\ 0,5 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0,5 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

Q R
O I

La matriz fundamental para la cadena absorbente es:

$$I-Q=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -0,5 & 0 & 0 \\ -0,5 & 1 & -0,5 & 0 \\ 0 & -0,5 & 1 & -0,5 \\ 0 & 0 & -0,5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|I-Q|=|(I-Q)^t|=0,3125$$

$$T=(I-Q)^{-1}=\begin{pmatrix} 1,6 & 1,2 & 0,8 & 0,4 \\ 1,2 & 2,4 & 1,6 & 0,8 \\ 0,8 & 1,6 & 2,4 & 1,2 \\ 0,4 & 0,8 & 1,2 & 1,6 \end{pmatrix}$$

Producto TR:

$$TR=\begin{pmatrix} 1,6 & 1,2 & 0,8 & 0,4 \\ 1,2 & 2,4 & 1,6 & 0,8 \\ 0,8 & 1,6 & 2,4 & 1,2 \\ 0,4 & 0,8 & 1,2 & 1,6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0,5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0,5 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0,4 & 0,6 \\ 0,6 & 0,4 \\ 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}$$

♦ El fracaso del jugador A está representado por el estado 0, que es el segundo estado absorbente. Se comenzó en el tercer estado transitorio (A empieza con 3) se debe observar el elemento $p_{32} = 0,4$ de TR que da la probabilidad 0,4 de que e jugador comienze con 3 euros y fracase.

♦ La probabilidad de fracaso del jugador B es el complementario, es decir, $1 - 0,4 = 0,6$. También se puede observar el elemento $p_{31} = 0,6$ de TR.

♦ Para calcular el número medio de tiradas que tarda el juego en acabar hay que sumar los números medios de etapas que estarán en cualquier estado transitorio antes de la absorción, suponiendo que se empieza en el tercer estado transitorio.

Los números medios son los que forman la tercera fila de la matriz fundamental para la cadena absorbente $T = (I - Q)^{-1}$, es decir, $0,8 + 1,6 + 2,4 + 1,2 = 6$ tiradas.

Un viajante opera en tres ciudades: Madrid, Segovia y Toledo. Con tal de evitar desplazamientos innecesarios pasa todo el día en la misma ciudad y al día siguiente, si

no tiene suficiente trabajo, se desplaza a otra ciudad.
Después de trabajar un día en Toledo, la probabilidad de tener que continuar allí al día siguiente es 0,4, la de tener que viajar a Segovia es 0,4, y la de tener que ir a Madrid es 0,2.
Si el viajante duerme un día en Segovia, con probabilidad 0,2, tendrá que seguir trabajando en la misma ciudad al día siguiente, en el 60% de los casos viajará a Toledo, mientras que irá a Madrid con probabilidad 0,2.
Si el viajante trabaja todo un día en Madrid, permanecerá en la ciudad al día siguiente con probabilidad 0,1, irá a Segovia con probabilidad 0,3, y a Toledo con probabilidad 0,6.

a) Si el viajante se encuentra hoy en Toledo, ¿cuál es la probabilidad de que tenga que trabajar en la misma ciudad al cabo de cuatro días?

b) ¿Cuáles son los porcentajes de días en los que el viajante está en cada una de las tres ciudades.

Solución:

a) La matriz de transición $P = \begin{array}{c} \\ M \\ S \\ T \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} M & S & T \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 & 0,6 \\ 0,2 & 0,2 & 0,6 \\ 0,2 & 0,4 & 0,4 \end{pmatrix} \end{array}$

Estando en Toledo, para saber con qué probabilidad se encuentra en Toledo a los cuatro días hay que calcular $p_{33}^{(4)}$

$$P = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 & 0,6 \\ 0,2 & 0,2 & 0,6 \\ 0,2 & 0,4 & 0,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/10 & 3/10 & 6/10 \\ 2/10 & 2/10 & 6/10 \\ 2/10 & 4/10 & 4/10 \end{pmatrix}$$

$$P^2 = \begin{pmatrix} 1/10 & 3/10 & 6/10 \\ 2/10 & 2/10 & 6/10 \\ 2/10 & 4/10 & 4/10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/10 & 3/10 & 6/10 \\ 2/10 & 2/10 & 6/10 \\ 2/10 & 4/10 & 4/10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19/100 & 33/100 & 48/100 \\ 18/100 & 34/100 & 48/100 \\ 18/100 & 30/100 & 52/100 \end{pmatrix}$$

$$P^4 = P^2 x\ P^2 = \begin{pmatrix} 19/100 & 33/100 & 48/100 \\ 18/100 & 34/100 & 48/100 \\ 18/100 & 30/100 & 52/100 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 19/100 & 33/100 & 48/100 \\ 18/100 & 34/100 & 48/100 \\ 18/100 & 30/100 & 52/100 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1819/10000 & 3189/10000 & 4992/10000 \\ 1818/10000 & 3190/10000 & 4992/10000 \\ 1818/10000 & 3174/10000 & \boxed{5008/10000} \end{pmatrix}$$

En Toledo se encuentra a los cuatros días con probabilidad $p_{33}^{(4)} = \dfrac{5008}{10000} = 0,5008$

b) Para calcular las probabilidades estacionarias hay que proceder de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/10 & 3/10 & 6/10 \\ 2/10 & 2/10 & 6/10 \\ 2/10 & 4/10 & 4/10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \text{ siendo } x+y+z=1$$

De donde, resulta el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{10}(x+2y+2z)=x \\ \dfrac{1}{10}(3x+2y+4z)=y \\ \dfrac{1}{10}(6x+6y+4z)=z \\ x+y+z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -9x+2y+2z=0 \\ 3x-8y+4z=0 \\ 6x+6y-6z=0 \\ x+y+z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -9x+2y+2z=0 \\ x+y-z=0 \\ x+y+z=1 \end{cases}$$

con lo que, $x=0{,}1818$, $y=0{,}3181$, $z=0{,}5$

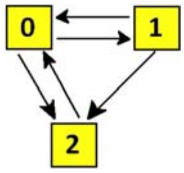
El porcentaje de días que el viajante se encuentra en cada ciudad es:
Madrid el 18%, Segovia el 32% y Toledo el 50%.

Un edifico consta de bajo y dos pisos. El ascensor del edificio realiza viajes de uno a otro piso, se conoce que el piso en el que finaliza el n-ésimo viaje del ascensor sigue una cadena de Markov, y que la mitad de los viajes que parten del bajo se dirigen a cada uno de los otros dos pisos, mientras que si un viaje comienza en el primer piso, sólo el 25% de las veces finaliza en el segundo. Finalmente, si un trayecto comienza en el segundo piso, siempre finaliza en el bajo.

a) Calcular la matriz de probabilidades de transición de la cadena

b) ¿Cuál es la probabilidad de que a largo plazo el ascensor se encuentre en cada uno de los tres pisos?

Solución:



a) Los estados de la cadena se denotan por $S=\{0,1,2\}$ haciendo corresponder el 0 al bajo y el 1 y 2 al primer y segundo piso respectivamente.

La matriz de las probabilidades de transición es:

$$P = \begin{array}{c|ccc} \text{Estado} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & p_{00} & p_{01} & p_{02} \\ 1 & p_{10} & p_{11} & p_{12} \\ 2 & p_{20} & p_{21} & p_{22} \end{array} = \begin{array}{c|ccc} \text{Estado} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 3/4 & 0 & 1/4 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

$p_{00} \equiv 0$ es la probabilidad de que el ascensor se encuentre en la planta baja si en la eatapa anterior estaba en la planta baja, evidentemente es 0 porque se supone que de etapa a etapa el ascensor se mueve.

$p_{01} \equiv 1/2$ es la probabilidad de que el ascensor se encuentre en la primera planta si en la etapa anterior estaba en la planta baja.

Así, sucesivamente, se van obteniendo las probabilidades de transición.

b) El estado estable, probabilidad a largo plazo, se determina resolviendo la ecuación $vP = v$, añadiendo la ecuación $x+y+z=1$

El sistema resultante es:

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \qquad x+y+z=1$$

$$\begin{cases} \frac{3}{4}y+z=x \\ \frac{1}{2}x=y \\ \frac{1}{2}x+\frac{1}{4}y=z \\ x+y+z=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4x-3y-4z=0 \\ x-2y=0 \\ 2x+y-4z=0 \\ x+y+z=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -5y+4z=0 \\ 3y+z=1 \\ x+y+z=1 \end{cases} \rightarrow \quad x=\frac{8}{17} \quad y=\frac{4}{17} \quad z=\frac{5}{17}$$

Una importante marca comercial de cervezas (G), preocupados en especial por su mayor competidor (H), ha contratado a un analista de operaciones para analizar su posición en el mercado. El analista piensa que el cambio de marca se puede modelar como una cadena de Markov incluyendo tres estados, los estados G y H que representan a los clientes que beben cerveza producidas por las mencionadas marcas y el estado I que representa a todas las demás marcas.
Con los datos históricos recogidos cada mes, el analista ha construido la siguiente matriz de transición:

$$\begin{array}{cc} \text{Estado} & \begin{array}{ccc} \text{G} & \text{H} & \text{I} \end{array} \\ P = \begin{array}{c} \text{G} \\ \text{H} \\ \text{I} \end{array} & \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,75 & 0,05 \\ 0,1 & 0,1 & 0,8 \end{pmatrix} \end{array}$$

¿Cuáles son los porcentajes de mercado en el estado estable para las dos grandes marcas de cerveza?

