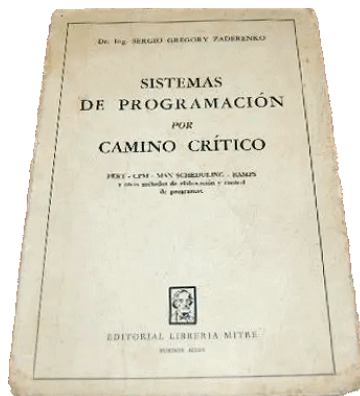


GESTIÓN DE PROYECTOS: ALGORITMO MATRICIAL DE ZADERENKO



Sergio Gregory Zaderenko (1968) propuso un método matricial del cálculo de los tiempos T_1 o Early y T_2 o Last con aplicación para grafos grandes y pequeños.

Definidas las actividades de un proyecto en semanas, se tiene:

Actividad	Actividad Precedente	Actividad Siguiente	Tiempo optimista (a)	Tiempo más probable (m)	Tiempo pesimista (b)
A	----	C, D	1	2	3
B	----	E, F	1	2	9
C	A	E, F	4	7	10
D	A	F	2	8	14
E	B, C	H	1	2	9
F	B, C, D	G, J	5	8	17
G	F	I	4	7	16
H	E	----	0	2	4
I	G, J	----	2	2	2
J	F	I	7	9	17

Calcular la matriz de Zaderenko

Solución:

Se calcula el tiempo esperado (tiempo Pert) de cada actividad:

$$t_e(A) = \frac{a + 4m + b}{6} = \frac{1 + 4 \times 2 + 3}{6} = 2$$

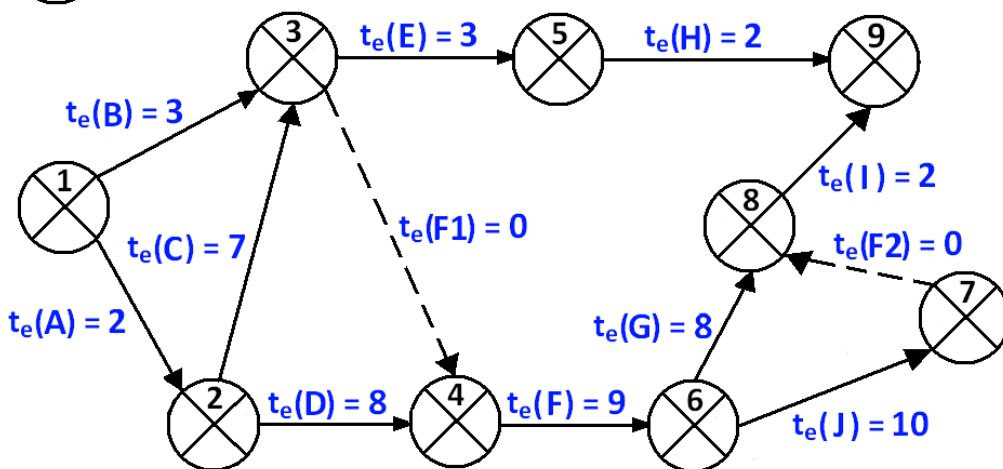
$$t_e(B) = \frac{a + 4m + b}{6} = \frac{1 + 4 \times 2 + 9}{6} = 3$$

$$t_e(C) = \frac{a + 4m + b}{6} = \frac{4 + 4 \times 7 + 10}{6} = 7$$

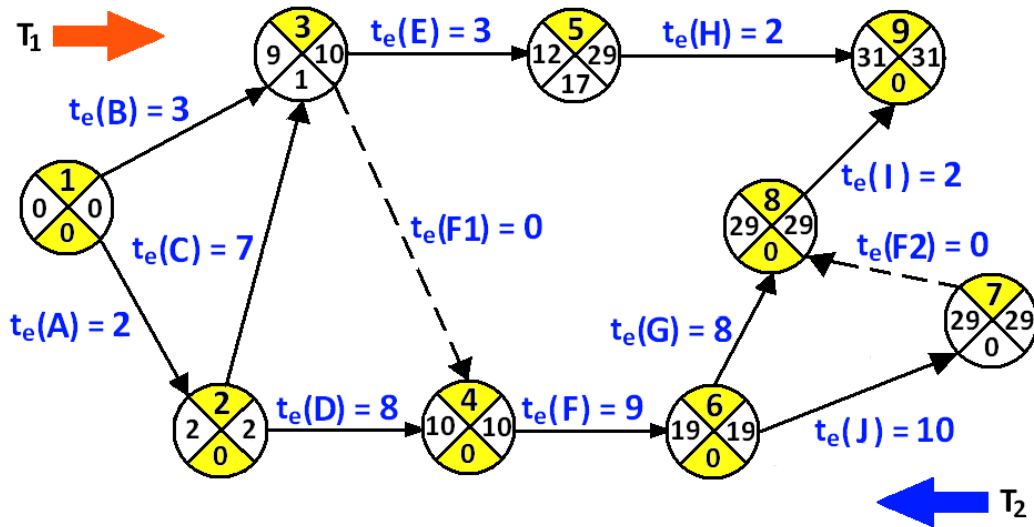
$$\dots t_e(J) = \frac{a + 4m + b}{6} = \frac{7 + 4 \times 9 + 17}{6} = 10$$



T_1 = tiempo early T_2 = tiempo last H = holgura = $T_2 - T_1$



La matriz de Zaderenko se elabora con las duraciones de las actividades, se comienza relleno la columna de las actividades T_1 (Tiempo más temprano de un suceso, Early) de derecha a izquierda y la fila T_2 (Tiempo más tardío de realización de un suceso, Last) de izquierda a derecha.



MATRIZ DE ZADERENKO

Se rellena la matriz con las duraciones de las actividades y se comienza relleno la columna de las actividades T_1 (Tiempo más temprano de un suceso, Early).

PRIMERA ACTIVIDAD: El primer tiempo T_1 es cero.

