Universidad Autónoma de Madrid
Instrumentos Estadísticos Avanzados
Facultad Ciencias Económicas y Empresariales
Departamento de Economía Aplicada
Profesor: Santiago de la Fuente Fernández

MODELOS ECONÓMICOS. TEORÍA SUBASTAS.

- Modelo de Cournot: Monopolio. Duopolio. Oligopolio.
- Modelo de Stackelberg: Competencia en cantidades.
- Modelo de Bertrand: Competencia en precios.
- Contribución voluntaria a un bien público.
- Teoría de las Subastas

Hoja nº ....

UAM
Universidad Autónoma de Madrid

Asignatura .... Grupo ....

Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio del día ....

(IMPRESO EN PAPEL RECICLADO)   UNICAMENTE PARA USO ESCOLAR

Índice Modelos Económicos

DUOPOLIO DE COURNOT: COMPETENCIA EN CANTIDADES

La competencia entre dos empresas se puede describir por medio del equilibrio de Nash.

La empresa 1 y la empresa 2 compiten en un mercado por un producto homogéneo (no hay diferencia en quién lo produce).

Cada una de ellas utilizará como estrategia la cantidad q_i que produce.
Oferta del mercado: $Q = q_1 + q_2$.
El coste de producción unitario es igual para las dos empresas.
El coste total es función de la cantidad producida $C_i(q_i) = c\,q_i$, y menor que el precio máximo de venta $c < a$

El proceso se realiza sólo una vez (juego estático).

La función de demanda inversa, función que establece los precios, es decreciente y lineal en el intervalo $[0, a/b]$, determinada por la función:

$$P(Q) = \begin{cases} a - bQ & bQ < a \\ 0 & bQ \geq a \end{cases} \qquad \text{donde} \begin{cases} a \equiv \text{Tamaño del mercado} \\ -b \equiv \text{Sensibilidad del cosumidor al precio} \end{cases} \qquad b > 0$$

La utilidad de cada empresa es el beneficio que obtienen en la venta del producto. Es decir, la función de pagos (beneficios netos) es:

$$\pi_1(q_1, q_2) = q_1\left[a - bq_1 - bq_2\right] - cq_1 = q_1\left[a - bq_1 - bq_2 - c\right] = u_1(q_1, q_2)$$

$$\pi_2(q_1, q_2) = q_2\left[a - bq_1 - bq_2\right] - cq_2 = q_2\left[a - bq_1 - bq_2 - c\right] = u_2(q_1, q_2)$$

Descritas las funciones de demanda, costes y utilidad de las empresas, el objetivo es determinar el punto de equilibrio entre las dos, es decir, determinar el EN.

La respuesta óptima de cualquiera de las dos empresas para una estrategia fijada de la otra $(q_1 \text{ o } q_2)$ se determina (en el caso de la empresa 1) resolviendo la función:

$$\max_{q_1} u_1(q_1, q_2) = q_1(a - bq_1 - bq_2 - c) \qquad 0 \leq q_1 \leq a/b$$

Se trata de obtener el máximo beneficio o el máximo pago, solución que tiene que estar en el intervalo $\left[0, a/b\right]$, donde se cumple que la cantidad que van a producir ambas empresas es positiva y además que para cada cantidad producida los beneficios son máximos. Estas dos situaciones se denominan, respectivamente, condiciones de *primer* y *segundo orden*

Condición de primer orden:

$$\frac{\vartheta u_1(q_1, q_2)}{\vartheta q_1} = \frac{\vartheta q_1(a - bq_1 - bq_2 - c)}{\vartheta q_1} = 0 \;\rightarrow\; a - 2bq_1 - bq_2 - c = 0 \;\rightarrow\; q_1 = \frac{a - bq_2 - c}{2b}$$

Asignatura .... Grupo ....
Apellidos .... Nombre ....
Ejercicio del día ....

Análogamente, la respuesta óptima para la empresa 2 sería:

$$\frac{\vartheta u_2(q_1, q_2)}{\vartheta q_2} = \frac{\vartheta q_2(a - bq_1 - bq_2 - c)}{\vartheta q_2} = 0 \;\rightarrow\; a - bq_1 - 2bq_2 - c = 0 \;\rightarrow\; q_2 = \frac{a - bq_1 - c}{2b}$$

Condición de segundo orden (Beneficios máximos):

$$\frac{\vartheta^2 u_1(q_1, q_2)}{\vartheta q_i^2} = \frac{\vartheta(a - 2bq_1 - bq_2 - c)}{\vartheta q_1} = -2b < 0 \;\; \text{(es un máximo)}$$

La respuesta óptima de la empresa 1 es $BR_1(q_2) = \dfrac{a - c - bq_2}{2b}$

La mejor respuesta de la empresa 2 es $BR_2(q_1) = \dfrac{a - c - bq_1}{2b}$

Si ambas son las respuestas óptimas, significa que $q_1^{\bullet} = \dfrac{a - bq_2^{\bullet} - c}{2b}$ es la respuesta óptima para $q_2^{\bullet} = \dfrac{a - bq_1^{\bullet} - c}{2b}$ y $q_2^{\bullet}$ es la respuesta óptima de $q_1^{\bullet}$, por tanto $EN = \{(q_1^{\bullet}, q_2^{\bullet})\}$

Resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{l} q_1^{\bullet} = \dfrac{a - c - bq_2^{\bullet}}{2b} \\[2ex] q_2^{\bullet} = \dfrac{a - c - bq_1^{\bullet}}{2b} \end{array}\right. \;\rightarrow\; q_2^{\bullet} = \frac{a - c - b\left(\dfrac{a - c - bq_2^{\bullet}}{2b}\right)}{2b} = \frac{a - c + bq_2^{\bullet}}{4b} \;\rightarrow\; q_2^{\bullet} = \frac{a - c}{3b}$$

Análogamente, $q_1^{\bullet} = \dfrac{a - c}{3b}$

El punto de equilibrio es: $EN = \left\{\left(q_1^{\bullet} = \dfrac{a - c}{3b},\; q_2^{\bullet} = \dfrac{a - c}{3b}\right)\right\}$

Cantidad producida en equilibrio: $Q^{\bullet} = q_1^{\bullet} + q_2^{\bullet} = \dfrac{2(a - c)}{3b}$

Precio en equilibrio: $P(Q^{\bullet}) = a - bQ^{\bullet} = a - \dfrac{2(a - 2c)}{3} = \dfrac{a + 2c}{3}$

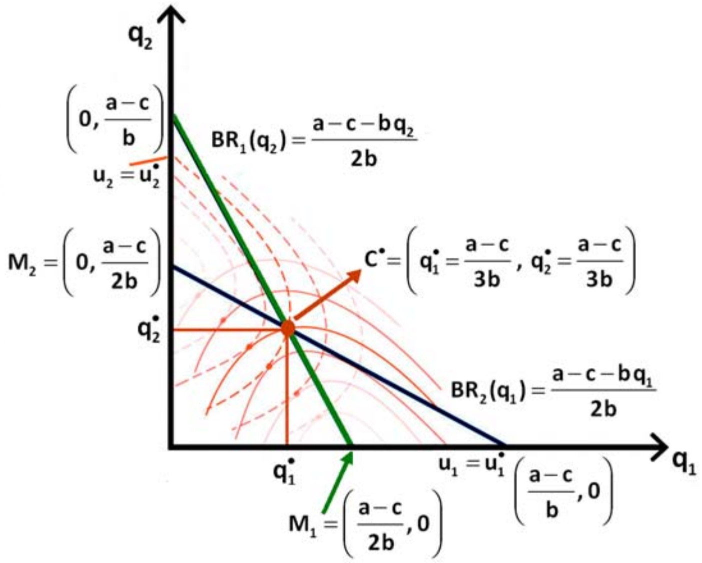
Beneficios en equilibrio:

$$u_1^{\bullet}(q_1^{\bullet}, q_2^{\bullet}) = q_1^{\bullet}\left[a - bq_1^{\bullet} - bq_2^{\bullet} - c\right] = \frac{a - c}{3b}\left[a - \cancel{b}\,\frac{a - c}{3\cancel{b}} - \cancel{b}\,\frac{a - c}{3\cancel{b}} - c\right] = \frac{(a - c)^2}{9b}$$

$$u_2^{\bullet}(q_1^{\bullet}, q_2^{\bullet}) = u_1^{\bullet}(q_1^{\bullet}, q_2^{\bullet}) = \frac{(a-c)^2}{9b}$$

Beneficio total (neto) en equilibrio: $U^{\bullet} = \dfrac{2(a-c)^2}{9b}$

Representación del Duopolio de Cournot



Los puntos M_1 y M_2 son los beneficios que la empresa obtendría en una situación de monopolio.

El punto $C^{\bullet}$ es el equilibrio de Nash.

Las curvas discontinuas reflejan las utilidades que cada empresa obtendría para cada cantidad de producto.

Con las curvas discontinuas se demuestra que $C^{\bullet}$ es el punto de equilibrio de Nash, ya que para otra cantidad fabricada por cualquiera de las dos empresas el beneficio proporcionado por las curvas de utilidad es menor.

Señalar que el Duopolio de Cournot es un dilema del prisionero ya que ambas empresas tienen incentivos a la no cooperación, al ser los beneficios mayores que los que se obtienen cuando cooperan - Esta situación no sería posible por tener prohibida la colusión según la Ley 15/2007 de 3 de julio de defensa de la competencia -.

<u>SIN COOPERAR</u>: Las cantidades a producir por cada una de las empresas serían $q_1^{\bullet} = \dfrac{a-c}{3b}$ y $q_2^{\bullet} = \dfrac{a-c}{3b}$,

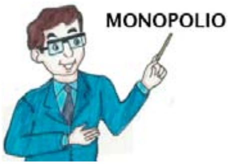
que conducen a unos beneficios individuales, respectivamente, de $u_1^{\bullet} = \dfrac{(a-c)^2}{9b}$ y $u_2^{\bullet} = \dfrac{(a-c)^2}{9b}$

Universidad Autónoma de Madrid

Asignatura .... Grupo ....

Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio del día ....



COOPERANDO: Las cantidades a fabricar por cada una de las empresas se obtendría dividiendo la cantidad a producir en el monopolio entre las dos.

Es decir, $q_1 = \dfrac{a-c}{4b}$ y $q_2 = \dfrac{a-c}{4b}$

Los beneficios individuales serían:

$$u_1(q_1, q_2) = q_1\left[a - bq_1 - bq_2\right] - cq_1 = \frac{a-c}{4b}\left[a - b\frac{a-c}{4b} - b\frac{a-c}{4b} - c\right] = \frac{(a-c)^2}{8b}$$

$$u_2(q_1, q_2) = q_2\left[a - bq_1 - bq_2\right] - cq_2 = \frac{a-c}{4b}\left[a - b\frac{a-c}{4b} - b\frac{a-c}{4b} - c\right] = \frac{(a-c)^2}{8b}$$

Se observa que los beneficios obtenidos cooperando son superiores a los beneficios obtenidos en la situación del equilibrio de Nash (EN): $\dfrac{(a-c)^2}{8b} > \dfrac{(a-c)^2}{9b}$

Cantidad producida en equilibrio: $Q^{\bullet} = q_1^{\bullet} + q_2^{\bullet} = \dfrac{a-c}{2b}$

Precio en equilibrio: $P(Q^{\bullet}) = a - bQ^{\bullet} = a - \dfrac{a-c}{2} = \dfrac{a+c}{2}$

Beneficio total (neto) en equilibrio: $U^{\bullet} = \dfrac{(a-c)^2}{4b}$

La producción es mayor en un duopolio que en un monopolio: $\dfrac{2(a-c)}{3b} > \dfrac{a-c}{2b}$

El precio es menor en un duopolio que en un monopolio: $\dfrac{a+2c}{3} < \dfrac{a+c}{2}$ $\quad (a > c)$

Incentivo a coludir (formar un cartel): $\dfrac{(a-c)^2}{36}$

Como los carteles normalmente son ilegales, los agentes tratan de coludir tácitamente utilizando estrategias de reducción de producción autoimpuestas, obteniendo un efecto de subida de precios y por consiguiente un aumento en los beneficios.

Universidad Autónoma de Madrid

Asignatura .... Grupo ....
Apellidos .... Nombre ....
Ejercicio del día ....

DUOPOLIO DE STACKELBERG: COMPETENCIA EN CANTIDADES

El duopolio de Stackelberg (1934), conocido también como *modelo de competencia de Stackelberg*, es un modelo de competencia imperfecta basado en el juego no cooperativo. Representa un punto de inflexión en el estudio de estructuras de mercado, especialmente en el análisis de duopolios, dado que se basa en hipótesis iniciales diferentes.