Solución:

Sea $v=(x, y, z)$, detonando por x la probabilidad de que el consumidor compre G, y de que el consumidor compre H y z la del que consumidor compre I.

El estado estable se determina resolviendo la ecuación $vP=v$, añadiendo la ecuación $x+y+z=1$

El sistema resultante es:

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,75 & 0,05 \\ 0,1 & 0,1 & 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \qquad x+y+z=1$$

$$\begin{cases} 0,7\,x+0,2\,y+0,1\,z=x \\ 0,2\,x+0,75\,y+0,1\,z=y \\ 0,1\,x+0,05\,y+0,8\,z=z \\ x+y+z=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 7\,x+2\,y+z=10\,x \\ 20\,x+75\,y+10\,z=100y \\ 10\,x+5\,y+80\,z=100z \\ x+y+z=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -3\,x+2\,y+z=0 \\ 20\,x-25\,y+10\,z=0 \\ 10\,x+5\,y-20\,z=0 \\ x+y+z=1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{c} -3\,x+2\,y+z=0 \\ 2\,x+y-4\,z=0 \\ x+y+z=1 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} 5\,y+4\,z=3 \\ \quad y+6\,z=2 \end{cases} \rightarrow \quad x=\frac{9}{26} \quad y=\frac{10}{26} \quad z=\frac{7}{26}$$

PROCESOS DE MARKOV
WinQSB

CADENAS DE MARKOV

En teoría de la probabilidad, se conoce como Cadena de Markov a un tipo especial de proceso estocástico en el que la probabilidad de que ocurra un suceso depende del suceso inmediatamente anterior. En efecto, las cadenas de este tipo tienen memoria.

Recuerdan el último suceso y esto condiciona las posibilidades de los sucesos futuros. Esta dependencia del suceso anterior distingue a las cadenas de Markov de las series de sucesos independientes, como tirar un dado al aire.

PROCESO ESTOCÁSTICO

Concepto matemático que sirve para caracterizar una sucesión de variables aleatorias (estocásticas) que evolucionan en función de otra variable, generalmente el tiempo.

Para describir y analizar un proceso de Markov, se introduce la siguiente terminología:

MATRIZ DE TRANSICIÓN EN PLAZOS

Estado: Condición particular del sistema $i = 1, 2, \dots, n$.

Se definen las variables aleatorias: $X_n \equiv$ celda ocupada en el instante n

Vector distribución: Vector fila no negativo con una entrada para cada estado del sistema.

Vector probabilidad: Vector $v = (v_1, v_2, \cdots, v_k)$ con entradas no negativas, de forma que se agregan hasta llegar a 1. Las entradas pueden representar las probabilidades de encontrar un sistema en cada uno de los estados. $v_i \geq 0$ para $i = 1, 2, \dots, n$ $\quad \sum_{i=1}^{n} v_i = 1$

El vector de distribución $v = (v_1, v_2, \cdots, v_k)$ y la matriz de transición P determinan la probabilidad para el estado de la cadena en el segundo instante de tiempo, dicha probabilidad viene dada por el vector (vP)

Distribución después del 1 paso: vP

Distribución después del 2 paso: $(vP)P = vP^2$

Distribución después del 3 paso: $(vP^2)P = vP^3$

Distribución después de n pasos: vP^n

Una notación conveniente para representar las probabilidades de transición de n pasos es la matriz de transición de n pasos:

$$P^{(n)} = \begin{pmatrix} p_{11}^{(n)} & p_{12}^{(n)} & \cdots & p_{1k}^{(n)} \\ p_{21}^{(n)} & p_{22}^{(n)} & \cdots & p_{2k}^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{k1}^{(n)} & p_{k2}^{(n)} & \vdots & p_{kk}^{(n)} \end{pmatrix}$$

La probabilidad de transición en una fila y columna dadas es la transición del estado en esa fila al estado en la columna. Cuando $n = 1$ el superíndice n no se escribe y se hace referencia a ésta como una Matriz de Transición.

Las probabilidades de transición en n pasos son las probabilidades de transición del estado i al estado j en n pasos, denotándose como:

$$p_{ij}^{(n)} = P(X_n = j \mid X_0 = i) = P(X_{n+m} = j \mid X_m = i) \text{ , por tanto, } p_{ij}^{(1)} = p_{ij}$$

Las cadenas de Markov que se analizan: $\begin{cases} \text{Número finito de estados} \\ \text{Probabilidades de transición estacionarias} \end{cases}$

Sean los posibles estados $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Las probabilidades de transición $p_{ij} = P\left[X_{n+1} = j \mid X_n = i\right]$ son estacionarias porque no dependen del instante en que se encuentre el proceso.

Matriz de transición (P): Probabilidad de que el sistema se mueva del estado i al estado j

$$P = \begin{array}{c} \text{Estados} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} & p_{15} & p_{16} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} & p_{25} & p_{26} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} & p_{35} & p_{36} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} & p_{45} & p_{46} \\ p_{51} & p_{52} & p_{53} & p_{54} & p_{55} & p_{56} \\ p_{61} & p_{62} & p_{63} & p_{64} & p_{65} & p_{66} \end{pmatrix} \end{array}$$

Según las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov, la matriz de probabilidades de transición de n pasos (P^n) se puede obtener al calcular la n-ésima potencia de la matriz de transición de un paso P: $P^{(n)} = P^n$

DISTRIBUCIÓN MARGINAL DEL PASO n-ésimo: Conocidas las probabilidades de transición en n pasos se calcula la distribución marginal del paso n-ésimo:

$$P(X_n = j) = \sum_i P(X_n = j \mid X_0 = i) = \sum_i p_{ij}^{(n)}\, \pi_i^0$$

Distribución de probabilidad inicial X_0: $\pi^0 = (\pi_0^0, \pi_1^0, \cdots, \pi_i^0, \cdots)$ con $\pi_i^0 = P(X_0 = i)$

Distribución de probabilidad en n pasos: $\pi^n = (\pi_0^n, \pi_1^n, \cdots, \pi_i^n, \cdots)$ con $\pi_i^n = P(X_n = i)$

Por tanto, $\pi^n = \pi^0 P^n$

ESTADO ESPERADO

Estado esperado en el instante n suponiendo que se parte del estado i:

$$P(X_n \mid X_0 = i) = \sum_{j=0}^{\infty} j\, P(X_n = j \mid X_0 = i) = \sum_{j=0}^{\infty} j\, p_{ij}^{(n)}$$

Estado esperado en el instante n: $P(X_n = j) = \sum_{j=0}^{\infty} j\, P(X_n = j) = \sum_{j=0}^{\infty} j \sum_i p_{ij}^{(n)}\, \pi_i^0$

VECTOR DE PROBABILIDAD ESTACIONARIO: Un vector de probabilidad π (finito o infinito numerable) se dice estacionario para una cadena de Markov en tiempo discreto (CMTD) si cualquier transición de acuerdo con la matriz P verifica: $\pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i\, p_{ij} \quad j \geq 0 \qquad \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1$

$\pi_j \equiv$ probabilidad estacionaria de estar en el estado j

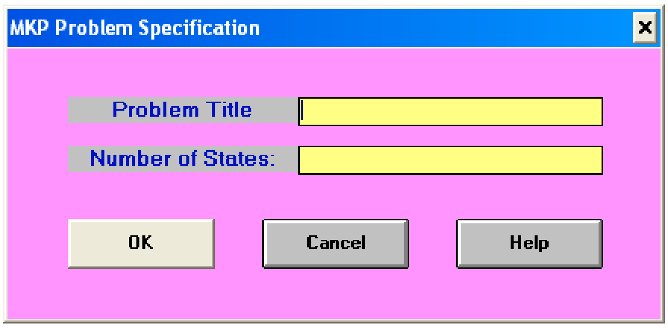
$\mu_j = \dfrac{1}{\pi_j} \equiv$ frecuencia que tarda en ser visitado el estado j

Al vector de probabilidad estacionario π también se le denomina distribución estacionaria o distribución de equilibrio.

ESTADO ESTABLE: Las cadenas de Markov poseen una propiedad notable en cuanto a que tienden a aproximarse a lo que se llama estado estable.