SEGUNDA ACTIVIDAD: Para calcular el segundo elemento T_1 se elige la columna del elemento que se esta calculando (2) y para cada celda con valor se realiza el cálculo: $T_1 + \text{duración de la actividad} = 0 + 2 = 2$

	T_1	t_e	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	0	1	*	2	3						
$0 + 2 = 2$	2	2		*	7	8					
		3			*	0	3				
		4				*		9			
		5					*				2
		6						*	10	8	
		7							*	0	
		8								*	2
		9									*
	T_2										

TERCERA ACTIVIDAD: Para calcular el tercer elemento T_1 se elige la columna del elemento que se esta calculando (3), observando las celdas que tienen valor se tienen dos tiempos, y se realiza el cálculo:

$$T_1 + \text{duración de la actividad} = 0 + 3 = 3$$

$$T_1 + \text{duración de la actividad} = 2 + 7 = 9$$

Se introduce el tiempo mayor que es 9

	T_1	t_e	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	0	1	*	2	3						
$0+2=2$	2	2		*	7	8					
$0+3=3$ $2+7=9$	9	3			*	0	3				
		4				*		9			
		5					*				2
		6						*	10	8	
		7							*	0	
		8								*	2
		9									*
	T_2										

CUARTA ACTIVIDAD: Para calcular el cuarto elemento de T_1 se elige la columna del elemento que se esta calculando (4), hay dos celdas que tienen valor, se introduce el mayor tiempo: $T_1 + \text{duración de la actividad} = 2 + 8 = 10$

	T_1	t_e	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	0	1	*	2	3						
$0+2=2$	2	2		*	7	8					
$0+3=3$ $2+7=9$	9	3			*	0	3				
$2+8=10$ $9+0=9$	10	4				*		9			
		5					*				2
		6						*	10	8	
		7							*	0	
		8								*	2
		9									*
	T_2										

QUINTA ACTIVIDAD: Para calcular el quinto elemento de T_1 se elige la columna del elemento que se esta calculando (5), hay una celda que tiene valor, se realiza el cálculo:

$$T_1 + \text{duración de la actividad} = 9 + 3 = 12$$

	T_1	t_e	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	0	1	*	2	3						
$0 + 2 = 2$	2	2		*	7	8					
$0 + 3 = 3$ $2 + 7 = 9$	9	3			*	0	3				
$2 + 8 = 10$ $9 + 0 = 9$	10	4				*		9			
$9 + 3 = 12$	12	5					*				2
		6						*	10	8	
		7							*	0	
		8								*	2
		9									*
	T_2										

SEXTA ACTIVIDAD: Para calcular el sexto elemento de T_1 se elige la columna del elemento que se esta calculando (6), hay solo una celda tiene valor, se realiza el cálculo:

$$T_1 + \text{duración de la actividad} = 10 + 9 = 19$$

	T_1	t_e	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	0	1	*	2	3						
$0 + 2 = 2$	2	2		*	7	8					
$0 + 3 = 3$ $2 + 7 = 9$	9	3			*	0	3				
$2 + 8 = 10$ $9 + 0 = 9$	10	4				*		9			
$9 + 3 = 12$	12	5					*				2
$10 + 9 = 19$	19	6						*	10	8	
		7							*	0	
		8								*	2
		9									*
	T_2										

SÉPTIMA ACTIVIDAD: Para calcular el séptimo elemento de T_1 se elige la columna del elemento que se está calculando (7), hay una celda que tiene valor, se realiza el cálculo: $T_1 + \text{duración de la actividad} = 19 + 10 = 29$

	T_1	t_e	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	0	1	*	2	3						
$0 + 2 = 2$	2	2		*	7	8					
$0 + 3 = 3$ $2 + 7 = 9$	9	3			*	0	3				
$2 + 8 = 10$ $9 + 0 = 9$	10	4				*		9			
$9 + 3 = 12$	12	5					*				2
$10 + 9 = 19$	19	6						*	10	8	
$19 + 10 = 29$	29	7							*	0	
		8								*	2
		9									*
		T_2									

OCTAVA ACTIVIDAD: Para calcular el séptimo elemento de T_1 se elige la columna del elemento que se está calculando (8), hay dos celdas que tienen valor, se introduce el mayor tiempo: $T_1 + \text{duración de la actividad} = 29 + 0 = 29$

	T_1	t_e	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	0	1	*	2	3						
$0 + 2 = 2$	2	2		*	7	8					
$0 + 3 = 3$ $2 + 7 = 9$	9	3			*	0	3				
$2 + 8 = 10$ $9 + 0 = 9$	10	4				*		9			
$9 + 3 = 12$	12	5					*				2
$10 + 9 = 19$	19	6						*	10	8	
$19 + 10 = 29$	29	7							*	0	
$19 + 8 = 27$ $29 + 0 = 29$	29	8								*	2
		9									*
		T_2									

NOVENA ACTIVIDAD: Para calcular el séptimo elemento de T_1 se elige la columna del elemento que se está calculando (9), hay dos celdas que tienen valor, se introduce el mayor tiempo: $T_1 + \text{duración de la actividad} = 29 + 2 = 31$

	T_1	t_e	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	0	1	*	2	3						
$0 + 2 = 2$	2	2		*	7	8					
$0 + 3 = 3$ $2 + 7 = 9$	9	3			*	0	3				
$2 + 8 = 10$ $9 + 0 = 9$	10	4				*		9			
$9 + 3 = 12$	12	5					*				2
$10 + 9 = 19$	19	6						*	10	8	
$19 + 10 = 29$	29	7							*	0	
$19 + 8 = 27$ $29 + 0 = 29$	29	8								*	2
$12 + 2 = 14$ $29 + 2 = 31$	31	9									*
	T_2										

📖 Se completa la matriz de Zaderenko calculando T_2 (Tiempo más tardío de realización de un suceso, Last) de izquierda a derecha. Se elige el menor valor.