Tiene el mismo planteamiento que el modelo de duopolio de Cournot. En esta situación, las dos empresas no eligen a la vez sus estrategias, sino una después de la otra y conociendo la estrategia elegida por la primera.

Esta situación es muy habitual cuando no son ofertas simultáneas, sino que una empresa toma decisiones de expansión, o de inversión, o de desarrollo, de modo que la segunda empresa actúa en respuesta a la decisión de la primera. En muchos casos, la primera es una empresa líder, y la segunda una empresa con menos poder de mercado.

Pueden ser más empresas, para simplificar se supone que son dos empresas y que sus estrategias son la elección de la cantidad de producción.

El precio unitario de venta, al igual que en el duopolio de Cournot, se considera que varía con las cantidades producidas según la función de demanda inversa en el intervalo $[0, a/b]$:

$$P(Q) = \begin{cases} a - bQ & bQ < a \\ 0 & bQ \geq a \end{cases} \quad \text{donde} \quad \begin{cases} a \equiv \text{Tamaño del mercado} \\ -b \equiv \text{Sensibilidad del cosumidor al precio} \end{cases} \quad b > 0$$

El planteamiento en forma extensiva sería:

1. La empresa 1 elige $q_1 \geq 0$
2. La empresa 2 observa q_1 y elige $q_2 \geq 0$
3. Cada empresa recibe

$$\pi_1(q_1, q_2) = q_1\left[P(q_1 + q_2) - c\right] = q_1\left[a - bq_1 - bq_2 - c\right] = u_1(q_1, q_2)$$
$$\pi_2(q_1, q_2) = q_2\left[P(q_1 + q_2) - c\right] = q_2\left[a - bq_1 - bq_2 - c\right] = u_2(q_1, q_2)$$

Se tienen que decidir los niveles de producción en diferentes momentos de tiempo. La empresa 1 determina $q_1 \geq 0$ y la empresa 2 se fija en q_1 y decide $q_2 \geq 0$. Es una situación en la que hay dos etapas, que se resuelve por inducción hacia atrás.
De esta forma, se comienza resolviendo el problema de maximización de la empresa 2:

$$\max_{u_2} u_2(q_1, q_2) = q_2\left[a - bq_1 - bq_2 - c\right] \qquad 0 \leq q_1 + q_2 \leq a$$

La condición de primer orden es:

$$\frac{\vartheta u_2(q_1, q_2)}{\vartheta q_2} = \frac{\vartheta q_2(a - bq_1 - bq_2 - c)}{\vartheta q_2} = 0 \;\rightarrow\; a - bq_1 - 2bq_2 - c = 0 \;\rightarrow\; q_2^{\bullet} = \frac{a - bq_1 - c}{2b}$$

La condición de sgundo orden:

$$\frac{\vartheta^2 u_2(q_1, q_2)}{\vartheta q_2^2} = \frac{\vartheta q_2 (a - bq_1 - 2bq_2 - c)}{\vartheta q_2} = -2 < 0 \quad \text{(es un máximo)}$$

Se analiza la decisión de la empresa 1, sabiendo que la empresa 2 va a determinar su producción $q_2^\bullet = \frac{a - bq_1 - c}{2b}$ para cualquier decisión que tome la empresa 1.

La empresa 1 posee cierta ventaja, puesto que puede anticiparse a la respuesta de la empresa 2 al resolver su problema de maximización, sustituyendo q_2 por su valor.
De este modo, el problema de maximización de la empresa 1 es:

$$\max_{u_1} u_1(q_1, q_2^\bullet) = q_1(a - bq_1 - bq_2^\bullet - c) = q_1\left[a - bq_1 - b\frac{a - bq_1 - c}{2b} - c\right] = q_1\left[\frac{a - bq_1 - c}{2}\right]$$

La condición de primer orden es:

$$\frac{\vartheta u_1(q_1, q_2)}{\vartheta q_1} = \frac{\vartheta}{\vartheta q_1}\left(q_1\left[\frac{a - bq_1 - c}{2}\right]\right) = 0 \;\rightarrow\; a - 2bq_1 - c = 0 \;\rightarrow\; q_1^\bullet = \frac{a - c}{2b}$$

Sustituyendo en la ecuación de $q_2^\bullet$, resulta:

$$q_2^\bullet = \frac{a - bq_1 - c}{2b} \;\rightarrow\; q_2^\bullet = \frac{a - b\frac{a - c}{2b} - c}{2b} = \frac{a - c}{4b}$$

El equilibrio de Nash perfecto en subjuegos $\text{ENPS} = \left\{\left(q_1^\bullet = \frac{a - c}{2b},\; q_2^\bullet = \frac{a - c}{4b}\right)\right\}$

Cantidad producida en equilibrio: $Q^\bullet = q_1^\bullet + q_2^\bullet = \frac{a - c}{2b} + \frac{a - c}{4b} = \frac{3(a - c)}{4b}$

Implicaciones:

La cantidad total producida en equilibrio de Stackelberg $\frac{3(a - c)}{4b}$, es mayor que la cantidad total en equilibrio de Cournot $\frac{2(a - c)}{3b}$:

$$\frac{3(a - c)}{4b} > \frac{2(a - c)}{3b} \;\rightarrow\; \text{El precio del producto es menor}$$

Universidad Autónoma de Madrid

Asignatura .... Grupo ....

Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio del día ....

Si las empresas tienen el mismo nivel de costes, la solución de Stackelberg es más eficiente que la de Cournot, ya que la producción total es más elevada y el precio es más bajo.

La cantidad que ha de producir la empresa 1: $\left(q_1^\bullet = \dfrac{a-c}{2b}\right)$ es la de monopolio.

Mientras que la cantidad que tiene que producir empresa 2: $\left(q_2^\bullet = \dfrac{a-c}{4b}\right)$ es la mitad.

Es curioso observar cómo disponer de más información a la hora de actuar no implica obtener una solución mejor, la empresa 1 sabe que cuando actúe la empresa 2 tendrá esa información. La empresa 1 es más ineficiente (tiene costos más altos).

Cuando se trata de eficiencia económica, el resultado es similar al modelo de duopolio de Cournot. El equilibrio de Nash no es Pareto eficiente. No obstante, la perdida es menor en el duopolio de Stackelberg que en el de Cournot.

Precio en equilibrio: $P(Q^\bullet) = a - bQ^\bullet = a - b\,\dfrac{3(a-c)}{4b} = \dfrac{a+3c}{4}$

Implicaciones:

El precio en equilibrio de Stackelberg es menor que el precio en equilibrio de Cournot:

$$\frac{a+3c}{4} < \frac{a+2c}{3}$$

Beneficios en equilibrio de las empresas:

$$u_1^\bullet = \left[P(Q^\bullet) - c\right].\,q_1^\bullet = \left(\frac{a+3c}{4} - c\right).\left(\frac{a-c}{2b}\right) = \frac{(a-c)^2}{8b}$$

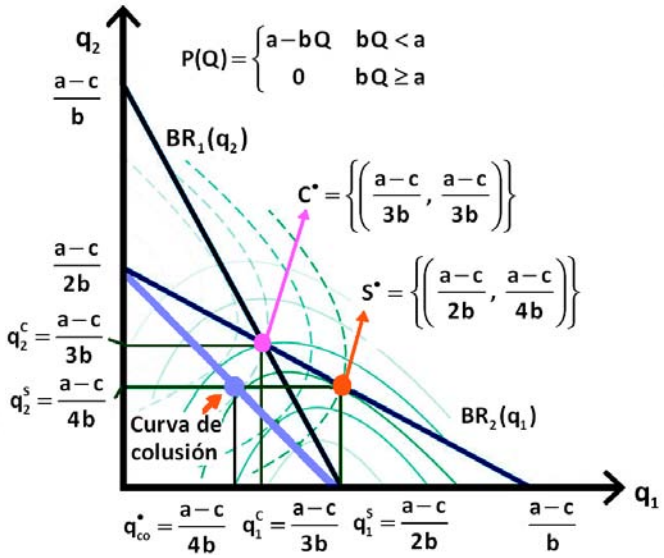
$$u_2^\bullet = \left[P(Q^\bullet) - c\right].\,q_2^\bullet = \left(\frac{a+3c}{4} - c\right).\left(\frac{a-c}{4b}\right) = \frac{(a-c)^2}{16b}$$

Beneficio total (neto) en equilibrio: $U^\bullet = \dfrac{(a-c)^2}{8b} + \dfrac{(a-c)^2}{16b} = \dfrac{3(a-c)^2}{16b}$

Implicaciones:

$u_1^\bullet = \dfrac{(a-c)^2}{8b} > u_2^\bullet = \dfrac{(a-c)^2}{16b} \quad \rightarrow$ La empresa 1 obtiene más beneficios.

Representación del Duopolio de Stackelberg



Los puntos de equilibrio de Stackelberg $(S^{\bullet})$ y Cournot $(C^{\bullet})$ son estables en modelos estáticos de un solo período.

En entornos más dinámicos, como son los juegos repetidos, se necesitan reconsiderar los modelos.

En relación con la producción y el precio de cada empresa, se tiene la relación:

Empresa Líder: $q_1^S > q_1^C \quad \wedge \quad u_1^S > u_1^C$

Empresa 2: $q_2^S < q_2^C \quad \wedge \quad u_2^S < u_2^C$

En relación con las cantidades totales de producción y al precio, se tiene la relación:

$$\underbrace{Q_M}_{\substack{\text{Cantidad}\\ \text{Total}\\ \text{Monopolio}}} < \underbrace{Q_C}_{\substack{\text{Cantidad}\\ \text{Total}\\ \text{Cournot}}} < \underbrace{Q_S}_{\substack{\text{Cantidad}\\ \text{Total}\\ \text{Stackelberg}}} < \underbrace{Q_{CP}}_{\substack{\text{Cantidad}\\ \text{Total}\\ \text{Competencia Perfecta}}}$$

$$\underbrace{P_M}_{\substack{\text{Precio con}\\ \text{Monopolio}}} > \underbrace{P_C}_{\substack{\text{Precio con}\\ \text{Cournot}}} > \underbrace{P_S}_{\substack{\text{Precio con}\\ \text{Stackelberg}}} > \underbrace{P_{CP}=CM_g}_{\substack{\text{Precio con}\\ \text{Competencia Perfecta}}}$$

La función de coalición se emplea fundamentalmente en juegos cooperativos.
Se emplea básicamente para estudiar la repartición de los rendimientos obtenidos en la cooperación entre empresas o jugadores. Trata de contestar a dos cuestiones:

(a) ¿Cuánto es lo mínimo que puede conseguir cada empresa actuando en forma unilateral?

(b) ¿Cuánto es lo mínimo que pueden obtener las dos empresas cooperando?

OLIGOPOLIO DE COURNOT: COMPETENCIA EN CANTIDADES

El mercado está compuesto por *n* empresas que compiten, al igual que en el duopolio de Cournot, con un producto homogéneo y en cantidades, no en precios.
Las empresas participantes $(1, 2, 3, \ldots, n)$ producen $(q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n)$, respectivamente.