El estado estable se determina resolviendo la ecuación $\pi P = \pi$, añadiendo la ecuación $\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1$

WinQSB / Markov Process /Problem Specification



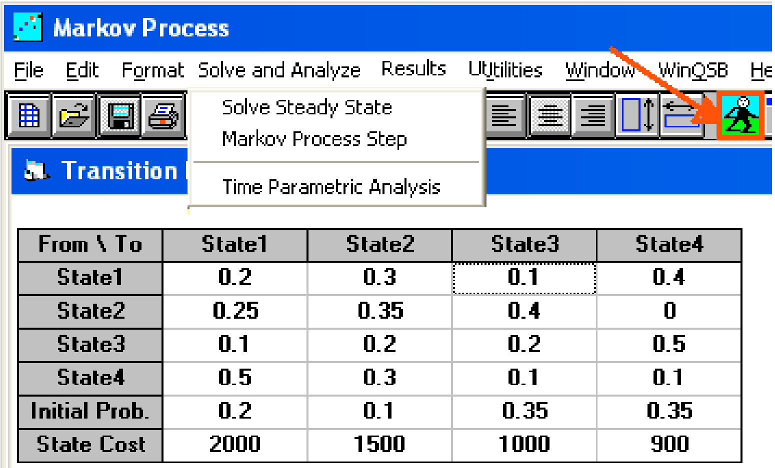
La opción Nuevo Problema (New Problem) genera una plantilla (MKP Problem Specification) donde se introducen las características del problema.

Titulo del problema (Problem Title)

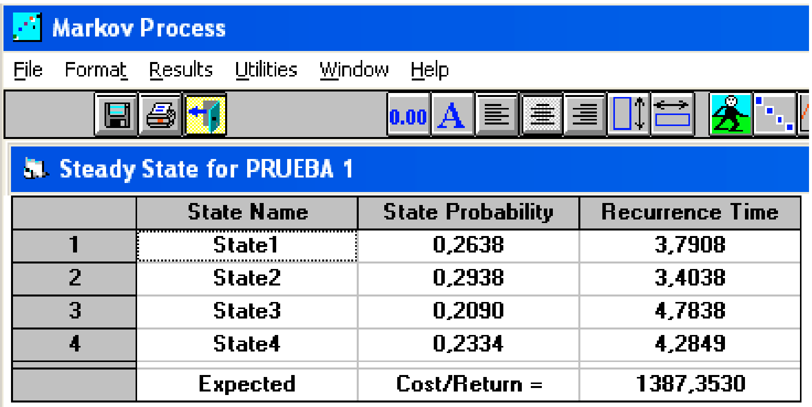
Número de estados (Number of States)

La plantilla representa una matriz con las relaciones entre los estados (State), sus probabilidades iniciales (Initial Prob.) y el costo de cada uno de ellos (State Cost).

En el menú Resolver y analizar (Solve and Analyze) figuran las opciones de Resolver los estados completos (Solve Steady State) o mostrar el Proceso de Markov por pasos (Markov Process Step).



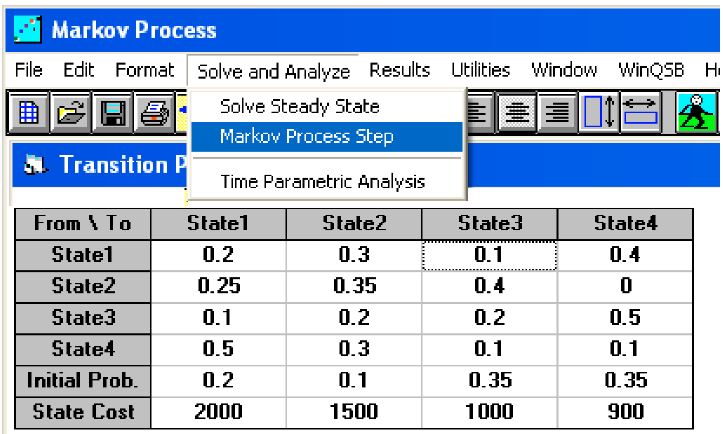
From \ To	State1	State2	State3	State4
State1	0.2	0.3	0.1	0.4
State2	0.25	0.35	0.4	0
State3	0.1	0.2	0.2	0.5
State4	0.5	0.3	0.1	0.1
Initial Prob.	0.2	0.1	0.35	0.35
State Cost	2000	1500	1000	900



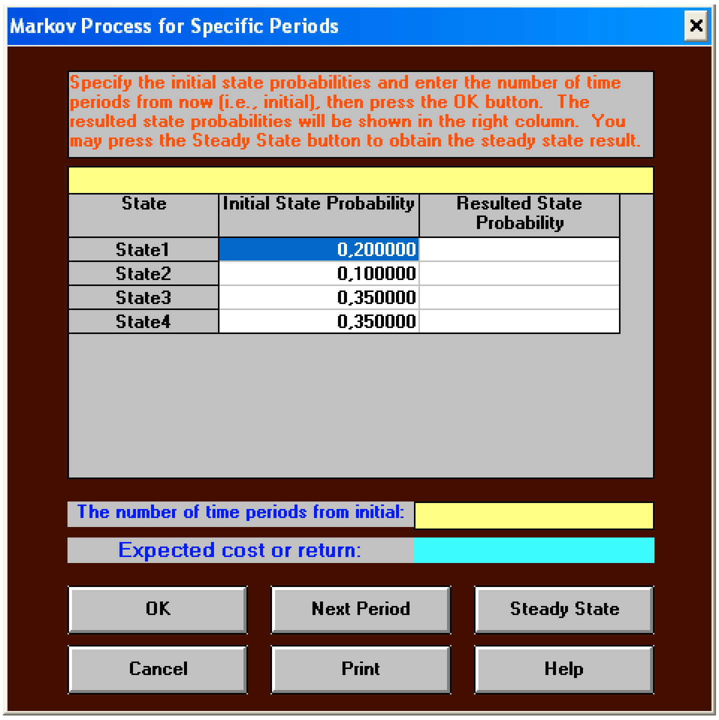
	State Name	State Probability	Recurrence Time
1	State1	0,2638	3,7908
2	State2	0,2938	3,4038
3	State3	0,2090	4,7838
4	State4	0,2334	4,2849
	Expected	Cost/Return =	1387,3530

Con la primera opción resulta una matriz final indicando las probabilidades de estado estable, lo que significa que a largo plazo el sistema estará el 26,38 % del tiempo en el estado 1, un 29,38% estará en el estado 2, 20,9 % estará en estado 3 y 23,34 % en estado 4, lo que hace que el costo medio del proceso es de 1.387,3530 euros

Desde la matriz inicial, con la opción Solve and Analyze / Markov Process Step aparece una ventana que permite controlar las iteraciones del proceso.



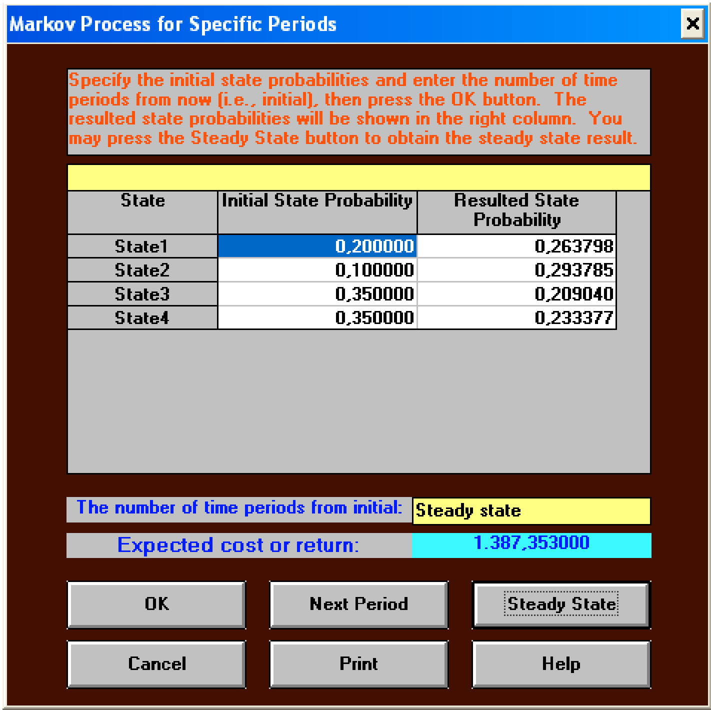
From \ To	State1	State2	State3	State4
State1	0.2	0.3	0.1	0.4
State2	0.25	0.35	0.4	0
State3	0.1	0.2	0.2	0.5
State4	0.5	0.3	0.1	0.1
Initial Prob.	0.2	0.1	0.35	0.35
State Cost	2000	1500	1000	900



Se observa Number of Time Periods from Initial (Número de periodos procesados), pulsando en el botón Next Period y luego en el botón OK.