FILA 9: Se copia el último tiempo T_1

T_1	t_e	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	*	2	3						
2	2		*	7	8					
9	3			*	0	3				
10	4				*		9			
12	5					*				2
19	6						*	10	8	
29	7							*	0	
29	8								*	2
31	9									*
	T_2									31

FILA 8: La actividad 9 tiene el valor 2: $31 - 2 = 29$

T_1	t_e	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	*	2	3						
2	2		*	7	8					
9	3			*	0	3				
10	4				*		9			
12	5					*				2
19	6						*	10	8	
29	7							*	0	
29	8								*	2
31	9									*
	T_2								29	31

FILA 7: La actividad 8 tiene el valor 0: $29 - 0 = 29$

T ₁	t _e	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	*	2	3						
2	2		*	7	8					
9	3			*	0	3				
10	4				*		9			
12	5					*				2
19	6						*	10	8	
29	7							*	0	
29	8								*	2
31	9									*
	T ₂							29	29	31

FILA 6: Hay dos actividades (actividad 8 y actividad 7)

Menor ($29 - 8 = 21$ $29 - 10 = 19$) → 19

T ₁	t _e	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	*	2	3						
2	2		*	7	8					
9	3			*	0	3				
10	4				*		9			
12	5					*				2
19	6						*	10	8	
29	7							*	0	
29	8								*	2
31	9									*
	T ₂						19	29	29	31

FILA 5: La actividad 9 tiene el valor 2: $31 - 2 = 29$

T ₁	t _e	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	*	2	3						
2	2		*	7	8					
9	3			*	0	3				
10	4				*		9			
12	5					*				2
19	6						*	10	8	
29	7							*	0	
29	8								*	2
31	9									*
	T ₂					29	19	29	29	31

FILA 4: La actividad 6 tiene el valor 9: $19 - 9 = 10$

T ₁	t _e	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	*	2	3						
2	2		*	7	8					
9	3			*	0	3				
10	4				*		9			
12	5					*				2
19	6						*	10	8	
29	7							*	0	
29	8								*	2
31	9									*
	T ₂				10	29	19	29	29	31

FILA 3: Hay dos actividades (actividad 5 y actividad 4)

Menor ($29 - 3 = 26$ $10 - 0 = 10$) $\rightarrow 10$

T_1	t_e	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	*	2	3						
2	2		*	7	8					
9	3			*	0	3				
10	4				*		9			
12	5					*				2
19	6						*	10	8	
29	7							*	0	
29	8								*	2
31	9									*
	T_2			10	10	29	19	29	29	31

FILA 2: Hay dos actividades (actividad 4 y actividad 3)

Menor ($10 - 8 = 2$ $10 - 7 = 3$) $\rightarrow 2$

T_1	t_e	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	*	2	3						
2	2		*	7	8					
9	3			*	0	3				
10	4				*		9			
12	5					*				2
19	6						*	10	8	
29	7							*	0	
29	8								*	2
31	9									*
	T_2		2	10	10	29	19	29	29	31

FILA 1: Hay dos actividades (actividad 3 y actividad 2)

Menor ($10 - 3 = 7$ $2 - 2 = 0$) $\rightarrow 0$

T ₁	t _e	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	*	2	3						
2	2		*	7	8					
9	3			*	0	3				
10	4				*		9			
12	5					*				2
19	6						*	10	8	
29	7							*	0	
29	8								*	2
31	9									*
	T ₂	0	2	10	10	29	19	29	29	31

Finalmente, los tiempos Early y Last son:

T ₁	t _e	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	*	2	3						
2	2		*	7	8					
9	3			*	0	3				
10	4				*		9			
12	5					*				2
19	6						*	10	8	
29	7							*	0	
29	8								*	2
31	9									*
	T ₂	0	2	10	10	29	19	29	29	31

📁 Calcular los tiempos Early y Last por la matriz de Zaderenko, siendo la red del proyecto:

	T ₁	t _e	1	2	3	4	5	6	7	8
	0	1	*	5	8	4				
0 + 5 = 5	5	2		*	0			10		
		3			*	0	6			
		4				*	7			
		5					*	8	12	
		6						*		10
		7							*	9
		8								*
		T ₂								

Solución:

📖 Se rellena la matriz con las duraciones de las actividades y se comienza relleno la columna de las actividades T₁ (Tiempo más temprano de un suceso, Early). Se elige el mayor valor.

PRIMERA ACTIVIDAD: El primer tiempo T₁ es cero.

SEGUNDA ACTIVIDAD: Para calcular el segundo elemento T₁ se elige la columna del elemento que se esta calculando (2) y para cada celda con valor se realiza el cálculo: T₁ + duración de la actividad = 0 + 5 = 5

	T ₁	t _e	1	2	3	4	5	6	7	8
	0	1	*	5	8	4				
0 + 5 = 5	5	2		*	0			10		
		3			*	0	6			
		4				*	7			
		5					*	8	12	
		6						*		10
		7							*	9
		8								*
		T ₂								

TERCERA ACTIVIDAD: Para calcular el tercer elemento T_1 se elige la columna del elemento que se esta calculando (3) y para cada celda con valor se realiza el cálculo: T_1 + duración de la actividad. Se elige el mayor valor.

	T_1	t_e	1	2	3	4	5	6	7	8
	0	1	*	5	8	4				
$0+5=5$	5	2		*	0			10		
$0+8=8$ $5+0=5$	8	3			*	0	6			
		4				*	7			
		5					*	8	12	
		6						*		10
		7							*	9
		8								*
		T_2								

CUARTA ACTIVIDAD: Para calcular el cuarto elemento T_1 se elige la columna del elemento que se esta calculando (4) y para cada celda con valor se realiza el cálculo: T_1 + duración de la actividad. Se elige el mayor valor.

	T_1	t_e	1	2	3	4	5	6	7	8
	0	1	*	5	8	4				
$0+5=5$	5	2		*	0			10		
$0+8=8$ $5+0=5$	8	3			*	0	6			
$0+4=4$ $8+0=8$	8	4				*	7			
		5					*	8	12	
		6						*		10
		7							*	9
		8								*
		T_2								

QUINTA ACTIVIDAD: Para calcular el cuarto elemento T_1 se elige la columna del elemento que se esta calculando (5) y para cada celda con valor se realiza el cálculo: $T_1 +$ duración de la actividad. Se elige el mayor valor.