En una empresa i la cantidad producida será q_i y su demanda inversa:

$$P(Q) = \begin{cases} a - bQ & bQ < a \\ 0 & bQ \geq a \end{cases} \quad \text{donde} \begin{cases} a \equiv \text{Tamaño del mercado} \\ -b \equiv \text{Sensibilidad del cosumidor al precio} \end{cases} \quad b > 0$$

$$Q = q_1 + q_2 + q_3 + \ldots + q_n$$

La función de costes para cada empresa es: $C_i(q_i) = c\, q_i$, siendo $a > c$, $i \in (1, 2, 3, \ldots, n)$

Los beneficios que obtienen las empresas por la venta del producto, iguales a su utilidad:

$$\pi_i(q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n) = q_i\, P(q_i + Q_{-i}) - C(q_i) = q_i\left[a - b(q_i + Q_{-i}) - c\right] = u_i(q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n)$$

siendo $Q_{-i} = (1-n)\, q_i$

Para determinar el equilibrio de Nash, la respuesta óptima de cualesquiera de las empresas para una estrategia q_i de las otras, se halla resolviendo la ecuación:

$$\max_{q_i} u_i(q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n) = q_i\left[a - b(q_i + Q_{-i}) - c\right] \quad \text{cuando } 0 \leq q_i \leq a/b$$

Para la maximización de beneficios se tienen en cuenta la condición de primer y segundo orden:

Condición de primer orden:

$$\frac{\vartheta u_i(q_i, q_{i-i})}{\vartheta q_i} = \frac{\vartheta q_i\left[a - b(q_i + Q_{-i}) - c\right]}{\vartheta q_i} = 0 \quad \rightarrow \quad a - 2bq_i - bQ_{-i} - c = 0$$

Condición de segundo orden (Beneficios máximos):

$$\frac{\vartheta^2 u_i(q_{i-i}, q_i)}{\vartheta q_i^2} = \frac{\vartheta(a - 2bq_i - bQ_{-i} - c)}{\vartheta q_i} = -2b < 0 \quad \text{(es un máximo)}$$

$(q_1^{\bullet}, q_2^{\bullet}, q_3^{\bullet}, \ldots, q_n^{\bullet})$ es un EN si cumple las *n* condiciones de primer orden:

$$a - 2bq_i^{\bullet} - bQ_{-i}^{\bullet} - c = 0 \ \text{ siendo } Q_{-i}^{\bullet} = (1-n)\, q_i^{\bullet} \quad \rightarrow \quad a - 2bq_i^{\bullet} - b(1-n)\, q_i^{\bullet} - c = 0$$

$$q_i^{\bullet} = \frac{a - c}{b(n+1)} \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n$$

El punto de equilibrio es: $EN = \left\{ q_1^\bullet = \dfrac{a-c}{b(n+1)}, \ \ldots, \ q_i^\bullet = \dfrac{a-c}{b(n+1)}, \ \ldots, \ q_n^\bullet = \dfrac{a-c}{b(n+1)} \right\}$

Cantidad producida en equilibrio: $Q^\bullet = n \,.\, \dfrac{a-c}{b(n+1)}$

Precio en equilibrio: $P(Q^\bullet) = a - bQ^\bullet = a - b\,.\,n\,.\,\dfrac{a-c}{b(n+1)} = \dfrac{a+nc}{n+1}$

Beneficios en equilibrio: $u_i^\bullet = q_i^\bullet \left[a - b(q_i + Q_{-i}) - c \right] = \dfrac{(a-c)}{b(n+1)} \left[a - n\dfrac{a-c}{n+1} - c \right] = \dfrac{(a-c)^2}{b(n+1)^2}$

Beneficio total (neto) en equilibrio: $U^\bullet = u_1^\bullet + u_2^\bullet + \ \ldots \ + u_n^\bullet = \dfrac{n(a-c)^2}{b(n+1)^2}$

El Oligopolio de Cournot es un dilema del prisionero por tener las empresas incentivos para no cooperar, al ser los beneficios mayores que los que se obtienen cuando cooperan.

<u>Sin cooperar</u>: Las cantidades a producir por cada una de las empresas serían $q_1^\bullet = \dfrac{a-c}{b\,(n+1)}$ para todo $i = (1, 2, 3, \ \ldots \ , n)$ que conducen a unos beneficios individuales de $u_1^\bullet = \dfrac{(a-c)^2}{b(n+1)^2} \quad \forall i \in (1, 2, 3, \ \ldots \ , n)$

<u>Cooperando</u>: Cuando se convierten en un monopolio cooperando, la producción de cada una de las empresas es $q_1^\bullet = \dfrac{a-c}{2nb} \quad \forall i \in (1, 2, 3, \ \ldots \ , n)$ y sus beneficios individuales serían

$$u_i = q_i \left[a - b(q_i + Q_{-i}) - c \right] = \frac{(a-c)^2}{4nb} \quad \forall i \in (1, 2, 3, \ \ldots \ , n)$$

Los beneficios cooperando son mayores que si no cooperan: $\dfrac{(a-c)^2}{4nb} > \dfrac{(a-c)^2}{b(n+1)^2}$

DUOPOLIO DE BERTRAND: COMPETENCIA EN PRECIOS

Una crítica común al modelo de la competencia en cantidades de Cournot es que muchas veces la variable estratégica elegida por las empresas es el precio.

Modelo de Bertrand:

Las empresas producen artículos diferenciados

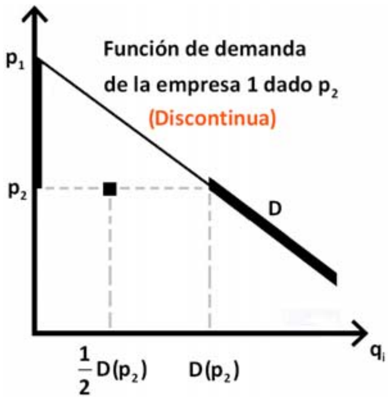
Pueden elegir el precio de venta: p_i precio de venta de la empresa i

La demanda de un producto es elástica: $q_i(p_i, p_j) = a - p_i + b p_j$

Coste de producción unitario c igual para las dos empresas

El equilibrio de Bertrand es el equilibrio de Nash de competencia en precios.

$$q_i(p_i, p_j) = \begin{cases} 0 & p_i > p_j \\ \dfrac{1}{2} D(p_i) & p_i = p_j \\ D(p_i) & p_i < p_j \end{cases}$$



Espacio de estrategias de cada empresa $X_i = [0, \infty)$

Función de pagos (beneficios netos):

$$u_1(p_1, p_2) = q_1(p_1, p_2)(p_1 - c) = (a - p_1 + b p_2)(p_1 - c)$$

$$u_2(p_1, p_2) = q_2(p_1, p_2)(p_2 - c) = (a - p_2 + b p_1)(p_2 - c)$$

Se maximizan la función de pagos de las empresas.

Para la empresa 1: $\max_{p_1} u_i(p_1, p_2) = \max_{p_1} (a - p_1 + b p_2)(p_1 - c)$

Para la empresa i, resulta:

$$\frac{\vartheta u_1(p_1, p_2)}{\vartheta p_1} = \frac{\vartheta (a - p_1 + b p_2)(p_1 - c)}{\vartheta p_1} = a - 2p_1 + b p_2 + c = 0 \ \rightarrow \ p_1^{\bullet} = \frac{a + b p_2 + c}{2}$$

Análogamente, la respuesta óptima para la empresa 2 sería:

$$\frac{\vartheta u_2(p_1, p_2)}{\vartheta p_2} = \frac{\vartheta (a - p_2 + b p_1)(p_2 - c)}{\vartheta p_2} = a - 2p_2 + b p_1 + c = 0 \ \rightarrow \ p_2^{\bullet} = \frac{a + b p_1 + c}{2}$$

La curva de reacción de la empresa 1 es $BR_1(q_2) = \dfrac{a + bp_2 + c}{2}$

La curva de reacción de la empresa 2 es $BR_2(q_1) = \dfrac{a + bp_1 + c}{2}$

Resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} p_1^{\bullet} = \dfrac{a + bp_2 + c}{2} \\ p_2^{\bullet} = \dfrac{a + bp_1 + c}{2} \end{cases} \rightarrow \; p_2^{\bullet} = \frac{a + b\left(\dfrac{a + bp_2 + c}{2}\right) + c}{2} = \frac{(2+b)(a+c)}{4 - b^2} = \frac{a+c}{2-b} \quad (b < 2)$$

Análogamente, $p_1^{\bullet} = \dfrac{a+c}{2-b}$

El punto de equilibrio $(b < 2)$ es: $EN = \left\{ \left(p_1^{\bullet} = \dfrac{a+c}{2-b},\; p_2^{\bullet} = \dfrac{a+c}{2-b} \right) \right\}$

Obsérvese que si el precio de la empresa rival aumenta, la mejor respuesta es aumentar el precio propio: Los precios son complementarios estratégicos.

UAM
Universidad Autónoma de Madrid

Asignatura .... Grupo ....
Apellidos .... Nombre ....
Ejercicio del día ....

PARADOJA DE BERTRAND

Surge porque la demanda y los beneficios son discontinuos. Describe una situación en la que dos empresas (jugadores) llegan a un estado de equilibrio de Nash donde ambas empresas cobran un precio igual al costo marginal, pese a que son un duopolio.

La paradoja es que en modelos como la competencia Cournot, un aumento en el número de empresas se asocia a una convergencia de los precios a los costes marginales. En estos modelos alternativos de oligopolio un pequeño número de empresas de obtener beneficios positivos de los precios por encima del coste de carga.

La paradoja de Bertrand aparece raramente en la práctica, ya que los productos reales casi siempre se diferencian de alguna manera aparte del precio, las empresas tienen limitaciones en su capacidad para fabricar y distribuir, y dos empresas rara vez tienen costos idénticos.

MOTIVOS PARA NO APLICAR ESTICTAMENTE LA PARADOJA DE BERTRAND

- A veces las empresas no tienen la capacidad suficiente para satisfacer toda la demanda. Este un punto dio lugar al modelo de Bertrand-Edgeworth.
- Si se diferencian los productos de las empresas, los consumidores no pueden cambiar por completo el producto con el precio más bajo.
- la competencia de precios repetida puede provocar que el precio esté por encima de MC en equilibrio.
- Si una compañía fija su precio un poco más alto, van a seguir recibiendo la misma cantidad de compras, pero más beneficios por cada compra, por lo que la otra compañía elevará su precio, y así sucesivamente (sólo en juegos repetidos, de lo contrario la dinámica de precios son en la otra dirección).
- Si dos empresas se ponen de acuerdo en un precio, que es en su interés a largo plazo para mantener el acuerdo: Los ingresos por reducción de los precios es menor que el doble de los ingresos de mantener el acuerdo, y dura sólo hasta que la otra empresa reduce sus propios precios.

CONTRIBUCIÓN VOLUNTARIA A UN BIEN PÚBLICO

Los consumidores 1 y 2 deciden contribuir a un bien público.

El consumidor 1 tiene una riqueza w_1 y su contribución es c_1, mientras que el consumidor 2 tiene una riqueza w_2 y su contribución es c_2.

La cantidad total de bien público será la suma de las contribuciones $(c_1 + c_2)$

Los pagos: $\begin{cases} u_1(c_1, c_2) = (c_1 + c_2)(w_1 - c_1) \\ u_2(c_1, c_2) = (c_1 + c_2)(w_2 - c_2) \end{cases}$

Se resuelve el problema de maximización de los consumidores calculando el EN:

$\max\ u_i(c_1, c_2) = (c_1 + c_2)(w_1 - c_1)$ sujeto a $0 \le c_1 \le w_1$

$$\frac{\vartheta u_1(c_1, c_2)}{\vartheta c_1} = \frac{\vartheta\left[(c_1 + c_2)(w_1 - c_1)\right]}{\vartheta c_1} = w_1 - 2c_1 - c_2 = 0 \ \rightarrow\ c_1^{\bullet} = \frac{w_1 - c_2}{2}$$

Análogamente el consumidor 2: $c_2^{\bullet} = \dfrac{w_2 - c_1}{2}$

Resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} c_1^{\bullet} = \dfrac{w_1 - c_2}{2} \\ c_2^{\bullet} = \dfrac{w_2 - c_1}{2} \end{cases} \ \rightarrow\ c_2^{\bullet} = \frac{w_2 - \dfrac{w_1 - c_2}{2}}{2} \ \rightarrow\ c_2^{\bullet} = \frac{2w_2 - w_1}{3}$$

En consecuencia, $c_1^{\bullet} = \dfrac{2w_1 - w_2}{3}$

El punto de equilibrio es: $EN = \left\{\left(c_1^{\bullet} = \dfrac{2w_1 - w_2}{3},\ c_2^{\bullet} = \dfrac{2w_2 - w_1}{3}\right)\right\}$

Es fácil mostra que la solución no es eficiente.

Un duopolio se enfrenta a la curva de demanda del mercado $P = 30 - Q$, siendo Q la producción total de la industria ofrecida por las empresas A y B. Se supone que las empresas tienen una estructura de dostes tal que sus costes marginales son nulos.

a) Hallar la cantidad producida en equilibrio y los beneficios obtenidos

b) Calcular la cantidad producida en equilibrio y los beneficios obtenidos si las empresas formasen un monopolio.

c) Hallar el equilibrio de cantidades y precios, sabiendo que ambas empresas tienen un coste marginal de 12 u.m.