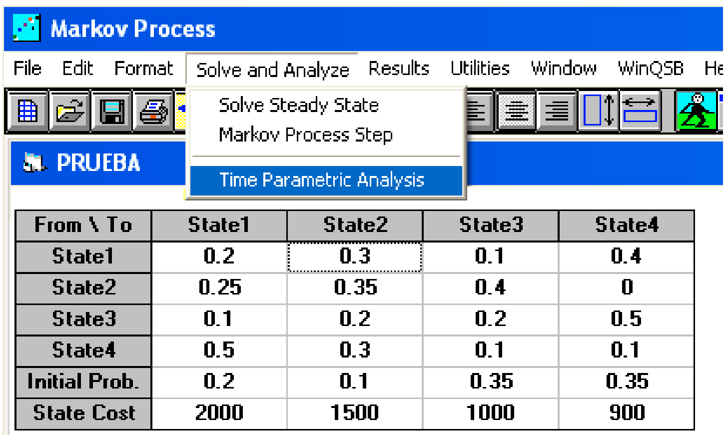
Para el periodo dos, se pulsa Next Period seguido del botón OK. Así, sucesivamente.

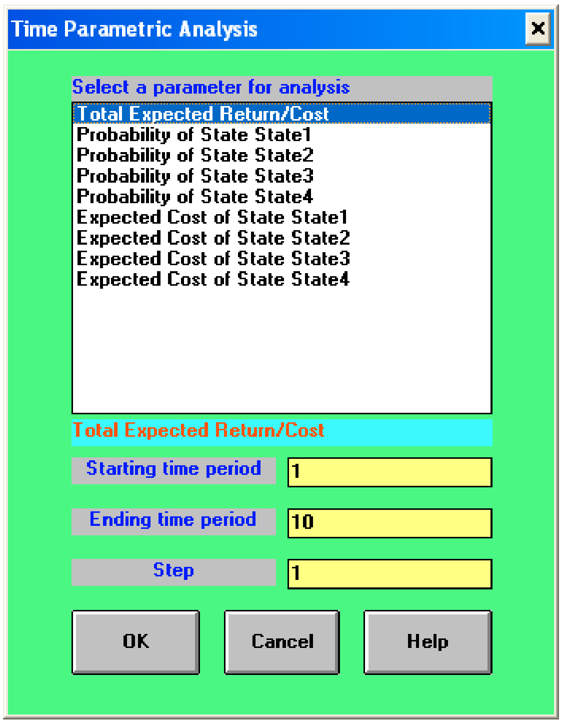
En la columna Resulted State Probability (Probabilidad del estado resultante) se muestran las probabilidades para los periodos.



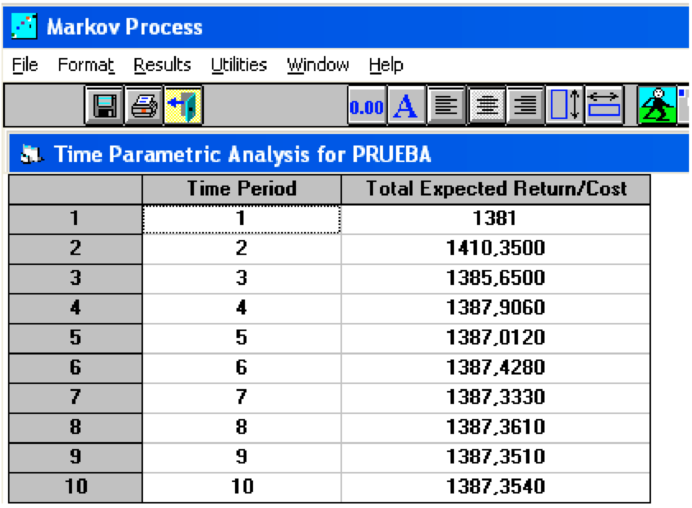
Pulsando en el botón Steady State se alcanza la matriz estable.

Con la opción
Solve and Analyze / Time Parametric Analysis
(Análisis Paramétrico en el Tiempo) aparece una nueva ventana.



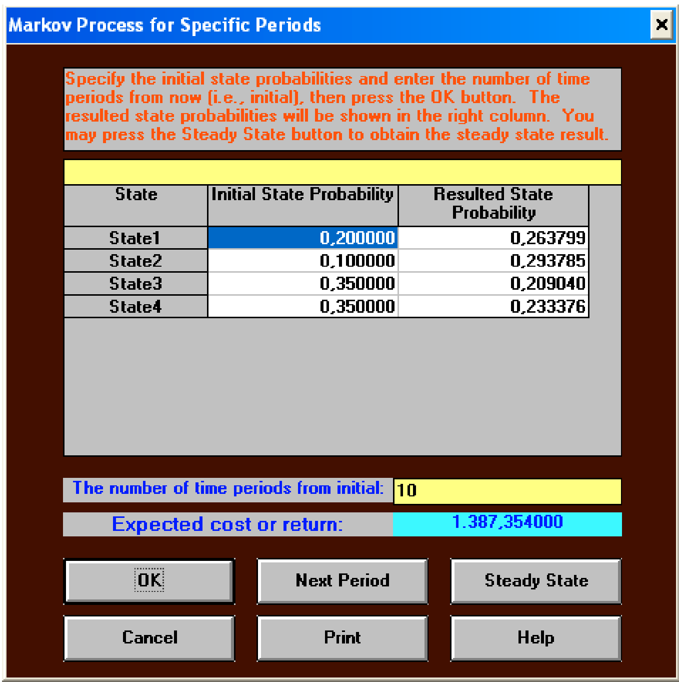


Se puede acceder a tres opciones:
Total Expected Return/Cost : Retorno/Costo total esperado
Probability of State: Probabilidad de cada estado
Expected Cost of State: Costo esperado de cada estado

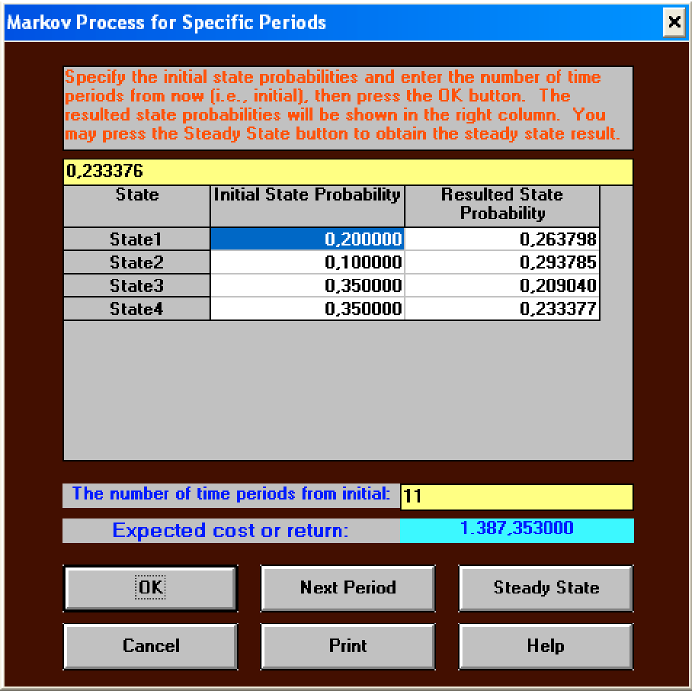


	Time Period	Total Expected Return/Cost
1	1	1381
2	2	1410,3500
3	3	1385,6500
4	4	1387,9060
5	5	1387,0120
6	6	1387,4280
7	7	1387,3330
8	8	1387,3610
9	9	1387,3510
10	10	1387,3540

Pulsando el botón OK para mostrar el Total Expected Return/Cost (Retorno/Costo total esperado) para 10 periodos (1 por periodo – Step = 1) se observa que el costo comienza a estabilizarse para los últimos periodos (recordar que el costo final es de 1.387,3530 euros).