	T_1	t_e	1	2	3	4	5	6	7	8
	0	1	*	5	8	4				
$0+5=5$	5	2		*	0			10		
$0+8=8$ $5+0=5$	8	3			*	0	6			
$0+4=4$ $8+0=8$	8	4				*	7			
$8+6=14$ $8+7=15$	15	5					*	8	12	
		6						*		10
		7							*	9
		8								*
		T_2								

SEXTA ACTIVIDAD: Para calcular el cuarto elemento T_1 se elige la columna del elemento que se esta calculando (6) y para cada celda con valor se realiza el cálculo: $T_1 +$ duración de la actividad. Se elige el mayor valor.

	T_1	t_e	1	2	3	4	5	6	7	8
	0	1	*	5	8	4				
$0+5=5$	5	2		*	0			10		
$0+8=8$ $5+0=5$	8	3			*	0	6			
$0+4=4$ $8+0=8$	8	4				*	7			
$8+6=14$ $8+7=15$	15	5					*	8	12	
$5+10=15$ $15+8=23$	23	6						*		10
		7							*	9
		8								*
		T_2								

SÉPTIMA ACTIVIDAD: Para calcular el cuarto elemento T_1 se elige la columna del elemento que se está calculando (7) y para cada celda con valor se realiza el cálculo: $T_1 +$ duración de la actividad. Se elige el mayor valor.

	T_1	t_e	1	2	3	4	5	6	7	8
	0	1	*	5	8	4				
$0 + 5 = 5$	5	2		*	0			10		
$0 + 8 = 8$ $5 + 0 = 5$	8	3			*	0	6			
$0 + 4 = 4$ $8 + 0 = 8$	8	4				*	7			
$8 + 6 = 14$ $8 + 7 = 15$	15	5					*	8	12	
$5 + 10 = 15$ $15 + 8 = 23$	23	6						*		10
$15 + 12 = 27$	27	7							*	9
		8								*
		T_2								

OCTAVA ACTIVIDAD: Para calcular el cuarto elemento T_1 se elige la columna del elemento que se esta calculando (8) y para cada celda con valor se realiza el cálculo: T_1 + duración de la actividad. Se elige el mayor valor.

	T_1	t_e	1	2	3	4	5	6	7	8
	0	1	*	5	8	4				
$0+5=5$	5	2		*	0			10		
$0+8=8$ $5+0=5$	8	3			*	0	6			
$0+4=4$ $8+0=8$	8	4				*	7			
$8+6=14$ $8+7=15$	15	5					*	8	12	
$5+10=15$ $15+8=23$	23	6						*		10
$15+12=27$	27	7							*	9
$23+10=33$ $27+9=36$	36	8								*
		T_2								

📖 Se completa la matriz de Zaderenko calculando T_2 (Tiempo más tardío de realización de un suceso, Last) de izquierda a derecha. Se elige el menor valor.

FILA 8: Se copia el último tiempo T_1

T_1	t_e	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	*	5	8	4				
5	2		*	0			10		
8	3			*	0	6			
8	4				*	7			
15	5					*	8	12	
23	6						*		10
27	7							*	9
36	8								*
		T_2							36

FILA 7: La actividad 8 tiene el valor 9

Se resta a la actividad anterior el menor tiempo de la columna:

$$T_2 - \text{menor tiempo de la columna} = 36 - 9 = 27$$

T ₁	t _e	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	*	5	8	4				
5	2		*	0			10		
8	3			*	0	6			
8	4				*	7			
15	5					*	8	12	
23	6						*		10
27	7							*	9
36	8								*
	T ₂							27	36

FILA 6: La actividad 8 tiene el valor 10: 36 - 10 = 26

T ₁	t _e	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	*	5	8	4				
5	2		*	0			10		
8	3			*	0	6			
8	4				*	7			
15	5					*	8	12	
23	6						*		10
27	7							*	9
36	8								*
	T ₂						26	27	36

FILA 5: Hay dos actividades (actividad 7 y actividad 6)

$$\text{Menor } (27 - 12 = 15 \quad 26 - 8 = 18) \rightarrow 15$$

T ₁	t _e	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	*	5	8	4				
5	2		*	0			10		
8	3			*	0	6			
8	4				*	7			
15	5					*	8	12	
23	6						*		10
27	7							*	9
36	8								*
	T ₂					15	26	27	36

FILA 4: La actividad 5 tiene el valor 7: $15 - 7 = 8$

T ₁	t _e	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	*	5	8	4				
5	2		*	0			10		
8	3			*	0	6			
8	4				*	7			
15	5					*	8	12	
23	6						*		10
27	7							*	9
36	8								*
	T ₂				8	15	26	27	36

FILA 3: Hay dos actividades (actividad 5 y actividad 4)

Menor ($15 - 6 = 9$ $8 - 0 = 8$) → 8

T ₁	t _e	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	*	5	8	4				
5	2		*	0			10		
8	3			*	0	6			
8	4				*	7			
15	5					*	8	12	
23	6						*		10
27	7							*	9
36	8								*
	T ₂			8	8	15	26	27	36

FILA 2: Hay dos actividades (actividad 6 y actividad 3)

Menor ($26 - 10 = 16$ $8 - 0 = 8$) → 8

T ₁	t _e	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	*	5	8	4				
5	2		*	0			10		
8	3			*	0	6			
8	4				*	7			
15	5					*	8	12	
23	6						*		10
27	7							*	9
36	8								*
	T ₂		8	8	8	15	26	27	36

FILA 1: Hay tres actividades (actividad 4 , actividad 3 y actividad 2)

Menor ($8 - 4 = 4$ $8 - 8 = 0$ $8 - 5 = 3$) $\rightarrow 0$

T ₁	t _e	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	*	5	8	4				
5	2		*	0			10		
8	3			*	0	6			
8	4				*	7			
15	5					*	8	12	
23	6						*		10
27	7							*	9
36	8								*
	T ₂	0	8	8	8	15	26	27	36

Finalmente, los tiempos T₁ (Early) y T₂ (Last) son:

T ₁	t _e	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	*	5	8	4				
5	2		*	0			10		
8	3			*	0	6			
8	4				*	7			
15	5					*	8	12	
23	6						*		10
27	7							*	9
36	8								*
	T ₂	0	8	8	8	15	26	27	36

Una compañía se encarga de la construcción de dos tipos de invernaderos (de malla o de plástico y de plancha). Habiendo definido las actividades en semanas, se tiene:

Actividad	Tiempo optimista (a)	Tiempo más probable (m)	Tiempo pesimista (b)	Actividad Precedente
A	1	2	9	-----
B	4	7	10	-----
C	2	8	14	B
D	1	2	9	A, B
E	4	7	16	C
F	5	8	17	C
G	0	3	6	D
H	2	2	2	E, F

- a) Calcular el camino crítico y duración esperada del proyecto. Determinar la probabilidad de finalizar el proyecto a lo sumo en 29 semanas.
- b) Matriz de Zaderenko

Solución:

- a) Se calcula el tiempo esperado y varianza de cada actividad:

$$t_e(A) = \frac{a + 4m + b}{6} = \frac{1 + 4 \times 2 + 9}{6} = 3$$

$$\sigma_A^2 = \text{Var}(A) = \frac{(9 - 1)^2}{36} = 1,78$$

$$t_e(C) = \frac{a + 4m + b}{6} = \frac{2 + 4 \times 8 + 14}{6} = 8$$

$$\sigma_C^2 = \text{Var}(C) = \frac{(14 - 2)^2}{36} = 4$$

⋮

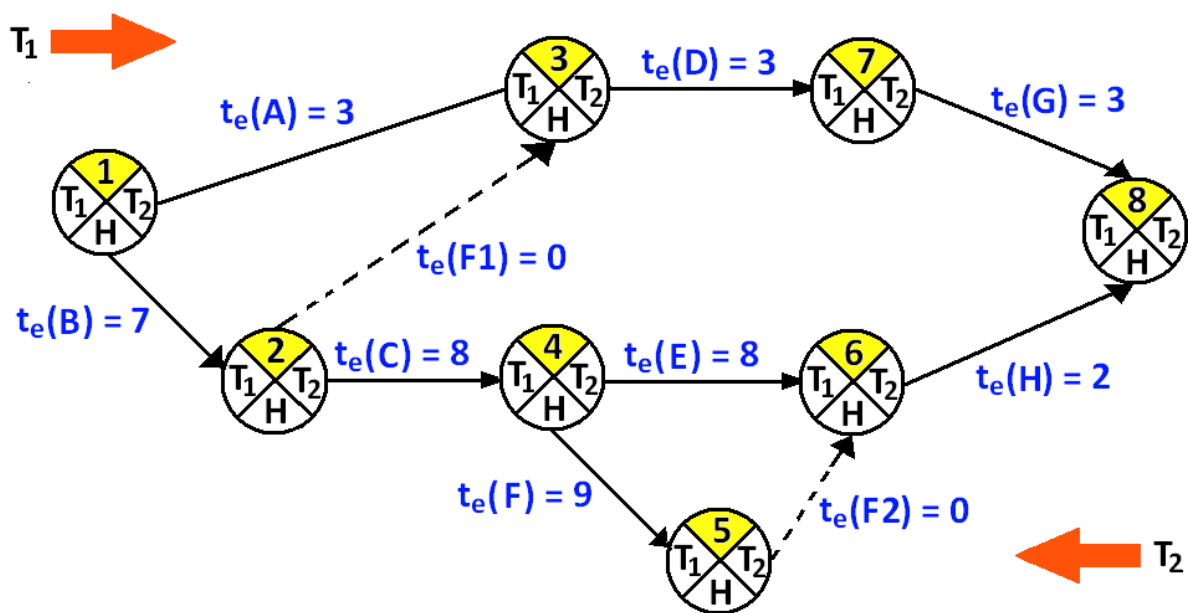
⋮

$$t_e(H) = \frac{a + 4m + b}{6} = \frac{2 + 4 \times 2 + 2}{6} = 2$$

$$\sigma_H^2 = \text{Var}(H) = \frac{(2 - 2)^2}{36} = 0$$

Actividad	Tiempo optimista (a)	Tiempo más probable (m)	Tiempo pesimista (b)	Tiempo esperado T_e	Varianza Var
A	1	2	9	3	1,78
B	4	7	10	7	1
C	2	8	14	8	4
D	1	2	9	3	1,78
E	4	7	16	8	4
F	5	8	17	9	4
G	0	3	6	3	1
H	2	2	2	2	0

A partir del cuadro de relaciones y del tiempo esperado (tiempo Pert) se puede construir la red PERT, colocando sobre cada arco una letra que designa la actividad correspondiente, así como el tiempo esperado t_e asociado a cada una de las actividades.



En la red se procede al cálculo de los tiempos más temprano (T_1 , Early) y más tardío (T_2 , Last) de la realización de un suceso.

- **Tiempo más temprano de un suceso T_1 (i-ésimo nodo)**

Para calcular este indicador debe recorrerse la red de izquierda a derecha, con las siguientes consideraciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} T_1(\text{primer nodo}) = 0 \\ T_1(\text{nodo } i\text{-ésimo}) = T_1(\text{nodo anterior } i-1) + t_e(\text{actividad anterior}) \\ \text{Si en un nodo finaliza más de una actividad, se toma el tiempo de la actividad con mayor valor.} \end{array} \right.$$

$$T_1(1) = 0 \quad T_1(2) = T_1(1) + t_e(B) = 0 + 7 = 7$$

$$T_1(3) = T_1(1) + t_e(A) = 0 + 3 = 3 \quad T_1(3) = T_1(2) + t_e(F1) = 7 + 0 = 7 \quad \max T_1(3) = 7$$

$$T_1(4) = T_1(2) + t_e(C) = 7 + 8 = 15$$

$$T_1(5) = T_1(4) + t_e(F) = 15 + 9 = 24$$

$$T_1(6) = T_1(4) + t_e(E) = 15 + 8 = 23 \quad T_1(6) = T_1(4) + t_e(F) = 15 + 8 = 24 \quad \max T_1(6) = 24$$

$$T_1(7) = T_1(3) + t_e(D) = 7 + 3 = 10$$

$$T_1(8) = T_1(7) + t_e(G) = 10 + 3 = 13 \quad T_1(8) = T_1(6) + t_e(H) = 24 + 2 = 26 \quad \max T_1(8) = 26$$