Solución:

a) La función de demanda inversa, función que establece los precios, es decreciente y lineal en el intervalo $[0, 30]$, determinada por la función:

$$P(Q) = \begin{cases} 30 - Q & Q < 30 \\ 0 & Q \geq 30 \end{cases} \qquad \text{donde} \begin{cases} 30 \equiv \text{Tamaño del mercado} \\ -1 \equiv \text{Sensibilidad del cosumidor al precio} \end{cases}$$

$$Q = q_A + q_B \qquad CM_i(q_i) = c\,q_i = 0 \quad i = A, B$$

La utilidad de cada empresa es el beneficio que obtienen en la venta del producto. Es decir, la función de pagos (beneficios netos) es:

$$u_A(q_A, q_B) = q_A\left[30 - q_A - q_B\right] - c\,q_A = q_A\left[30 - q_A - q_B - c\right] = q_A\left[30 - q_A - q_B\right]$$

$$u_B(q_A, q_B) = q_B\left[30 - q_A - q_B\right] - c\,q_B = q_B\left[30 - q_A - q_B - c\right] = q_B\left[30 - q_A - q_B\right]$$

El objetivo es determinar el punto de equilibrio entre las dos empresas, esto es, determinar el equilibrio de Nash.

La respuesta óptima de cualquiera de las dos empresas para una estrategia fijada de la otra $(q_A \text{ o } q_B)$ se determina (en el caso de la empresa A) resolviendo la función:

$$\max_{q_A} u_A(q_A, q_B) = q_A(30 - q_A - q_B) \qquad 0 \leq q_A \leq 30$$

Se trata de obtener el máximo beneficio o el máximo pago, solución que tiene que estar en el intervalo $\left[0, 30\right]$, donde se cumple que la cantidad que van a producir ambas empresas es positiva y además que para cada cantidad producida los beneficios son máximos. Estas dos situaciones se denominan, respectivamente, condiciones de *primer* y *segundo orden*

Condición de primer orden:

$$\frac{\vartheta u_A(q_A, q_B)}{\vartheta q_A} = \frac{\vartheta q_A(30 - q_A - q_B)}{\vartheta q_A} = 0 \;\rightarrow\; 30 - 2q_A - q_B = 0 \;\rightarrow\; q_A = \frac{30 - q_B}{2}$$

UAM Universidad Autónoma de Madrid

Asignatura .... Grupo ....
Apellidos .... Nombre ....
Ejercicio del día ....

(IMPRESO EN PAPEL RECICLADO) UNICAMENTE PARA USO ESCOLAR

Condición de segundo orden (Beneficio máximo):

$$\frac{\vartheta^2 u_A(q_A, q_B)}{\vartheta q_A^2} = \frac{\vartheta(30 - 2q_A - q_B)}{\vartheta q_A} = -2 < 0 \text{ (es un máximo)}$$

La respuesta óptima de la empresa A es $BR_A(q_B) = \dfrac{30 - q_B}{2}$

La mejor respuesta de la empresa B es $BR_B(q_A) = \dfrac{30 - q_A}{2}$

Si ambas son las respuestas óptimas, significa que $q_A^\bullet = \dfrac{30 - q_B^\bullet}{2}$ es la respuesta óptima para $q_B^\bullet = \dfrac{a - q_A^\bullet}{2}$

y $q_B^\bullet$ es la respuesta óptima de $q_A^\bullet$, por tanto $EN = \left\{(q_A^\bullet, q_B^\bullet)\right\}$

Resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} q_A^\bullet = \dfrac{30 - q_B^\bullet}{2} \\ q_B^\bullet = \dfrac{30 - q_A^\bullet}{2} \end{cases} \rightarrow \ q_B^\bullet = \frac{30 - \left(\dfrac{30 - q_B^\bullet}{2}\right)}{2} = \frac{30 + q_B^\bullet}{4} \ \rightarrow \ q_B^\bullet = \frac{30}{3} = 10 \text{ u.c}$$

Análogamente, $q_A^\bullet = \dfrac{30}{3} = 10$ u.c

El punto de equilibrio es: $EN = \left\{\left(q_A^\bullet = 10,\ q_B^\bullet = 10\right)\right\}$

Cantidad producida en equilibrio: $Q^\bullet = q_A^\bullet + q_B^\bullet = 2 \,.\, 10 = 20$ u.m

Precio en equilibrio: $P(Q^\bullet) = 30 - Q^\bullet = 30 - 20 = 10$ u.m

Beneficios en equilibrio: $u_A^\bullet(q_A^\bullet, q_B^\bullet) = q_A^\bullet\left[30 - q_A^\bullet - q_B^\bullet\right] = 10\left[30 - 10 - 10\right] = 100$ u.m

$u_B^\bullet(q_A^\bullet, q_B^\bullet) = u_A^\bullet(q_A^\bullet, q_B^\bullet) = 100$ u.m

Beneficio total (neto) en equilibrio: $U^\bullet = 200$ u.m

El ejercicio se ha resuelto como una demostración del duopolio de Cournot cuando podía haber sido más rápido.

Si la función de demanda del mercado es

$$P(Q) = \begin{cases} a - bQ & bQ < a \\ 0 & bQ \geq a \end{cases} \quad \text{donde} \begin{cases} a \equiv \text{Tamaño del mercado} \\ -b \equiv \text{Sensibilidad del cosumidor al precio} \end{cases} \quad b > 0$$

UAM Universidad Autónoma de Madrid

Asignatura .... Grupo ....
Apellidos .... Nombre ....
Ejercicio del día ....

El punto de equilibrio es: $EN=\left\{\left(q_A^{\bullet}=\dfrac{a-c}{3b},\ q_B^{\bullet}=\dfrac{a-c}{3b}\right)\right\} \ \rightarrow\ EN=\left\{\left(q_A^{\bullet}=10,\ q_B^{\bullet}=10\right)\right\}$

Cantidad producida en equilibrio: $Q^{\bullet}=\dfrac{2(a-c)}{3b} \ \rightarrow\ Q^{\bullet}=q_A^{\bullet}+q_B^{\bullet}=2\,.\,10=20$ u.c

Precio en equilibrio: $P(Q^{\bullet})=a-bQ^{\bullet}=\dfrac{a+2c}{3} \ \rightarrow\ P(Q^{\bullet})=30-Q^{\bullet}=30-20=10$ u.m

Beneficio total (neto) en equilibrio: $U^{\bullet}=\dfrac{2(a-c)^2}{9b} \ \rightarrow\ U^{\bullet}=200$ u.m

b) Si las empresas A y B cooperasen formando un monopolio (situación prohibida por la Ley 15/2007 de 3 de julio de defensa de la competencia), si bien se trata de coludir utilizando estrategias de reducción de producción autoimpuestas, obteniendo un efecto de subida de precios y por consiguiente un aumento en los beneficios.

Las cantidades a fabricar por cada una de las empresas serían: $q_A=q_B=\dfrac{a-c}{4b}$

Cantidad producida en equilibrio: $Q^{\bullet}=q_A^{\bullet}+q_B^{\bullet}=\dfrac{a-c}{2b} \ \rightarrow\ Q^{\bullet}=15$ u.c

Precio en equilibrio: $P(Q^{\bullet})=a-bQ^{\bullet}=\dfrac{a+c}{2} \ \rightarrow\ P(Q^{\bullet})=15$ u.m

Beneficio total (neto) en equilibrio: $U^{\bullet}=\dfrac{(a-c)^2}{4b} \ \rightarrow\ U^{\bullet}=225$ u.m

Se observa que formando un monopolio la cantidad producida es menor, mientras que los beneficios obtenidos son mayores.

c) $a=30$, $b=1$, $c=12$

El punto de equilibrio es: $EN=\left\{\left(q_A^{\bullet}=\dfrac{a-c}{3b},\ q_B^{\bullet}=\dfrac{a-c}{3b}\right)\right\} \ \rightarrow\ EN=\left\{\left(q_A^{\bullet}=6,\ q_B^{\bullet}=6\right)\right\}$

Precio en equilibrio: $P(Q^{\bullet})=\dfrac{a+2c}{3}=18$ u.m

(IMPRESO EN PAPEL RECICLADO) ÚNICAMENTE PARA USO ESCOLAR

La empresa 1 (líder) y la empresa 2 (duopolio de Stackelberg) tienen una curva de demanda lineal con la siguiente demanda del mercado $P = 30 - Q$, donde $Q = q_1 + q_2$. Sus costes marginales son cero. Calcular la cantidad producida y el precio cobrado y el beneficio obtenido por cada empresa.

Solución:

a) La función de demanda inversa, función que establece los precios, decreciente y lineal en el intervalo $[0, 30]$, viene determinada por la función:

$$P(Q) = \begin{cases} 30 - Q & Q < 30 \\ 0 & Q \geq 30 \end{cases} \quad \text{donde} \begin{cases} a = 30 \equiv \text{Tamaño del mercado} \\ -1 \equiv \text{Sensibilidad del cosumidor al precio} \end{cases}$$

$$Q = q_1 + q_2 \quad CM_i(q_i) = c\,q_i = 0 \quad i = 1, 2$$

Se tienen que decidir los niveles de producción en diferentes momentos de tiempo.
La empresa 1 determina $q_1 \geq 0$ y la empresa 2 se fija en q_1 y decide $q_2 \geq 0$. Es una situación en la que hay dos etapas, que se resuelve por inducción hacia atrás.
De esta forma, se comienza resolviendo el problema de maximización de la empresa 2:

$$\max_{u_2} u_2(q_1, q_2) = q_2\left[30 - q_1 - q_2 - c\right] \qquad 0 \leq q_1 + q_2 \leq 30$$

La condición de primer orden es:

$$\frac{\vartheta u_2(q_1, q_2)}{\vartheta q_2} = \frac{\vartheta q_2(30 - q_1 - q_2 - c)}{\vartheta q_2} = 0 \;\rightarrow\; 30 - q_1 - 2q_2 - c = 0 \;\rightarrow\; q_2^{\bullet} = \frac{30 - q_1 - c}{2}$$

Se analiza la decisión de la empresa 1 (líder), sabiendo que la empresa 2 va a determinar su producción $q_2^{\bullet} = \dfrac{30 - q_1 - c}{2}$ para cualquier decisión que tome la empresa líder.

La empresa líder posee cierta ventaja, puesto que puede anticiparse a la respuesta de la empresa 2 al resolver su problema de maximización, sustituyendo q_2 por su valor.
De este modo, el problema de maximización de la empresa 1 es:

$$\max_{u_1} u_1(q_1, q_2^{\bullet}) = q_1(30 - q_1 - q_2^{\bullet} - c) = q_1\left[30 - q_1 - \frac{30 - q_1 - c}{2} - c\right] = q_1\left[\frac{30 - q_1 - c}{2}\right]$$

La condición de primer orden es:

$$\frac{\vartheta u_1(q_1, q_2)}{\vartheta q_1} = \frac{\vartheta}{\vartheta q_1}\left(q_1\left[\frac{30 - q_1 - c}{2}\right]\right) = 0 \;\rightarrow\; 30 - 2q_1 - c = 0 \;\rightarrow\; q_1^{\bullet} = \frac{30 - c}{2} = \frac{30 - 0}{2} = 15 \text{ u.c}$$

Sustituyendo en la ecuación de $q_2^{\bullet}$, resulta:

Universidad Autónoma de Madrid

Asignatura .... Grupo ....
Apellidos .... Nombre ....
Ejercicio del día ....

$$q_2^{\bullet}=\frac{30-q_1-c}{2} \;\rightarrow\; q_2^{\bullet}=\frac{30-\dfrac{30-c}{2}-c}{2}=\frac{30-c}{4}=\frac{30-0}{4}=7,5 \text{ u.c}$$

El equilibrio de Nash perfecto en subjuegos $\text{ENPS}=\left\{\left(q_1^{\bullet}=15\,,\; q_2^{\bullet}=7,5\right)\right\}$

Cantidad producida en equilibrio: $Q^{\bullet}=q_1^{\bullet}+q_2^{\bullet}=15+7,5=22,5 \text{ u.c}$