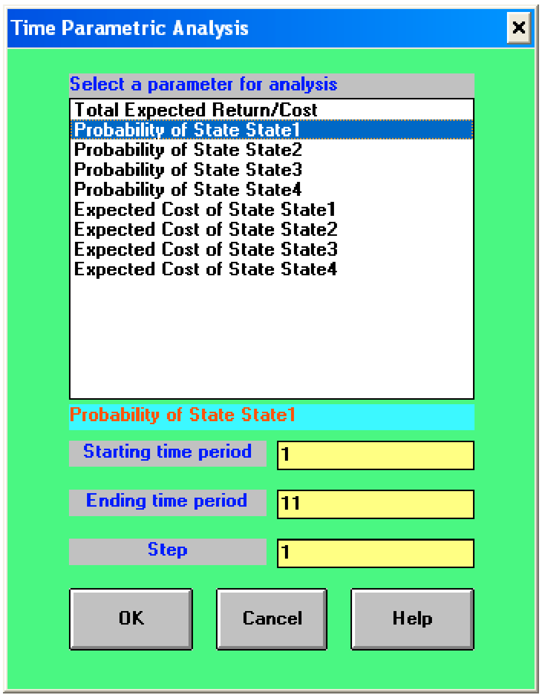


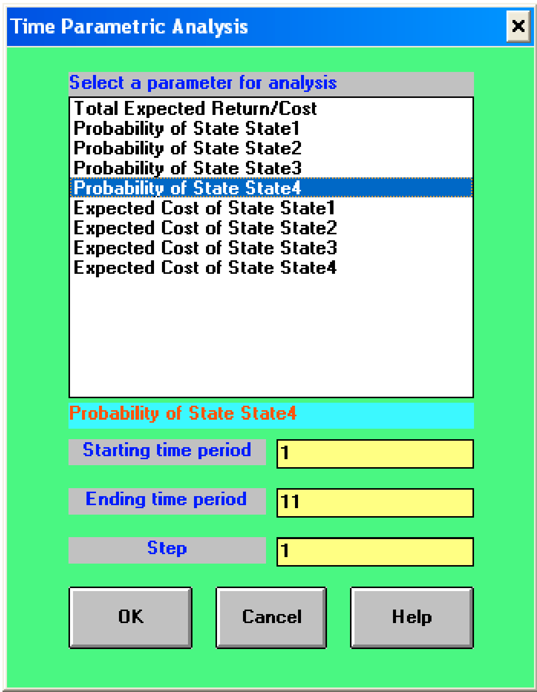
Idéntico resultado se hubiera obtenido para el período 10, pulsando Next Period.



En el período 11 se obtiene el costo final óptimo de 1.387,3530 euros.

Para conocer Probability of State (Probabilidad de cada estado) en el período 11





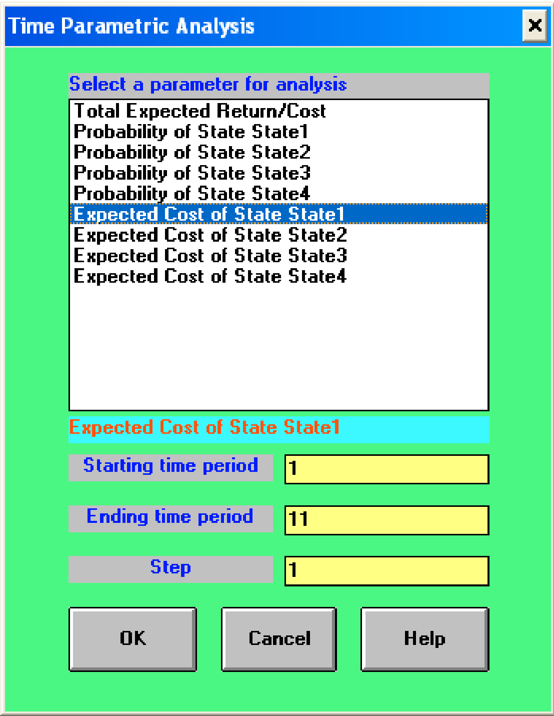
Time Parametric Analysis for PRUEBA

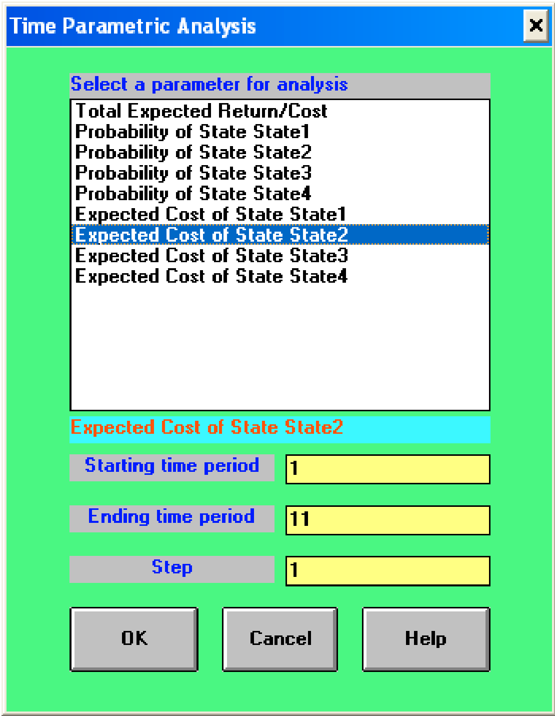
	Time Period	Probability of State State1
1	1	0,2750
2	2	0,2840
3	3	0,2615
4	4	0,2642
5	5	0,2635
6	6	0,2639
7	7	0,2638
8	8	0,2638
9	9	0,2638
10	10	0,2638
11	11	0,2638

Time Parametric Analysis for PRUEBA

	Time Period	Probability of State State4
1	1	0,2900
2	2	0,2215
3	3	0,2345
4	4	0,2325
5	5	0,2336
6	6	0,2333
7	7	0,2334
8	8	0,2334
9	9	0,2334
10	10	0,2334
11	11	0,2334

Análogamente, el Costo esperado de cada estado (Expected Cost of State) en el período 11:





Time Parametric Analysis for PRUEBA

	Time Period	Expected Cost of State State1
1	1	550
2	2	568,00
3	3	523,10
4	4	528,44
5	5	527,00
6	6	527,74
7	7	527,56
8	8	527,61
9	9	527,59
10	10	527,60
11	11	527,60

Time Parametric Analysis for PRUEBA

03-26-2022	Time Period	Expected Cost of State State2
1	1	405,00
2	2	445,50
3	3	442,65
4	4	440,80
5	5	440,63
6	6	440,67
7	7	440,68
8	8	440,68
9	9	440,68
10	10	440,68
11	11	440,68

La suma de los Costes esperados de cada estado en el período 11 asciende a 1.387,3530 euros

Se sabe que un sistema de comunicaciones falla o no dependiendo si ha fallado o no el día anterior. La probabilidad de que falle un día sabiendo que ha fallado el día anterior es de 0,6, pero si no ha fallado el día anterior es de 0,4.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el sistema falle dentro de cuatro días sabiendo que hoy no ha fallado?

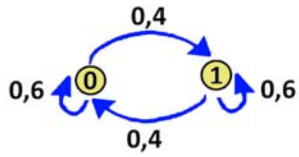
b) ¿Cuál es la probabilidad de que el sistema falle el cuarto día sabiendo que inicialmente la probabilidad de fallar es de 0,3 y la de no fallar es de 0,7?

c) ¿Cuál es el vector de probabilidades de equilibrio?

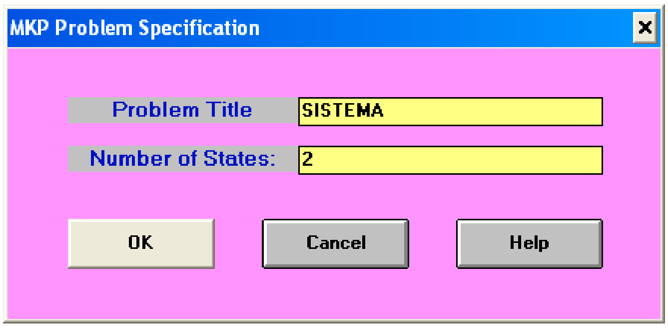
a) Sean los estados $E = \{0 \equiv \text{falla}\,,\, 1 \equiv \text{no falla}\}$

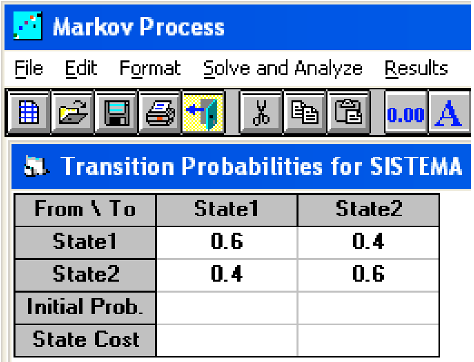
La probabilidad pedida es $p_{10}^{(4)} = P(X_4 = 0 \mid X_0 = 1)$

$$P = \begin{array}{c|cc} \text{Estado} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0{,}6 & 0{,}4 \\ 1 & 0{,}4 & 0{,}6 \end{array}$$