- **Tiempo más tardío de realización de un suceso T_2 (i-ésimo nodo)**

Para calcular este indicador debe recorrerse la red de derecha a izquierda, con las siguientes consideraciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} T_2(\text{primer nodo, de derecha a izquierda}) = T_1(\text{de este nodo}) \\ T_2(\text{nodo } i\text{-ésimo}) = T_2(\text{nodo anterior } i-1) - t_e(\text{actividad anterior}) \\ \text{Si en un nodo finaliza más de una actividad, se toma el tiempo de la actividad} \\ \text{con menor valor.} \end{array} \right.$$

$$T_2(8) = T_1(8) = 26$$

$$T_2(7) = T_2(8) - t_e(G) = 26 - 3 = 23$$

$$T_2(6) = T_2(8) - t_e(H) = 26 - 2 = 24$$

$$T_2(5) = T_2(6) - t_e(F2) = 24 - 0 = 24$$

$$T_2(4) = T_2(5) - t_e(F) = 24 - 9 = 15 \quad T_2(4) = T_2(6) - t_e(E) = 24 - 8 = 16 \quad \min T_2(4) = 15$$

$$T_2(2) = T_2(4) - t_e(C) = 15 - 8 = 7$$

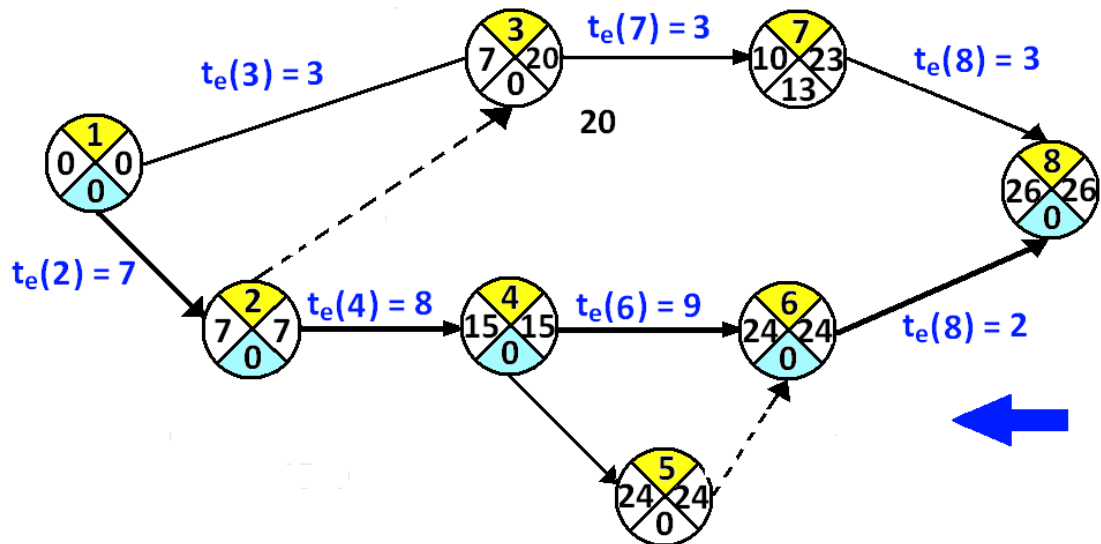
$$T_2(3) = T_2(7) - t_e(D) = 23 - 3 = 20$$

$$T_2(1) = T_2(2) - t_e(B) = 7 - 7 = 0 \quad T_2(1) = T_2(3) - t_e(A) = 20 - 3 = 17 \quad \min T_2(1) = 0$$

- **Tiempo de Holgura $H = T_2 - T_1$**

El tiempo de holgura es la diferencia entre el tiempo más tardío y el tiempo más temprano de un suceso. En unidades de tiempo corresponde al valor que puede tardar la ocurrencia de un suceso.

- **CAMINO CRÍTICO:**



El camino crítico es 1 - 2 - 4 - 6 - 8 formado por las actividades B, C, E, H

La longitud o duración del proyecto, de derecha a izquierda en el camino crítico,
 $t_e(b) = T_2(b) - T_2(a)$ en $[a - b]$

$$\mu_{\text{PROYECTO}} = t_e(2) + t_e(4) + t_e(6) + t_e(8) = 7 + 8 + 9 + 2 = 26$$

Desviación estándar del proyecto:

$$\sigma_{\text{PROYECTO}}^2 = \sigma_2^2 + \sigma_4^2 + \sigma_6^2 + \sigma_8^2 = 1 + 4 + 4 + 0 = 9 \quad \sigma_{\text{PROYECTO}} = \sqrt{9} = 3$$

La distribución del tiempo de finalización del proyecto, de acuerdo con el Teorema Central del Límite (TCL), sigue una distribución normal $N(26, 3)$

La Probabilidad de terminar a lo sumo en 29 semanas es:

$$P(X \leq 29) = P\left[\frac{X - 26}{3} \leq \frac{29 - 26}{3}\right] = P(z \leq 1) = 0,8413$$

Se termina el proyecto en 29 semanas como mucho en un 84,13% de los casos.

MATRIZ DE ZADERENKO

Se rellena la matriz con las duraciones de las actividades y se comienza relleno la columna de las actividades T_1 (Tiempo más temprano de un suceso, Early). Se elige columna y se toma el mayor valor.

PRIMERA ACTIVIDAD: El primer tiempo T_1 es cero.