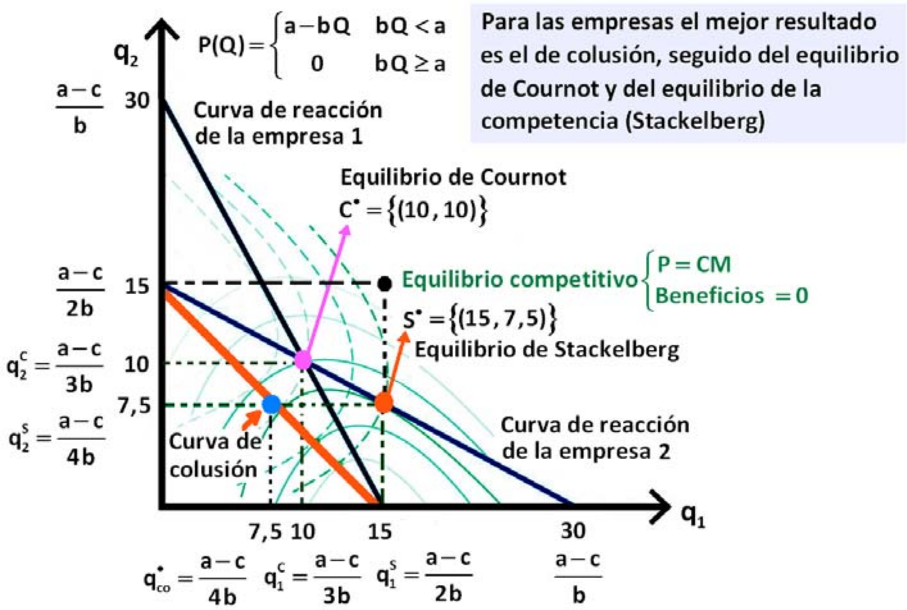
Precio en equilibrio: $P(Q^{\bullet})=a-Q^{\bullet}=a-\dfrac{3(a-c)}{4}=\dfrac{a+3c}{4}=\dfrac{30+3\,.\,0}{4}=7,5 \text{ u.m}$

Beneficios en equilibrio de las empresas:

$$u_1^{\bullet}=\left[P(Q^{\bullet})-c\right].\,q_1^{\bullet}=\left(\frac{a+3c}{4}-c\right).\left(\frac{a-c}{2}\right)=\frac{(a-c)^2}{8}=\frac{30^2}{8}=112,5 \text{ u.m}$$

$$u_2^{\bullet}=\left[P(Q^{\bullet})-c\right].\,q_2^{\bullet}=\left(\frac{a+3c}{4}-c\right).\left(\frac{a-c}{4b}\right)=\frac{(a-c)^2}{16}=\frac{30^2}{16}=56,25 \text{ u.m}$$

La empresa líder recibe el doble de beneficios que la empresa 2.



El monopolista establece la cantidad que maximiza sus beneficios: $(q^{\bullet}=15\,,\; p^{\bullet}=15)$, con unos beneficios: $u^{\bullet}=q^{\bullet}.\,p^{\bullet}=15\,.\,15=225 \text{ u.m}$

En este caso, sus beneficios coinciden con el de colusión $(CM=0)$, no lo hacen si los costes marginales no son nulos.

Universidad Autónoma de Madrid

Asignatura .... Grupo ....

Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio del día ....

Se podía haber resuelto rápido, considerando el planteamiento general de la función de demanda inversa:

$$P(Q)=\begin{cases} a-bQ & bQ<a \\ 0 & bQ\geq a \end{cases} \quad \text{donde} \begin{cases} a \equiv \text{Tamaño del mercado} \\ -b \equiv \text{Sensibilidad del cosumidor al precio} \end{cases} \quad b>0$$

$$\text{ENPS}=\left\{\left(q_1^{\bullet}=\frac{a-c}{2b},\ q_2^{\bullet}=\frac{a-c}{4b}\right)\right\} \xrightarrow{\overline{a=30\,,\ b=1\,,\ c=0}} \text{ENPS}=\left\{\left(q_1^{\bullet}=15\text{ u.c}\,,\ q_2^{\bullet}=7{,}5\text{ u.c}\right)\right\}$$

Precio en equilibrio: $P(Q^{\bullet})=a-bQ^{\bullet}=\dfrac{a+3c}{4} \rightarrow P(Q^{\bullet})=\dfrac{30}{4}=7{,}5\text{ u.m}$

Beneficios en equilibrio de las empresas:

$$u_1^{\bullet}=\frac{(a-c)^2}{8b} \rightarrow u_1^{\bullet}=\frac{30^2}{8}=112{,}5\text{ u.m}$$

$$u_2^{\bullet}=\frac{(a-c)^2}{16b} \rightarrow u_2^{\bullet}=\frac{30^2}{16}=56{,}25\text{ u.m}$$

Beneficio total (neto) en equilibrio: $U^{\bullet}=\dfrac{(a-c)^2}{8b}=\dfrac{3(a-c)^2}{16b} \rightarrow U^{\bullet}=\dfrac{3\,.\,30^2}{16}=168{,}75\text{ u.m}$

Siendo la función de demanda inversa $P = 100 - 0,5Q$, donde $Q = q_1 + q_2$, y las funciones de costos $CT_1 = 5q_1$, $CT_2 = 0,5q_2^2$

a) Hallar el equilibrio desde el punto de vista de Cournot

b) ¿Qué ocurre si la empresa 1 actúa como líder y la empresa 2 como seguidora?

Solución:

a) La utilidad de la empresa 1 es el beneficio que obtiene en la venta del producto. Es decir, la función de pago (beneficio neto) es:

$$u_1(q_1, q_2) = q_1\left[100 - 0,5q_1 - 0,5q_2\right] - c\,q_1 = q_1\left[100 - 0,5q_1 - 0,5q_2 - c\right]$$

Descrita la función de demanda, costes y utilidad de las empresas 1, el objetivo es determinar el punto de equilibrio entre las dos empresas, es decir, determinar el EN.

La respuesta óptima de empresa 1 para una estrategia fijada de la empresa 2 (q_2) se determina resolviendo la función:

$$\max_{q_1} u_1(q_1, q_2) = q_1\left[100 - 0,5q_1 - 0,5q_2 - c_1\right] \qquad 0 \le q_1 \le 100/0,5 \qquad c_1 = CM_1 = \frac{dCT_1}{dQ_1} = 5$$

Para la maximización de beneficios se tienen en cuenta la condición de primer y segundo orden:

Condición de primer orden:

$$\frac{\vartheta u_1(q_1, q_2)}{\vartheta q_1} = \frac{\vartheta q_1\left[100 - 0,5q_1 - 0,5q_2 - c_1\right]}{\vartheta q_i} = 0 \;\rightarrow\; 100 - q_1 - 0,5q_2 - c_1 = 0$$

$$c_1 = CM_1 = \frac{dCT_1}{dQ_1} = 5 \;\rightarrow\; 100 - q_1 - 0,5q_2 - 5 = 0 \;\rightarrow\; q_1 = 95 - 0,5q_2 \quad \text{(función de reacción)}$$

Condición de segundo orden (Beneficio máximo):

$$\frac{\vartheta^2 u_1(q_1, q_2)}{\vartheta q_1^2} = \frac{\vartheta(95 - q_i - 0,5q_2)}{\vartheta q_1} = -1 < 0 \quad \text{(es un máximo)}$$

Análogamente, para la producción de la empresa 2 se obtiene:

$$\max_{q_2} u_2(q_1, q_2) = q_2\left[100 - 0,5q_1 - 0,5q_2 - c_2\right]$$

$$\frac{\vartheta u_2(q_1, q_2)}{\vartheta q_2} = \frac{\vartheta q_2\left[100 - 0,5q_1 - 0,5q_2 - c_2\right]}{\vartheta q_2} = 0 \;\rightarrow\; 100 - 0,5q_1 - q_2 - c_2 = 0$$

$$c_2 = CM_2 = \frac{dCT_2}{dQ_2} = q_2 \;\rightarrow\; 100 - 0,5q_1 - 2q_2 = 0 \;\rightarrow\; q_2 = 50 - 0,25q_1 \quad \text{(función de reacción)}$$

Si ambas son las respuestas óptimas, significa que $q_1^\bullet = (95 - 0,5\,q_2^\bullet)$ es la respuesta óptima para $(q_2^\bullet = 50 - 0,25\,q_1^\bullet)$ y $q_2^\bullet$ es la respuesta óptima de $q_1^\bullet$, por tanto $EN = \left\{(q_1^\bullet, q_2^\bullet)\right\}$

Resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} q_1^\bullet = 95 - 0,5\,q_2^\bullet \\ q_2^\bullet = 50 - 0,25\,q_1^\bullet \end{cases} \rightarrow \quad q_2^\bullet = 50 - 0,25\,(95 - 0,5\,q_2^\bullet) \quad \rightarrow \quad q_2^\bullet = 30 \text{ u.c} \quad q_1^\bullet = 80 \text{ u.c}$$

El punto de equilibrio es: $EN = \left\{\left(q_1^\bullet = 80 \text{ u.c},\ q_2^\bullet = 30 \text{ u.c}\right)\right\}$

Cantidad producida en equilibrio: $Q^\bullet = q_1^\bullet + q_2^\bullet = 80 + 30 = 110$ u.c

El precio en equilibrio, sustituyendo en la función inversa de la demanda:

$$P = 100 - 0,5\,Q = 100 - 0,5\,.\,110 = 45 \text{ u.m}$$

Beneficios obtenidos por las empresas en equilibrio:

$$u_1(80, 30) = 80\,.\,(45 - 5) = 3200 \text{ u.m} \qquad u_2(80, 30) = 30\,.\,45 - 0,5\,.\,30^2 = 900 \text{ u.m}$$

Beneficio total de las empresas en equilibrio: $U = 4100$ u.m

b) Según el modelo de Stackelberg, si la empresa 1 es un líder los beneficios que se obtienen por la venta del producto:

$$u_1(q_1, q_2) = q_1\,P(q_1 + q_2) - C(q_1) = q_1\left[100 - 0,5\,q_1 - 0,5\,q_2 - c\right]$$

Se tienen que decidir los niveles de producción en diferentes momentos de tiempo.
La empresa líder determina $q_1 \geq 0$ y la empresa 2 se fija en q_1 y decide $q_2 \geq 0$. Es una situación en la que hay dos etapas, que se resuelve por inducción hacia atrás.
De esta forma, se comienza resolviendo el problema de maximización de la empresa 2, donde

$$\max_{u_2} u_2(q_1, q_2) = q_2\left[100 - 0,5\,q_1 - 0,5\,q_2 - c_2\right]$$

La condición de primer orden es:

$$\frac{\vartheta u_2(q_1, q_2)}{\vartheta q_2} = \frac{\vartheta q_2\left[100 - 0,5\,q_1 - 0,5\,q_2 - c_2\right]}{\vartheta q_2} = 0 \quad \rightarrow \quad 100 - 0,5\,q_1 - q_2 - c_2 = 0$$

$$c_2 = CM_2 = \frac{dCT_2}{dQ_2} = q_2 \quad \rightarrow \quad 100 - 0,5\,q_1 - 2\,q_2 = 0 \quad \rightarrow \quad q_2^\bullet = 50 - 0,25\,q_1$$

Se analiza la decisión de la empresa 1 (líder), sabiendo que la empresa 2 va a determinar su producción $q_2^\bullet = 50 - 0,25\,q_1$ para cualquier decisión que tome la empresa líder

Universidad Autónoma de Madrid

Asignatura .... Grupo ....
Apellidos .... Nombre ....
Ejercicio del día ....

La empresa líder posee cierta ventaja, puesto que puede anticiparse a la respuesta de la empresa 2 al resolver su problema de maximización, sustituyendo q_2 por su valor.