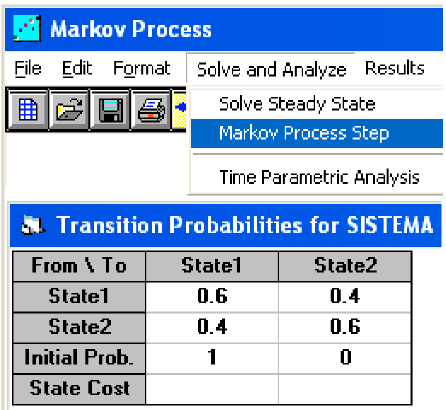


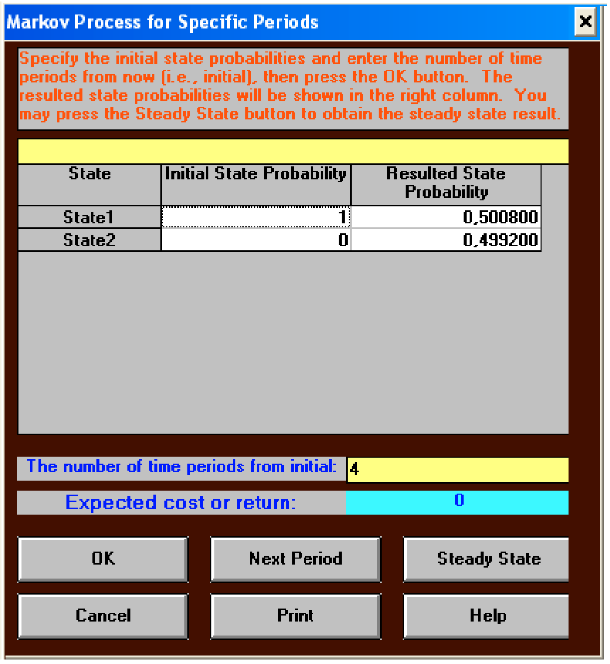
WinQSB / Markov Process /Problem Specification

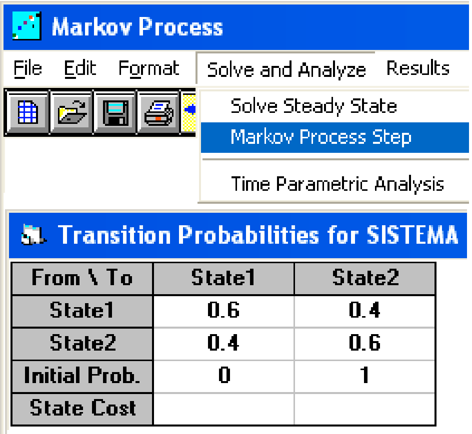




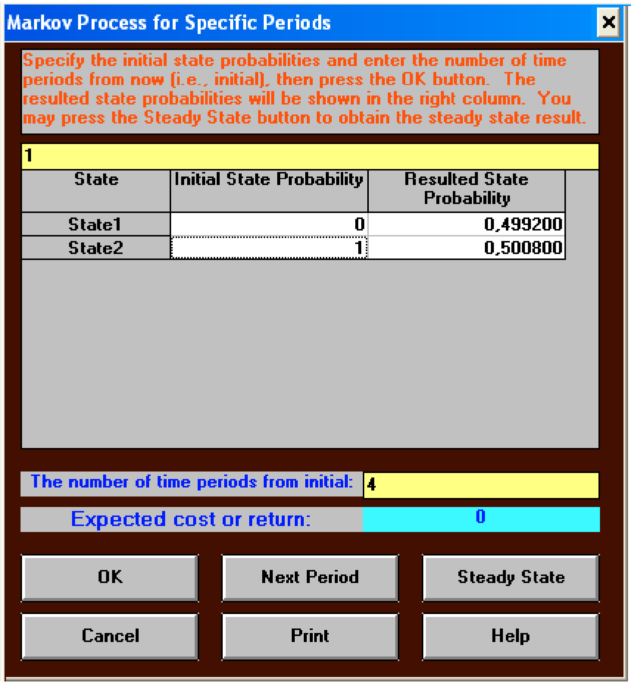
La matriz de transición en el período 4: $P^{(4)} = P^4 = \begin{pmatrix} p_{11}^{(4)} & p_{12}^{(4)} \\ p_{21}^{(4)} & p_{22}^{(4)} \end{pmatrix}$







From \ To	State1	State2
State1	0.6	0.4
State2	0.4	0.6
Initial Prob.	0	1
State Cost		



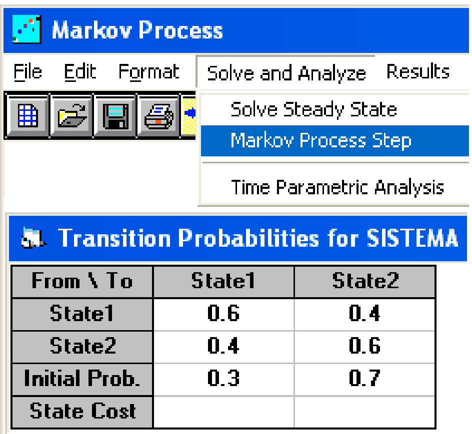
State	Initial State Probability	Resulted State Probability
State1	0	0,499200
State2	1	0,500800

Matriz de transición en el período 4: $P^4 = \begin{pmatrix} 0,5008 & 0,4992 \\ \boxed{0,4992} & 0,5008 \end{pmatrix}$ $\qquad p_{10}^4 = 0,4992$

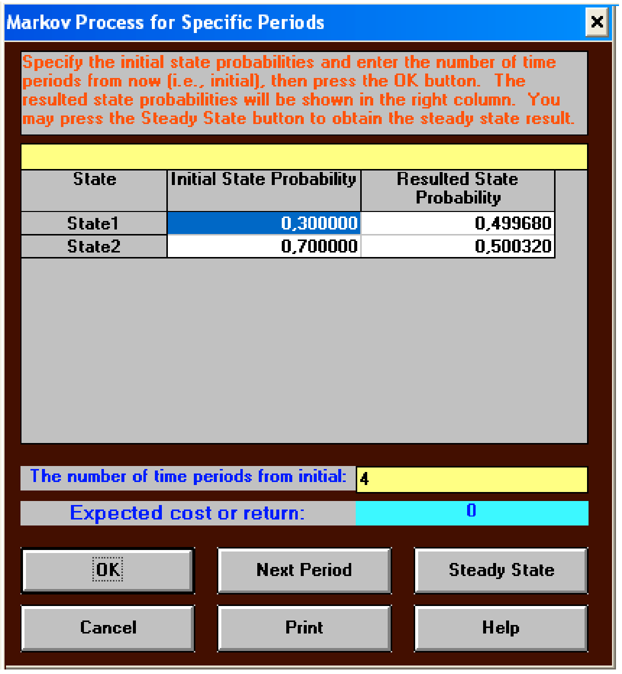
b) La distribución de probabilidad inicial es $\pi^0 = (0,3\ ,\ 0,7)$ y la distribución de probabilidad en 4 pasos será $\pi^4 = \pi^0\, P^4$

$$\pi^4 = (\pi_0^4, \pi_1^4) = \pi^0\, P^4 = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,5008 & 0,4992 \\ 0,4992 & 0,5008 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,49968 & 0,50032 \end{pmatrix}$$

$$\pi^4 = (\pi_0^4, \pi_1^4) = (0,49968, 0,50032) \;\;\rightarrow\;\; P(X_4 = 0) = \pi_0^4 = 0,49968$$



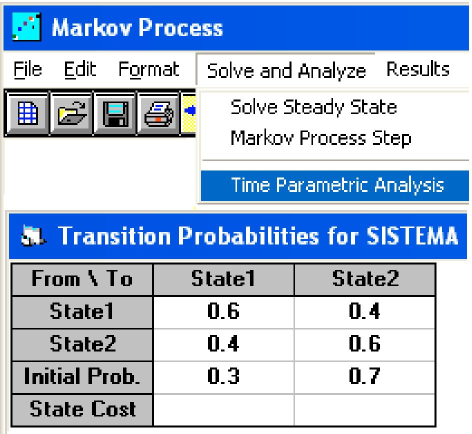
From \ To	State1	State2
State1	0.6	0.4
State2	0.4	0.6
Initial Prob.	0.3	0.7
State Cost		



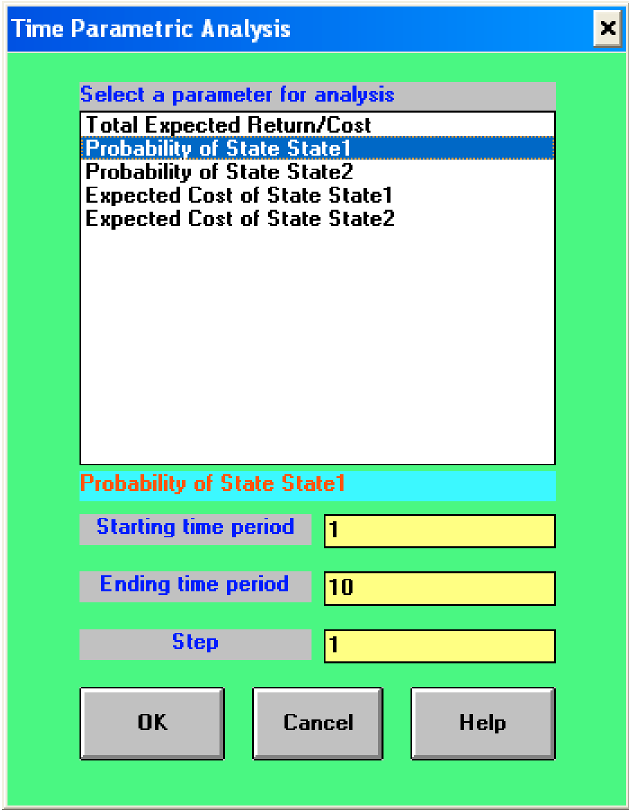
State	Initial State Probability	Resulted State Probability
State1	0,300000	0,499680
State2	0,700000	0,500320