SEGUNDA ACTIVIDAD: Para calcular el segundo elemento T_1 se elige la columna del elemento que se esta calculando (2) y para cada celda con valor se realiza el cálculo: $T_1 + \text{duración de la actividad} = 0 + 7 = 7$

	T_1	t_e	1	2	3	4	5	6	7	8
	0	1	*	7	3					
$0 + 7 = 7$	7	2		*	0	8				
		3			*				3	
		4				*	9	8		
		5					*	0		
		6						*		2
		7							*	3
		8								*
		T_2								

TERCERA ACTIVIDAD: Para calcular el tercer elemento T_1 se elige la columna del elemento que se esta calculando (3), observando las celdas que tienen valor se tienen dos tiempos, y se realiza el cálculo:

$$T_1 + \text{duración de la actividad} = 0 + 3 = 3$$

$$T_1 + \text{duración de la actividad} = 7 + 0 = 7$$

Se introduce el tiempo mayor que es 7

<u>Mayor</u>	T_1	t_e	1	2	3	4	5	6	7	8
	0	1	*	7	3					
$0 + 7 = 7$	7	2		*	0	8				
$0 + 3 = 3$ $7 + 0 = 7$	7	3			*				3	
		4				*	9	8		
		5					*	0		
		6						*		2
		7							*	3
		8								*
		T_2								

CUARTA ACTIVIDAD: Para calcular el cuarto elemento de T_1 se elige la columna del elemento que se esta calculando (4), hay una celda que tiene valor, se realiza el cálculo: $T_1 + \text{duración de la actividad} = 7 + 8 = 15$

<u>Mayor</u>	T_1	t_e	1	2	3	4	5	6	7	8
	0	1	*	7	3					
$0+7=7$	7	2		*	0	8				
$0+3=3$ $7+0=7$	7	3			*				3	
$7+8=15$	15	4				*	9	8		
		5					*	0		
		6						*		2
		7							*	3
		8								*
		T_2								

QUINTA ACTIVIDAD: Para calcular el quinto elemento de T_1 se elige la columna del elemento que se esta calculando (5), hay una celda que tiene valor, se realiza el cálculo: $T_1 + \text{duración de la actividad} = 15 + 9 = 24$

<u>Mayor</u>	T_1	t_e	1	2	3	4	5	6	7	8
	0	1	*	7	3					
$0+7=7$	7	2		*	0	8				
$0+3=3$ $7+0=7$	7	3			*				3	
$7+8=15$	15	4				*	9	8		
$15+9=24$	24	5					*	0		
		6						*		2
		7							*	3
		8								*
		T_2								

SEXTA ACTIVIDAD: Para calcular el sexto elemento de T_1 se elige la columna del elemento que se esta calculando (6), hay dos celdas que tiene valor, se realiza el cálculo:

$$T_1 + \text{duración de la actividad} = 15 + 8 = 23$$

$$T_1 + \text{duración de la actividad} = 24 + 0 = 24$$

Se introduce el mayor valor que es 24

<u>Mayor</u>	T_1	t_e	1	2	3	4	5	6	7	8
	0	1	*	7	3					
$0 + 7 = 7$	7	2		*	0	8				
$0 + 3 = 3$ $7 + 0 = 7$	7	3			*				3	
$7 + 8 = 15$	15	4				*	9	8		
$15 + 9 = 24$	24	5					*	0		
$15 + 8 = 23$ $24 + 0 = 24$	24	6						*		2
		7							*	3
		8								*
		T_2								

SÉPTIMA ACTIVIDAD: Para calcular el séptimo elemento de T_1 se elige la columna del elemento que se esta calculando (7), hay una celda que tiene valor, se realiza el cálculo: $T_1 + \text{duración de la actividad} = 7 + 3 = 10$

<u>Mayor</u>	T_1	t_e	1	2	3	4	5	6	7	8
	0	1	*	7	3					
$0 + 7 = 7$	7	2		*	0	8				
$0 + 3 = 3$ $7 + 0 = 7$	7	3			*				3	
$7 + 8 = 15$	15	4				*	9	8		
$15 + 9 = 24$	24	5					*	0		
$15 + 8 = 23$ $24 + 0 = 24$	24	6						*		2
$7 + 3 = 10$	10	7							*	3
		8								*
		T_2								

OCTAVA ACTIVIDAD: Para calcular el octavo elemento de T_1 se elige la columna del elemento que se esta calculando (8), hay dos celdas que tiene valor, se realiza el cálculo:

$$T_1 + \text{duración de la actividad} = 24 + 2 = 26$$

$$T_1 + \text{duración de la actividad} = 10 + 3 = 13$$

Se introduce el mayor valor 26

<u>Mayor</u>	T_1	t_e	1	2	3	4	5	6	7	8
	0	1	*	7	3					
$0 + 7 = 7$	7	2		*	0	8				
$0 + 3 = 3$ $7 + 0 = 7$	7	3			*				3	
$7 + 8 = 15$	15	4				*	9	8		
$15 + 9 = 24$	24	5					*	0		
$15 + 8 = 23$ $24 + 0 = 24$	24	6						*		2
$24 + 2 = 26$ $10 + 3 = 13$	10	7							*	3
		8								*
		T_2								

📖 Se completa la matriz de Zaderenko calculando T_2 (Tiempo más tardío de realización de un suceso, Last) de izquierda a derecha. Se elige Fila y se toma el menor valor

FILA 8: Se copia el último tiempo T_1

	T_1	t_e	1	2	3	4	5	6	7	8
	0	1	*	7	3					
	7	2		*	0	8				
	7	3			*				3	
	15	4				*	9	8		
	24	5					*	0		
	24	6						*		2
	10	7							*	3
	26	8								*
Menor		T_2								26

FILA 7: La actividad 8 tiene el valor 3

$$T_2 - \text{menor tiempo de la columna} = 26 - 3 = 23$$

	T_1	t_e	1	2	3	4	5	6	7	8
	0	1	*	7	3					
	7	2		*	0	8				
	7	3			*				3	
	15	4				*	9	8		
	24	5					*	0		
	24	6						*		2
$26 - 3 = 23$	10	7							*	3
	26	8								*
Menor		T_2							23	26