De este modo, el problema de maximización de la empresa 1 es:

$$\max_{u_1} u_1(q_1, q_2^\bullet) = q_1\left[100 - 0{,}5q_1 - 0{,}5q_2^\bullet - c_1\right] = q_1\left[100 - 0{,}5q_1 - 0{,}5(50 - 0{,}25q_1) - 5\right] =$$
$$= q_1(70 - 0{,}375q_1) = 70q_1 - 0{,}375q_1^2$$

La condición de primer orden es:

$$\frac{\vartheta u_1(q_1, q_2)}{\vartheta q_1} = \frac{\vartheta\,(70q_1 - 0{,}375q_1^2)}{\vartheta q_1} = 0 \;\rightarrow\; 70 - 0{,}75q_1 = 0 \;\rightarrow\; q_1^\bullet = \frac{70}{0{,}75} = 93{,}33 \text{ u.c}$$

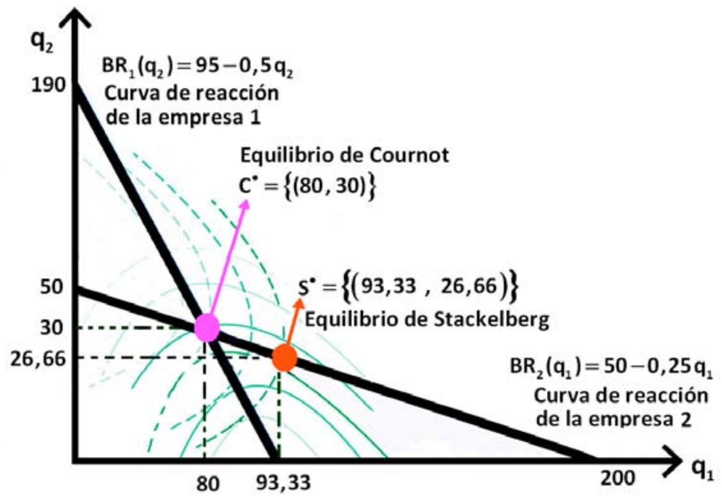
$$q_2^\bullet = 50 - 0{,}25q_1 \;\rightarrow\; q_2^\bullet = 50 - 0{,}25\,.\,93{,}33 = 26{,}66$$

$$\text{ENPS} = \left\{\left(q_1^\bullet = 93{,}33 \text{ u.c},\; q_2^\bullet = 26{,}66 \text{ u.c}\right)\right\}$$

Cantidad producida en equilibrio: $Q^\bullet = q_1^\bullet + q_2^\bullet = 93{,}33 + 26{,}33 = 120$ u.c

Precio en equilibrio: $P(Q^\bullet) = 100 - 0{,}5Q^\bullet = 100 - 0{,}5\,.\,120 = 40$ u.m

La producción con Stackelberg es mayor que la solución con Cournot $(120 \text{ u.c} > 110 \text{ u.c})$, mientras que el precio es menor $(40 \text{ u.m} < 45 \text{ u.m})$



Las empresas 1 y 2 fabrican los productos q_1 y q_2, respectivamente, donde las demandas por cada uno de estos productos se representan por: $q_1 = 100 - 2p_1 + p_2$ y $q_2 = 100 - 2p_2 + p_1$. El coste marginal de producción de cada bien es de 10 euros.

a) Determinar cantidades y precios que maximizan el beneficio con el modelo de Bertrand.

b) Determinar cantidades y precios que maximizan el beneficio cuando hay colusión

Solución:

a) Función de pagos (beneficios netos):

$$u_1(p_1, p_2) = q_1(p_1, p_2)(p_1 - c) = (100 - 2p_1 + p_2)(p_1 - 10)$$

$$u_2(p_1, p_2) = q_2(p_1, p_2)(p_2 - c) = (100 - 2p_2 + p_1)(p_2 - 10)$$

Para maximizar la función de pagos de la empresa 1:

$$\frac{\vartheta u_1(p_1, p_2)}{\vartheta p_1} = \frac{\vartheta\left[(100 - 2p_1 + p_2)(p_1 - 10)\right]}{\vartheta p_1} = 120 - 4p_1 + p_2 = 0 \quad \rightarrow \quad p_1^{\bullet} = \frac{120 + p_2}{4}$$

Análogamente, para la empresa 2: $p_2^{\bullet} = \dfrac{120 + p_1}{4}$

Resolviendo el sistema: $\begin{cases} p_1^{\bullet} = \dfrac{120 + p_2}{4} \\ p_2^{\bullet} = \dfrac{120 + p_1}{4} \end{cases} \rightarrow \quad EN = \left\{(p_1^{\bullet} = 40 \text{ euros},\ p_2^{\bullet} = 40 \text{ euros})\right\}$

Cantidad producida en equilibrio:

$$q_1 = 100 - 2p_1 + p_2 = 100 - 80 + 40 = 60 \text{ u.c} \qquad q_2 = 100 - 2p_2 + p_1 = 100 - 80 + 40 = 60 \text{ u.c}$$

Beneficio en equlibrio para cada empresa:

$$u_1(p_1, p_2) = u_2(p_1, p_2) = (100 - 2\,.\,40 + 40)(40 - 10) = 1800 \text{ euros}$$

Beneficio total de las empresas en equilibrio con Bertrand: $U = 3600$ euros

b) Si hay colusión entre las empresas, y de ser el precio la variable a seleccionar, las empresas maximizarán las utilidades conjuntas:

$$U = q_1\,.\,(p_1 - c) + q_2\,.\,(p_2 - c) = (100 - 2p_1 + p_2)(p_1 - 10) + (100 - 2p_2 + p_1)(p_2 - 10)$$

Para maximizar la función de pagos de lal empresa 1:

$$\frac{\vartheta}{\vartheta p_1}\left[(100 - 2p_1 + p_2)(p_1 - 10) + (100 - 2p_2 + p_1)(p_2 - 10)\right] = 110 - 4p_1 + 2p_2 = 0 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad p_1^{\bullet} = \frac{110 + 2p_2}{4}$$

Análogamente, para la empresa 2: $p_2^{\bullet} = \dfrac{110 + 2p_2}{4}$

Resolviendo el sistema $\begin{cases} p_1^{\bullet} = \dfrac{110+2p_2}{4} \\ p_2^{\bullet} = \dfrac{110+2p_1}{4} \end{cases} \rightarrow \ EN = \{(p_1^{\bullet} = 55 \text{ euros}, \ p_2^{\bullet} = 55 \text{ euros}\}$

Cantidad producida en equilibrio en colusión:

$q_1 = 100 - 2p_1 + p_2 = 100 - 110 + 55 = 45 \text{ u.c} \qquad q_2 = 100 - 2p_2 + p_1 = 100 - 110 + 55 = 45 \text{ u.c}$

Beneficio en equlibrio para cada empresa en colusión:

$u_1(p_1, p_2) = u_2(p_1, p_2) = 45.\ (55 - 10) = 2025 \text{ euros}$

Beneficio total de las empresas en equilibrio en colusión:

$U = q_1 . (p_1 - c) + q_2 . (p_2 - c) = 45.\ (55 - 10) + 45.\ (55 - 10) = 4050 \text{ euros}$

Si las empresas están coludidas obtendrían una urilidad de 2025 euros, superiores a las utilidades de 1800 euros que obtendrían en el equilibrio de Bertrand.

El modelo de Bertrand es más realista y tiene más sentido cuando las empresas compiten vendiendo productos diferenciados. Esta diferenciación puede ser real o percibida. Prácticamente todos los productos tienen algún grado de diferenciación, con la excepción de algunos productos financieros - la acciòm de cierta empresa o un gramo de oro de 18 quilates es el mismo independientemente a auién se compre -

Según el modelo de competencia de Bertrand, si se rompe la colusión se da inicio a una bajada de precios, hasta que llega al equilibrio de Nash en el punto de competencia perfecta.

Asignatura .... Grupo ....
Apellidos .... Nombre ....
Ejercicio del día ....

Dos compañías aéreas 1 y 2 compiten como duopolistas en una ruta. Los pasejeros consideran que el servicio de estas empresas es idéntico. La curva de demanda del mercado viene definido por $Q = 339 - P$, donde Q son miles de pasajeros y P es el precio en euros. Los costes totales para cada aerolínea son $CT_i = 147\,Q_i$.

a) Según el modelo de Cournot, determinar las cantidades y precios que maximizan el beneficio de las aerolíneas. Calcular el beneficio de cada aerolínea.
b) Considerar que la aerolínea 1 es un líder de Stackelberg.
c) Determinar el equlibrio de Bertrand, calcular el precio, la producción y el beneficio de las aerolíneas.
d) Sí las aerolíneas forman un Cartel donde cada una de ellas tiene la misma importancia. Calcular producción, precio y beneficio óptimo.
e) ¿Existen incentivos para no cumplir con la cuota de producción del Cartel?

Solución:

a) Modelo de Cournot, Sea $Q = 339 - P \;\rightarrow\; P = 339 - Q$

La utilidad de cada aerolínea es el beneficio que obtienen en la venta de billetes. Es decir, la función de pagos (beneficios netos) es:

$$u_1(q_1, q_2) = q_1\left[339 - q_1 - q_2\right] - c\,q_1 = q_1\left[339 - q_1 - q_2 - c\right]$$

$$u_2(q_1, q_2) = q_2\left[339 - q_1 - q_2\right] - c\,q_2 = q_2\left[339 - q_1 - q_2 - c\right]$$

La respuesta óptima de cualquiera de las dos aerolíneas para una estrategia fijada de la otra $(q_1 \text{ o } q_2)$. Se determina (en el caso de la aerolínea 1) resolviendo la función:

$$\max_{q_1} u_1(q_1, q_2) = q_1\,(339 - q_1 - q_2 - c) \qquad 0 \le q_1 \le 339$$

Se trata de obtener el máximo beneficio o el máximo pago, solución que tiene que estar en el intervalo $\left[0, 339\right]$, donde se cumple que la cantidad que van a producir ambas empresas es positiva y además que para cada cantidad producida los beneficios son máximos. Estas dos situaciones se denominan, respectivamente, condiciones de *primer* y *segundo orden*

Condición de primer orden:

$$\frac{\vartheta u_1(q_1, q_2)}{\vartheta q_1} = \frac{\vartheta q_1\,(339 - q_1 - q_2 - c)}{\vartheta q_1} = 0 \;\rightarrow\; 339 - 2q_1 - q_2 - c = 0 \;\rightarrow\; q_1 = \frac{339 - q_2 - c}{2}$$

Análogamente, la respuesta óptima para la aerolínea 2 sería:

$$\frac{\vartheta u_2(q_1, q_2)}{\vartheta q_2} = \frac{\vartheta q_2\,(339 - q_1 - q_2 - c)}{\vartheta q_2} = 0 \;\rightarrow\; 339 - q_1 - 2q_2 - c = 0 \;\rightarrow\; q_2 = \frac{339 - q_1 - c}{2}$$

Condición de segundo orden (Beneficios máximos):

$$\frac{\vartheta^2 u_1(q_1, q_2)}{\vartheta q_i^2} = \frac{\vartheta(339 - 2q_1 - q_2 - c)}{\vartheta q_1} = -2 < 0 \text{ (es un máximo)}$$

La respuesta óptima de la aerolínea 1 es $BR_1(q_2) = \dfrac{339 - c - q_2}{2}$ (curva de reacción)

La mejor respuesta de la aerolínea 2 es $BR_2(q_1) = \dfrac{339 - c - q_1}{2}$ (curva de reacción)

Resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} q_1^{\bullet} = \dfrac{339 - c - q_2^{\bullet}}{2} \\ q_2^{\bullet} = \dfrac{339 - c - q_1^{\bullet}}{2} \end{cases} \rightarrow \; q_2^{\bullet} = \dfrac{339 - c - \left(\dfrac{339 - c - q_2^{\bullet}}{2}\right)}{2} = \dfrac{339 - c + q_2^{\bullet}}{4} \; \rightarrow \; q_2^{\bullet} = \dfrac{339 - 147}{3} = 64$$

$$CT_i = 147\,Q_i \quad \Rightarrow \quad CM_i = \frac{d\,CT_i}{d\,Q_i} = 147$$

Análogamente, $q_1^{\bullet} = 64$

El punto de equilibrio es: $EN = \left\{ \left(q_1^{\bullet} = 64 \text{ billetes},\; q_2^{\bullet} = 64 \text{ billetes} \right) \right\}$

Cantidad producida en equilibrio: $Q^{\bullet} = q_1^{\bullet} + q_2^{\bullet} = 128$ billetes

El precio en equilibrio, sustituyendo en la función inversa de la demanda:

$$P = 339 - Q = 339 - 128 = 211 \text{ euros}$$

Beneficios obtenidos por las aerolíneas en equilibrio:

$u_1(64, 64) = 64\,.\,(211 - 147) = 4096$ euros $\qquad u_2(64, 64) = 64\,.\,(211 - 147) = 4096$ euros

Beneficio total de las aerolíneas en equilibrio: $U = 8192$ euros

b) Según el modelo de Stackelberg hay decidir los niveles de producción en diferentes momentos de tiempo. La aerolínea líder determina $q_1 \geq 0$ y la aerolínea 2 se fija en q_1 y decide $q_2 \geq 0$.
Es una situación en la que hay dos etapas, que se resuelve por inducción hacia atrás.
De esta forma, se comienza resolviendo el problema de maximización de la aerolínea 2 , donde:

$$\max_{q_1} u_1(q_1, q_2) = q_1\,(339 - q_1 - q_2 - c)$$

$$\frac{\vartheta u_2(q_1, q_2)}{\vartheta q_2} = \frac{\vartheta q_2\,(339 - q_1 - q_2 - c)}{\vartheta q_2} = 0 \;\rightarrow\; 339 - q_1 - 2q_2 - c = 0 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; q_2 = \frac{339 - q_1 - 147}{2} = 96 - \frac{q_1}{2}$$

Se analiza la decisión de la aerolínea líder, sabiendo que la aerolínea 2 va a determinar su producción $q_2^{\bullet} = 96 - \dfrac{q_1}{2}$ para cualquier decisión que tome la aerolínea líder.