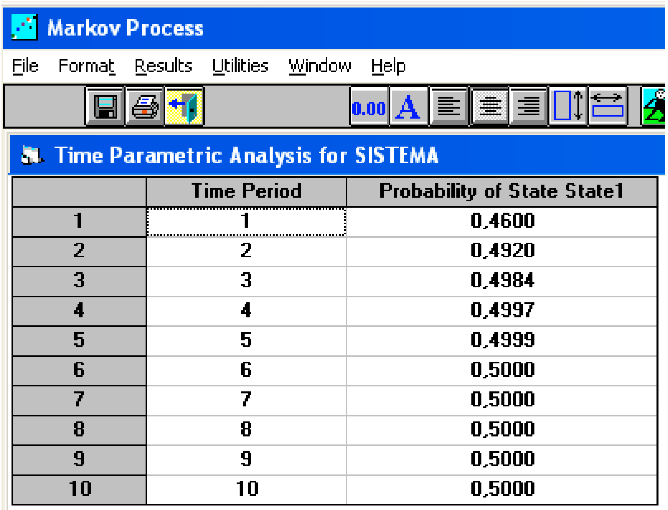
c) Para encontrar el vector de probabilidades de equilibrio hay que tener la matriz a largo plazo de la transición.

Con la opción Solve and Analyze / Time Parametric Analysis (Análisis Paramétrico en el Tiempo)



From \ To	State1	State2
State1	0.6	0.4
State2	0.4	0.6
Initial Prob.	0.3	0.7
State Cost		

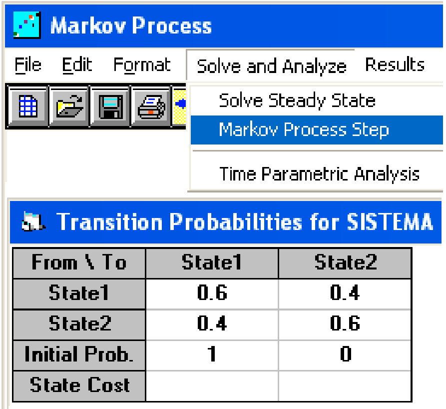


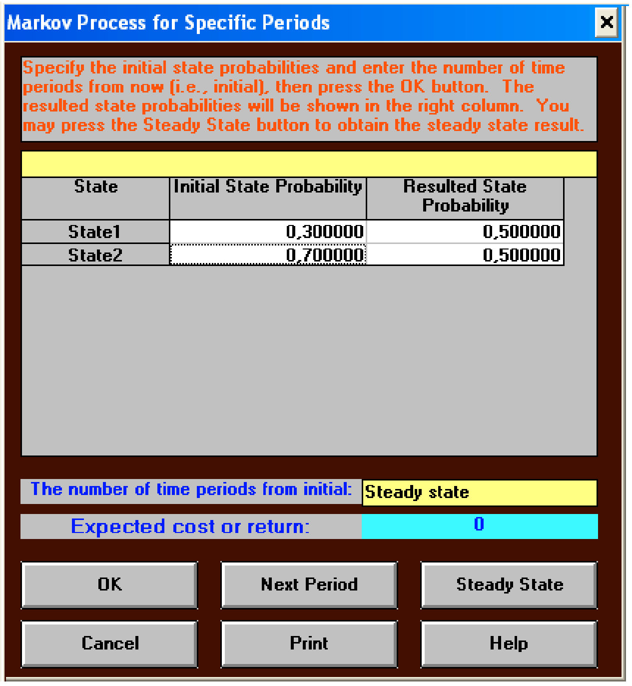


	Time Period	Probability of State State1
1	1	0,4600
2	2	0,4920
3	3	0,4984
4	4	0,4997
5	5	0,4999
6	6	0,5000
7	7	0,5000
8	8	0,5000
9	9	0,5000
10	10	0,5000

Análogamente para la Probabilidad del estado 2.

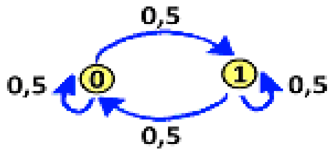
También se alcanza la matriz estable con la opción Solve and Analyze / Markov Process Step / Steady State





Matriz de transición a largo plazo:

$$\tilde{P} = \lim_{n\to\infty} P^n = \lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$$



El único vector de probabilidades de equilibrio se expresa por $\tilde{\pi} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$ de modo que,

$$\tilde{\pi} P = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} = \tilde{\pi}$$

Un viajante opera en tres ciudades: Madrid, Segovia y Toledo. Con tal de evitar desplazamientos innecesarios pasa todo el día en la misma ciudad y al día siguiente, si no tiene suficiente trabajo, se

Después de trabajar un día en Toledo, la probabilidad de tener que continuar allí al día siguiente es 0,4, la de tener que viajar a Segovia es 0,4, y la de tener que ir a Madrid es 0,2.
Si el viajante duerme un día en Segovia, con probabilidad 0,2, tendrá que seguir trabajando en la misma ciudad al día siguiente, en el 60% de los casos viajará a Toledo, mientras que irá a Madrid con

Si el viajante trabaja todo un día en Madrid, permanecerá en la ciudad al día siguiente con probabilidad 0,1, irá a Segovia con probabilidad 0,3, y a Toledo con probabilidad 0,6.

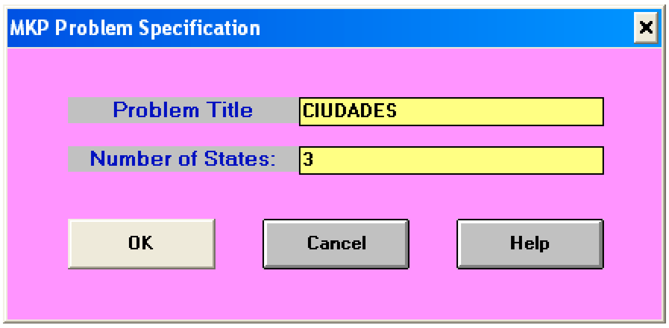
a) Si el viajante se encuentra hoy en Toledo, ¿cuál es la probabilidad de que tenga que trabajar en la misma ciudad al cabo de cuatro días?

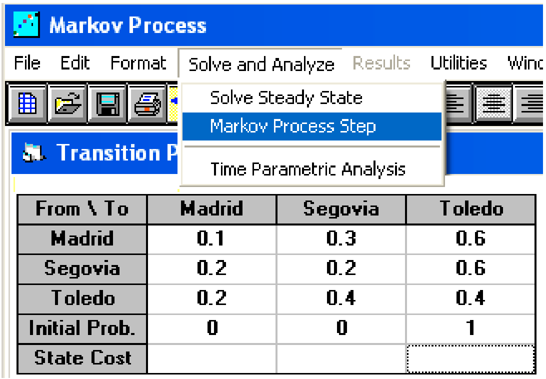
b) ¿Cuáles son los porcentajes de días en los que el viajante está en cada una de las tres ciudades?

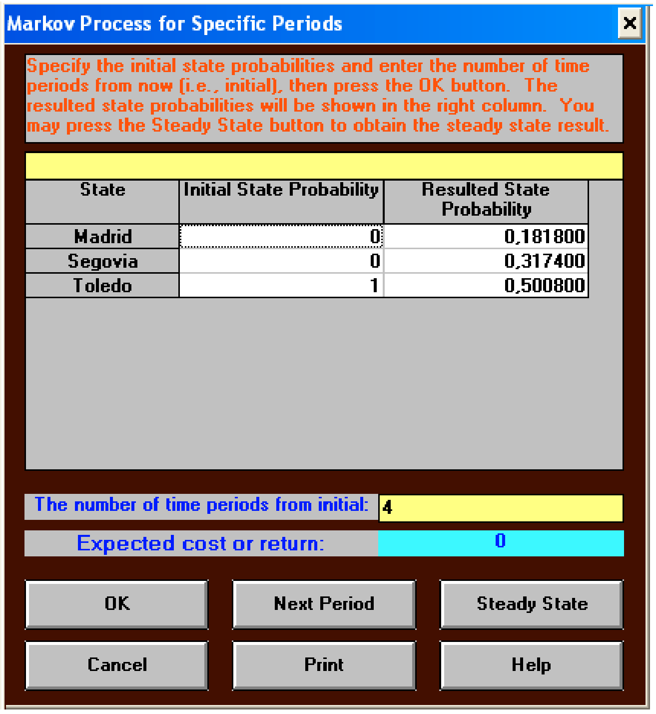
a) Matriz de transición $P = \begin{array}{c} \\ M \\ S \\ T \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} M & S & T \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 & 0,6 \\ 0,2 & 0,2 & 0,6 \\ 0,2 & 0,4 & 0,4 \end{pmatrix} \end{array}$