FILA 6: La actividad 8 tiene el valor 2

$$T_2 - \text{menor tiempo de la columna} = 26 - 2 = 24$$

	T ₁	t _e	1	2	3	4	5	6	7	8
	0	1	*	7	3					
	7	2		*	0	8				
	7	3			*				3	
	15	4				*	9	8		
	24	5					*	0		
26 - 2 = 24	24	6						*		2
26 - 3 = 23	10	7							*	3
	26	8								*
<u>Menor</u>		T ₂						24	23	26

FILA 5: La actividad 8 tiene el valor 3

$$T_2 - \text{menor tiempo de la columna} = 24 - 0 = 24$$

	T ₁	t _e	1	2	3	4	5	6	7	8
	0	1	*	7	3					
	7	2		*	0	8				
	7	3			*				3	
	15	4				*	9	8		
24 - 0 = 24	24	5					*	0		
26 - 2 = 24	24	6						*		2
26 - 3 = 23	10	7							*	3
	26	8								*
<u>Menor</u>		T ₂					24	24	23	26

FILA 4: Hay dos actividades (actividad 6 y actividad 5)

Menor($24 - 8 = 16$ $24 - 9 = 15$) \rightarrow 15

	T ₁	t _e	1	2	3	4	5	6	7	8
	0	1	*	7	3					
	7	2		*	0	8				
	7	3			*				3	
24 - 8 = 16 24 - 9 = 15	15	4				*	9	8		
24 - 0 = 24	24	5					*	0		
26 - 2 = 24	24	6						*		2
26 - 3 = 23	10	7							*	3
	26	8								*
Menor		T ₂				15	24	24	23	26

FILA 3: La actividad 7 tiene el valor 3

T₂ - menor tiempo de la columna = 23 - 3 = 20

	T ₁	t _e	1	2	3	4	5	6	7	8
	0	1	*	7	3					
	7	2		*	0	8				
23 - 3 = 20	7	3			*				3	
24 - 8 = 16 24 - 9 = 15	15	4				*	9	8		
24 - 0 = 24	24	5					*	0		
26 - 2 = 24	24	6						*		2
26 - 3 = 23	10	7							*	3
	26	8								*
Menor		T ₂			20	15	24	24	23	26

FILA 2: Hay dos actividades (actividad 4 y actividad 3)

Menor(15 – 8 = 7 20 – 0 = 20) → 7

	T ₁	t _e	1	2	3	4	5	6	7	8
	0	1	*	7	3					
15 – 8 = 7 20 – 0 = 20	7	2		*	0	8				
23 – 3 = 20	7	3			*				3	
24 – 8 = 16 24 – 9 = 15	15	4				*	9	8		
24 – 0 = 24	24	5					*	0		
26 – 2 = 24	24	6						*		2
26 – 3 = 23	10	7							*	3
	26	8								*
<u>Menor</u>		T ₂		7	20	15	24	24	23	26

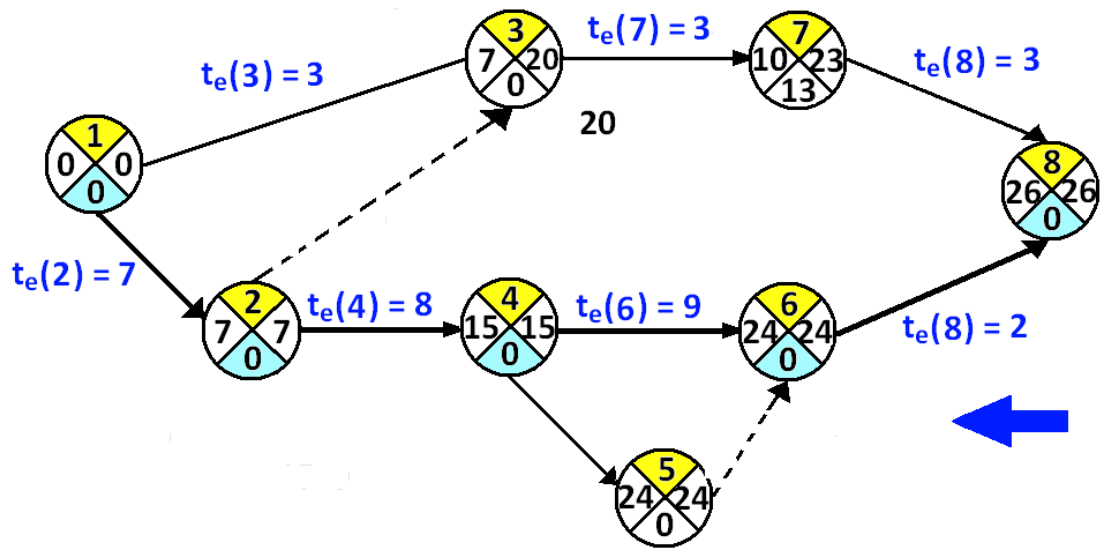
FILA 1: Hay dos actividades (actividad 3 y actividad 2)

Menor(20 - 3 = 17 7 - 7 = 0) → 0

	T ₁	t _e	1	2	3	4	5	6	7	8
20 - 3 = 17 7 - 7 = 0	0	1	*	7	3					
15 - 8 = 7 20 - 0 = 20	7	2		*	0	8				
23 - 3 = 20	7	3			*				3	
24 - 8 = 16 24 - 9 = 15	15	4				*	9	8		
24 - 0 = 24	24	5					*	0		
26 - 2 = 24	24	6						*		2
26 - 3 = 23	10	7							*	3
	26	8								*
Menor	T ₂		0	7	20	15	24	24	23	26

Finalmente, resulta la matriz de Zaderenko

T ₁	t _e	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	*	7	3					
7	2		*	0	8				
7	3			*				3	
15	4				*	9	8		
24	5					*	0		
24	6						*		2
10	7							*	3
26	8								*
	T ₂	0	7	20	15	24	24	23	26



Asignatura Grupo

Apellidos Nombre

Ejercicio del día

Asignatura Grupo.....
Apellidos Nombre

Ejercicio del día

(IMPRESO EN PAPEL RECICLADO)

UNICAMENTE PARA USO ESCOLAR



Instrumentos Estadísticos Avanzados
Facultad Ciencias Económicas y Empresariales
Departamento de Economía Aplicada
Profesor: Santiago de la Fuente Fernández