La aerolínea líder posee cierta ventaja, puesto que puede anticiparse a la respuesta de la aerolínea 2 al resolver su problema de maximización, sustituyendo q_2 por su valor.

De este modo, el problema de maximización de la aerolínea 1 es:

$$\max_{u_1} u_1(q_1, q_2^\bullet) = q_1(339 - q_1 - q_2^\bullet - c) = q_1\left[339 - q_1 - \left(96 - \frac{1}{2}q_1\right) - 147\right] =$$

$$= q_1\left(96 - \frac{1}{2}q_1\right) = 96q_1 - \frac{1}{2}q_1^2$$

La condición de primer orden es:

$$\frac{\vartheta}{\vartheta q_1}\left(96q_1 - \frac{1}{2}q_1^2\right) = 0 \;\rightarrow\; 96 - q_1 = 0 \;\rightarrow\; q_1^\bullet = 96 \text{ billetes}$$

$$q_2^\bullet = 96 - \frac{1}{2}q_1 \;\rightarrow\; q_2^\bullet = 48 \text{ billetes}$$

$$\text{ENPS} = \left\{\left(q_1^\bullet = 96 \text{ billetes},\; q_2^\bullet = 48 \text{ billetes}\right)\right\}$$

Cantidad producida en equilibrio: $Q^\bullet = q_1^\bullet + q_2^\bullet = 96 + 48 = 144$ billetes

Precio en equilibrio: $P(Q^\bullet) = 339 - Q^\bullet = 339 - 144 = 195$ euros

Beneficio en equlibrio para la aerolínea líder y la aerolínea 2, respectivamente, es:

$u_1 = 195\,.\,96 - 147\,.\,96 = 4608$ euros $\qquad u_2 = 195\,.\,48 - 147\,.\,48 = 2304$ euros

Beneficio total de las aerolíneas en equilibrio con Stackelberg: $U = 6912$ euros

La producción con Stackelberg es mayor que la producción con Cournot $(144 \text{ billetes} > 128 \text{ billetes})$, mientras que el precio es menor $(195 \text{ euros} < 211 \text{ euros})$

c) La paradoja de Bertrand surge porque la demanda y los beneficios son discontinuos: Quien vende al menor precio se lleva toda la demanda. Una forma de escapar a la paradoja es tener un producto diferenciado.

PARADOJA: Sí los clientes estiman que el servicio es idéntico demandarán pasajes a la aerolínea que venda billetes a menor precio. Sí una aeeolínea baja su precio se apodera de todo el mercado y actúa como monopolista.
La reacción de la otra aerolínea es bajar más el precio para quedarse con todo el mercado actuando de monopolista.
La guerra de precios continuará hasta que el precio baje al nivel del coste marginal. Siendo el mismo coste marginal $CM_i = 147$ $(i = 1, 2)$, el precio bajará hata el coste marginal:

$$P = 339 - Q = CM = 147 \;\rightarrow\; Q = 192 = 96 + 96 \;\rightarrow\; u_1 = u_2 = 0 \;\rightarrow\; U = 0$$

Se asume que $q_1 = q_2 = 96$ pensando que la competitividad entre las aerolíneas conducirá como máximo a tomar la mitad del mercado.

d) Un Cartel es el acuerdo entre las dos aerolíneas con el fin de eliminar la competencia, obteniendo un poder sobre el mercado aeronáutico para obtener los mayores beneficios posibles en perjuicio de los pasajeros. Las consecuencias son las mismas que con un mercado monopolista, a diferencia que se reparten los beneficios totales.
Actualmente, el término se aplica a los acuerdos que regulan la competencia en el comercio internacional.

Siendo $q_1 = q_2$, la utilidad de cada aerolínea será:

$$u_1(q_1, q_2) = q_1[339 - q_1 - q_2] - c\,q_1 = q_1[339 - 2q_1 - c]$$

$$u_2(q_1, q_2) = q_2[339 - q_1 - q_2] - c\,q_2 = q_2[339 - 2q_2 - c]$$

El beneficio óptimo de la aerolínea 1 se obtiene maximizando la función:

$$\max_{q_1} u_1(q_1, q_2) = q_1(339 - 2q_1 - 147) = q_1(192 - 2q_1) = 192\,q_1 - 2\,q_1^2$$

$$\frac{\vartheta}{\vartheta q_1}(192\,q_1 - 2\,q_1^2) = 192 - 4\,q_1 = 0 \quad \rightarrow \quad q_1^{\bullet} = 48 \text{ billetes}$$

Análogamente, $q_2^{\bullet} = 48$ billetes

Cantidad producida en equilibrio: $Q^{\bullet} = q_1^{\bullet} + q_2^{\bullet} = 48 + 48 = 96$ billetes

Precio en equilibrio: $P(Q^{\bullet}) = 339 - Q^{\bullet} = 339 - 96 = 243$ euros

Beneficio en equlibrio para cada aerolínea:

$$u_1 = u_2 = 243\,.\,48 - 147\,.\,48 = 4608 \text{ euros}$$

Beneficio total de las aerolíneas en equilibrio: $U = 9216$ euros

e) El Cartel maximiza beneficios conjuntos en el mercado si la producción conjunta es de 96 unidades, asumiendo (en la medida que las aerolíneas tienen los mismos costes) producirá 48 unidades cada una.

Si la aerolínea 1 sabe que la aerolínea 2 va a producir 48 unidades cumpliendo su acuerdo en el cartel, la demanda residual del mercado será:

$$Q = 339 - P \quad \rightarrow \quad Q_1 + 48 = 339 - P \quad \rightarrow \quad Q_1 = 291 - P$$

La utilidad de la aerolínea 1 será:

$$u_1(q_1, q_2) = q_1[291 - q_1 - 147] = q_1[144 - q_1] = 144\,q_1 - q_1^2$$

UAM Universidad Autónoma de Madrid

Asignatura .... Grupo ....
Apellidos .... Nombre ....
Ejercicio del día ....

(IMPRESO EN PAPEL RECICLADO) ÚNICAMENTE PARA USO ESCOLAR

Para maximizar el beneficio de la aerolínea 1:

$$\frac{\vartheta}{\vartheta q_1}(144\,q_1 - q_1^2) = 144 - 2\,q_1 = 0 \quad \rightarrow \quad q_1^{\bullet} = 72 \text{ billetes}$$

Cantidad producida en equilibrio: $Q^{\bullet} = q_1^{\bullet} + 48 = 72 + 48 = 120$ billetes

Precio en equilibrio: $P(Q^{\bullet}) = 339 - Q^{\bullet} = 339 - 120 = 219$ euros

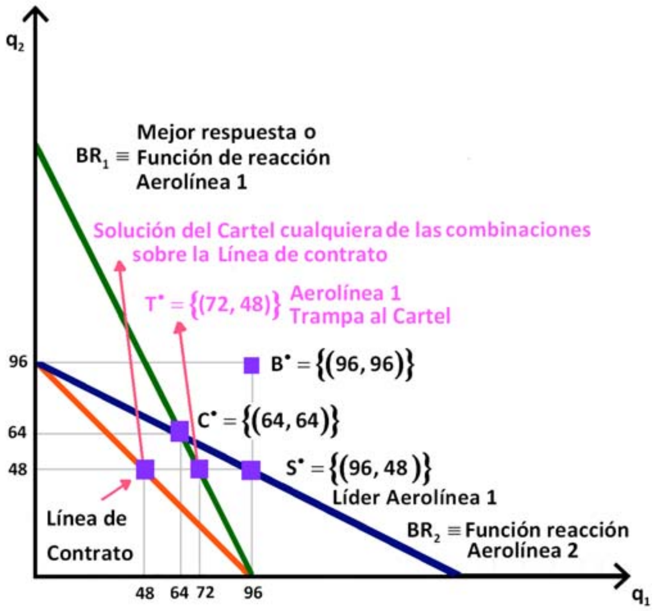
Beneficio en equlibrio para cada aerolínea:

$u_1 = 219\,.\,72 - 147\,.\,72 = 5184$ euros $\qquad u_2 = 219\,.\,48 - 147\,.\,48 = 3456$ euros

Beneficio total de las aerolíneas en equilibrio: $U = 8640$ euros

Se observa que si las dos aerolíneas respetan las cuotas de producción establecidas por el Cartel, cada una obtiene un beneficio de 4608 euros.

Si la aerolínea 1 asume que la aerolínea 2 va a respetar el acuerdo del Cartel encuentra más beneficioso que ella no lo respete, consiguiendo 72 billetes (en lugar de 48) y un beneficio de 5184 euros.

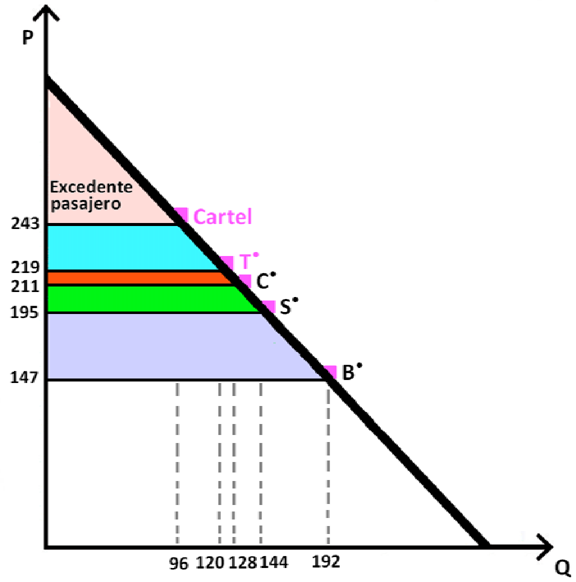


Considerando las producciones calculadas sobre la función de demanda del mercado, se puede hacer una estimación del excedente del pasajero (cantidad máxima que está dispuesto a pagar y lo que en realidad paga) para cada una de estas situaciones.

Asignatura .... Grupo ....

Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio del día ....



El excedente se puede interpretar como áreas de triángulos que se pegan unos encima de otros.

Mientras más alto el precio de la solución menor será el excedente del pasajero, como ocurre en la solución bajo Cartel. El precio es 243 y el excente del consumidor es el área del triángulo.

En esta línea, el excedente del consumidor es mayor en la solución de Bertrand $B^{\bullet}$ y menor en la solución de Cournot $C^{\bullet}$

TEORÍA DE LAS SUBASTAS

Una subasta es un mecanismo de venta o compra caracterizado por un conjunto de reglas por el que se determina la asignación de recursos y su precio en función de las pujas de los participantes

La Teoría de las Subastas se estudian por:

- Formación de precios: Identificar cómo se forman los precios en presencia de información asimétrica.
- Relevancia empírica: Subastas de arte, licencias de franquicia, construcciones públicas, y en todos los mercados.

Porqué se utilizan ciertos mecanismos de subastas.

Mejora en el diseño de mecanismos.

ESTRATEGIA DEL VENDEDOR DEL OBJETO SUBASTADO:

¿Cuál es el mejor mecanismo para maximizar ingresos?

¿Es conveniente exigir un pago para participar?

¿Conviene establecer un precio mínimo?

¿Conviene revelar información sobre el valor del objeto?

¿Qué hacer para evitar la colusión?

ESTRATEGIA DEL COMPRADOR DEL OBJETO SUBASTADO:

¿Cuál deberia ser mi puja óptima?

¿Cuál es el comportamiento esperado de los otros pujadores?

¿Se puede obtener informacióm sobre el valor del objeto a través de las pujas de los otros compradores?

Si puedo influir en el tipo de subasta, ¿qué tipo de subasta me conviene más?

CLASIFICACIÓN DE LAS SUBASTAS:

Valoraciones de los compradores:
- Privadas (Objeto de un pintor)
- Comunes (Explotaciones pretolíferas)

Información sobre las valoraciones de otros compradores:
- Completa: Subastas eléctricas
- Incompleta: Subastas de UMTS

Número de objetos a la venta:
- Único: Una obra de arte
- Múltiples: Subastas de bonos del Estado

SUBASTAS DE UN OBJETO:

A SOBRE CERRADO: $\begin{cases} \text{Al primer precio (contratación pública)} \\ \text{Al segundo precio} \end{cases}$

En subatas al primer precio el pujagor con la puja más alta gana y paga su propia puja.

En subastas al segundo precio el pujador con la puja más alta gana y paga la siguiente puja.