Estando en Toledo, para saber con qué probabilidad se encuentra en Toledo a los cuatro días hay que calcular $p_{33}^{(4)}$

WinQSB / Markov Process /Problem Specification



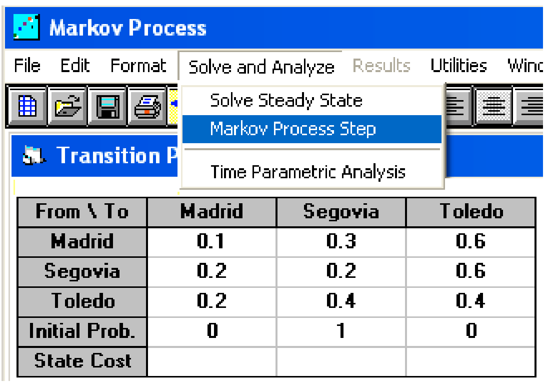


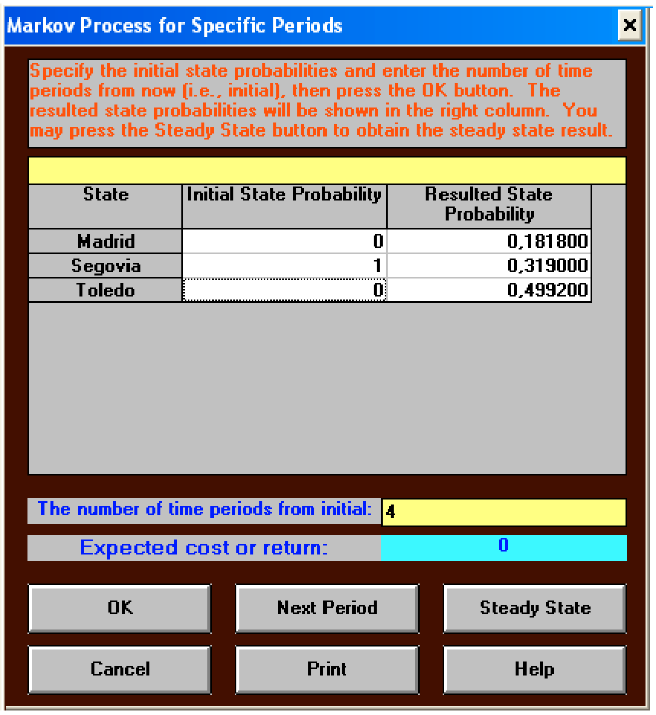


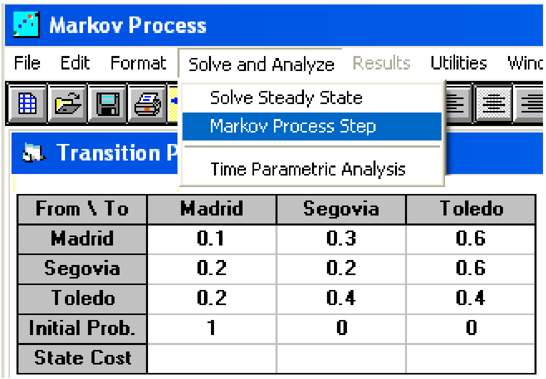
$$\text{Matriz de transición } P^4 = \begin{array}{c} \\ M \\ S \\ T \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} M & S & T \end{array} \\ \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ 0,1818 & 0,3174 & 0,5008 \end{pmatrix} \end{array}$$

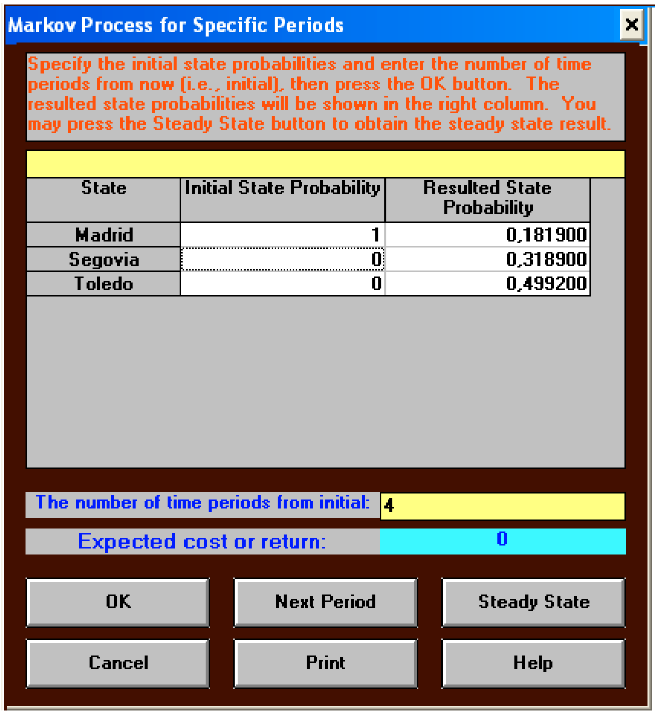
En Toledo se encuentra a los cuatros días con probabilidad $p_{33}^{(4)} = 0,5008$

Para calcular la matriz de transición en el periodo 4, se tiene:



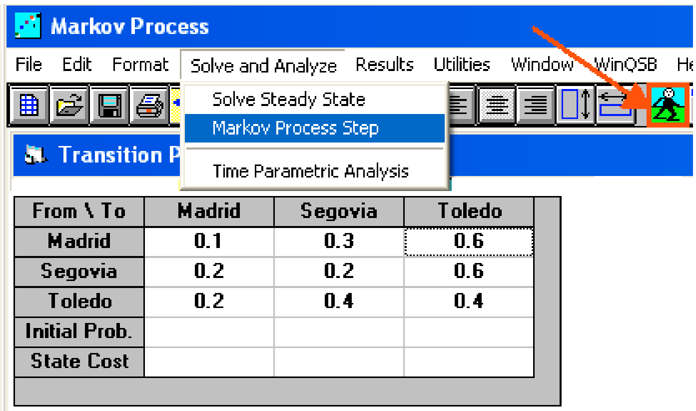




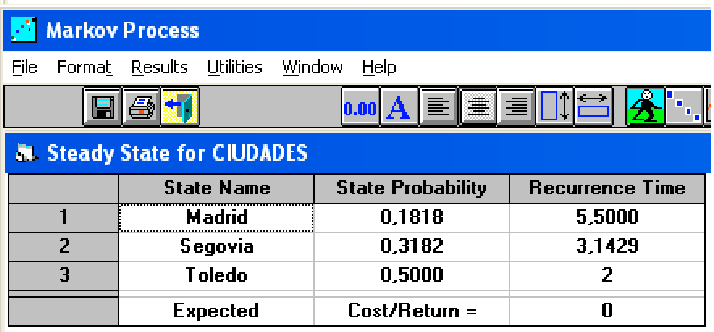


$$
\text{Matriz de transición } P^4 = \begin{array}{c} \\ M \\ S \\ T \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} \quad M \quad & \quad S \quad & \quad T \quad \end{array} \\
\begin{pmatrix} 0{,}1819 & 0{,}3189 & 0{,}4992 \\ 0{,}1818 & 0{,}3190 & 0{,}4992 \\ 0{,}1818 & 0{,}3174 & 0{,}5008 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

b) Para calcular las probabilidades estacionarias



Presionando el botón de Solve the Problem o bien con la opción Solve and Analyze / Markov Process Step / Steady State



El porcentaje de que el viajante se encuentre en cada ciudad es: Madrid el 18,18%, Segovia el 31,82% y Toledo el 50%.

Para calcular las probabilidades estacionarias se plantea la ecuación matricial:

$$
\pi P = \pi \quad \rightarrow \quad (x \quad y \quad z)\begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}6 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}4 \end{pmatrix} = (x \quad y \quad z) \quad \text{siendo } x + y + z = 1
$$

Resulta el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 0{,}1\,.\,(x+2y+2z)=x \\ 0{,}1\,.\,(3x+2y+4z)=y \\ 0{,}1\,.\,(6x+6y+4z)=z \\ x+y+z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -9x+2y+2z=0 \\ 3x-8y+4z=0 \\ 6x+6y-6z=0 \\ x+y+z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -9x+2y+2z=0 \\ x+y-z=0 \\ x+y+z=1 \end{cases}$$

con lo que, $x=0{,}1818$, $y=0{,}3182$, $z=0{,}5$

Instrumentos Estadísticos Avanzados
Facultad Ciencias Económicas y Empresariales
Departamento de Economía Aplicada
Profesor: Santiago de la Fuente Fernández