ABIERTAS ORALES: $\begin{cases} \text{Descendente u Holandesa (lonjas de pescado)} \\ \text{Ascendente o Inglesa (subastas de arte)} \end{cases}$

En la subata Descendente u Holandesa el precio baja hasta que un pujador lo compra.
En la subata Ascendente o Inglesa el precio sube hasta que solo queda un pujador.

INFORMACIÓN INCOMPLETA: ESCENARIO SUBASTA A SOBRE CERRADO

Dos jugadores (compradores) participan en una subasta a sobre cerrado para adquirir un objeto. Las acciones posibles con sus pujas son $A_1 = A_2 = b_i \geq 0 \quad i = 1, 2$

Los jugadores tienen una valoración v_i independiente y uniformemente distribuida $[0, 1]$, que es información privada.

SUBASTA AL PRIMER PRECIO: Es el formato estandarizado de subastas para licitaciones gubernamentales.
Cada comprador potencial determina y envía su puja de manera privada.
El subastador se encarga de vender el objeto a quien haya hecho la puja mas alta.
En caso de empates, el subastador suele asumir un sorteo aleatorio entre aquellos que hayan presentado la puja más alta.

Utilidad o pago: $u_i(b_1, b_2; v_1, v_2) = \begin{cases} 0 & b_i < b_j \\ \dfrac{v_i - b_i}{2} & b_i = b_j \\ v_i - b_i & b_i > b_j \end{cases}$

Se prueba que $\text{ENB} = \left\{ \left(b_1(v_1) = \dfrac{v_1}{2} \,,\, b_2(v_2) = \dfrac{v_2}{2} \right) \right\}$ Equilbrio de Nash Bayesaiano

Con *n* jugadores el equilibrio es $b_i(v_i) = \dfrac{(n-1)v_1}{n}$

Dada la estrategia del jugador 2, el jugador 1 gana la subasta si puja $b > \dfrac{v_2}{2} \;\rightarrow\; v_2 < 2b$

El pago del jugador 1 es: $u_1 = (v_1 - b) \,.\, p(v_2 < 2b)$

$$u_1 = (v_1 - b) \,.\, \int_0^{2b} f(v_2)\, dv_2 = (v_1 - b) \,.\, [v_2]_0^{2b} = 2b(v_1 - b)$$

Asignatura .... Grupo ....
Apellidos .... Nombre ....
Ejercicio del día ....

El valor que maximiza u_1 es: $\dfrac{\vartheta\left[2b(v_1-b)\right]}{\vartheta b}=2v_1-4b=0 \;\rightarrow\; b_1(v_1)=\dfrac{v_1}{2}$

Análogamente, el valor que maximiza u_2 es $b_2(v_2)=\dfrac{v_2}{2}$

En el equilibrio cada jugador (comprador) puja la mitad de su valoración. Consecuencia de que se enfrentan a una tensión:

- Cuanto mayor es la puja, mayor es la probabilidad de ganar.
- Cuanto menor es la puja, mayor es el pago en caso de ganar.

SUBASTA AL SEGUNDO PRECIO: Subastas de Vickrey, propuestas y analizadas en 1961 por William Vickrey (Nobel de Economía en 1996). En la atualidad constituyen el paradigma económico predominante para pensar las subastas.

Vickrey sostenía la necesidad del uso de subastas diseñadas especialmente cuando se trata de bienes publicos importantes. En una subasta de Vickrey el bien es vendido al postor mas alto, al precio de la puja perdedora más alta.

Gana el jugador que hace la puja más alta, pero paga por el objeto una cantidad igual a la segunda puja más alta.

Se modela como en la subasta al primer precio:

Utilidad o pago: $u_i(b_1,b_2\,;v_1,v_2)=\begin{cases}0 & b_i<b_j\\ \dfrac{v_i-b_i}{2} & b_i=b_j\\ v_i-b_i & b_i>b_j\end{cases}$

Se prueba que $\text{ENB}=\left\{\left(b_1(v_1)=v_1,\; b_2(v_2)=v_2\right)\right\}$

Dada la estrategia del jugador 2, con la regla de decisión $b(v)=v$, el jugador 1 gana la subasta si puja $b>v_2 \;\rightarrow\; v_2<b$

En tal caso, la ganancia del jugador 1 es: $u_1=(v_1-v_2)$

$$u_1=\int_0^b(v_1-v_2)\,b(v_2)\,dv_2=\int_0^b(v_1-v_2)\,v_2\,dv_2=\int_0^b v_1v_2\,dv_2-\int_0^b v_2v_2\,dv_2=$$

$$=v_1\left[v_2\right]_0^b-\left[\frac{1}{2}v_2^2\right]_0^b=b\,v_1-\frac{1}{2}b^2$$

El valor que maximiza u_1 es: $\dfrac{\vartheta}{\vartheta b}\left[b\,v_1-\dfrac{1}{2}b^2\right]=v_1-b=0 \;\rightarrow\; b_1(v_1)=v_1$

Ya no existe la tensión de la subasta al primer precio, ahora cada jugador puja su valor.

CÁLCULO DE PUJAS EN SUBASTA A SOBRE CERRADO AL PRIMER PRECIO

Los jugadores que son neutrales al riesgo

Se supone simetría, todas las valoraciones proceden de la misma distribución

El jugador i tiene una valoración v_i independiente, que es una extracción aleatoria de una distribución uniforme $U[0,k]$

Cada jugador conoce su valoración pero no conoce la de los demás, aunque sabe que proceden de una distribución $U[0,k]$

Las funciones de puja de cada jugador son $b_i = \alpha_i v_i$, siendo $0 \leq \alpha_i \leq 1$

El pago del jugador i se resuelve: $\max u_{b_i} = (v_i - b_i)\,.\,p(ganar/b_i) + 0\,.\,[1 - p(ganar/b_i)]$

$p(ganar/b_i) \equiv$ Probabilidad que tiene el jugador i de ganar la subasta cuando realiza una puja igual a b_i

$$p(ganar/b_i) = p(b_i > b_j) = p(b_i > \alpha_j v_j) = p\left(\frac{b_i}{\alpha_j} > v_j\right) = p\left(v_j < \frac{b_i}{\alpha_j}\right) \overset{v_j \sim U[0,k]}{=} \frac{1}{k}\frac{b_i}{\alpha_j} = \frac{b_i}{k\alpha_j}$$

$$\max u_{b_i} = (v_i - b_i)\,.\,p(ganar/b_i) = (v_i - b_i)\,.\,\frac{b_i}{k\alpha_j} = \left(v_i\,.\,\frac{b_i}{k\alpha_j} - \frac{b_i^2}{k\alpha_j}\right)$$

Para calcular el valor que maximiza u_{b_i} :

$$\frac{\vartheta}{\vartheta b_i}\left(v_i\,.\,\frac{b_i}{k\alpha_j} - \frac{b_i^2}{k\alpha_j}\right) = v_i - 2b_i = 0 \quad \rightarrow \quad b_i = \frac{v_i}{2} \quad \text{puja óptima}$$

LA OFERTA GANADORA AUMENTA CON EL NÚMERO DE PUJANTES

Considerando tres jugadores, el jugador i gana la subasta cuando realiza una puja igual a b_i

$$p(ganar/b_i) = p(b_i > \alpha_j v_j)\,.\,p(b_i > \alpha_k v_k) = \left(\frac{b_i}{k\alpha}\right)^2$$

$$\max u_{b_i} = (v_i - b_i)\,.\,p(ganar/b_i) = (v_i - b_i)\,.\,\frac{b_i^2}{k^2\alpha^2} = \left(v_i\,.\,\frac{b_i^2}{k^2\alpha^2} - \frac{b_i^3}{k^2\alpha^2}\right)$$

Para calcular el valor que maximiza u_{b_i} :

$$\frac{\vartheta}{\vartheta b_i}\left(v_i\,.\,\frac{b_i^2}{k^2\alpha^2} - \frac{b_i^3}{k^2\alpha^2}\right) = 2b_i v_i - 32b_i^2 = 0 \quad \rightarrow \quad b_i = \frac{2v_i}{3} \quad \text{puja óptima}$$

Si se consideran *n* jugadores:

$$p(\text{ganar}/b_i) = p(b_i > \alpha_j v_j) \,.\, p(b_i > \alpha_k v_k) \;\ldots\; p(b_i > \alpha_n v_n) = \left(\frac{b_i}{k\alpha}\right)^{n-1}$$

$$\max u_{b_i} = (v_i - b_i) \,.\, p(\text{ganar}/b_i) = (v_i - b_i) \,.\, \frac{b_i^{n-1}}{k^{n-1}\alpha^{n-1}} = \left(v_i \,.\, \frac{b_i^{n-1}}{k^{n-1}\alpha^{n-1}} - \frac{b_i^{n}}{k^{n-1}\alpha^{n-1}}\right)$$

Para calcular el valor que maximiza u_{b_i} :

$$\frac{\vartheta}{\vartheta b_i}\left(v_i \,.\, \frac{b_i^{n-1}}{k^{n-1}\alpha^{n-1}} - \frac{b_i^{n}}{k^{n-1}\alpha^{n-1}}\right) = (n-1)\, b_i^{n-2}\, v_i - n\, b_i^{n-1} = 0 \;\rightarrow\; b_i = \frac{(n-1)v_i}{n} \quad \text{puja óptima}$$

Se observa que a medida que aumenta el número de jugadores aumenta la valoración.

PRECIO ESPERADO EN LA SUBASTA

El precio esperado por el subastador cuando se extraen *n* valoraciones independientemente de una distribución $U[0,k]$ es: $\left(\frac{n-1}{n+1}k\right)$

El valor esperado de la valoración más alta: $\frac{n}{n+1}k$

El precio esperado en la subasta y por tanto el valor esperado de la puja más alta:

$$\left(\frac{n-1}{n}\right) . \left(\frac{n}{n+1}k\right) = \frac{n-1}{n+1}k$$

PUJAS EN INCERTIDUMBRE EN SUBASTA A SOBRE CERRADO AL PRIMER PRECIO

El riesgo que asume cada jugador está estrechamente ligado a la opción que maximice su utilidad esperada con la obtención del bien que se está subastando.

Existe la probabilidad que en una subasta se enfrenten jugadores con diferentes tipos de riesgo. En este sentido, se analizan casos en que dos jugadores asume su riesgo (diferente al de su adversario).

El objetivo es determinar cuál sería la puja óptima de un jugador cuando se enfrenta a un contrincante con diferente riesgo al suyo.

OBTENCIÓN DE LAS PUJAS ÓPTIMAS A PARTIR DE UNA FUNCIÓN DE PUJA

$$\text{Diferentes pujas con distintos tipos de riesgo} \begin{cases} \text{Neutral al riesgo: } b_i = \alpha_i\, v_i \\ \text{Adverso al riesgo: } b_i = \alpha_i \sqrt{v_i} \\ \text{Amante del riesgo: } b_i = \alpha_i\, v_i^2 \end{cases}$$

Asignatura .... Grupo ....
Apellidos .... Nombre ....
Ejercicio del día ....

Dos jugadores, uno neutral al riesgo (b_i) y otro amante al riesgo (b_j)

$$p(ganar/b_i) = p(b_i > b_j) = p(b_i > \alpha_j\, v_j^2) = p\left(\sqrt{\frac{b_i}{\alpha_j}} > v_j\right) = p\left(v_j < \sqrt{\frac{b_i}{\alpha_j}}\right) \overset{v_j \sim U[0,k]}{=} \frac{1}{k}\sqrt{\frac{b_i}{\alpha_j}}$$

$$\max\, u_{b_i} = (v_i - b_i)\ .\ p(ganar/b_i) = (v_i - b_i)\ .\ \frac{1}{k}\sqrt{\frac{b_i}{\alpha_j}} = \frac{v_i\, b_i^{1/2}}{k\sqrt{\alpha_j}} - \frac{b_i^{3/2}}{k\sqrt{\alpha_j}}$$

Para calcular el valor que maximiza u_{b_i} :

$$\frac{\vartheta}{\vartheta b_j}\left[\frac{v_i\, b_i^{1/2}}{k\sqrt{\alpha_j}} - \frac{b_i^{3/2}}{k\sqrt{\alpha_j}}\right] = v_i - 3b_i = 0 \;\rightarrow\; b_i = \frac{v_i}{3} \quad \text{puja óptima neutral al riesgo}$$

Análogamente, para el jugador amante (b_j) al riesgo

$$p(ganar/b_j) = p(b_j > b_i) = p(b_j > \alpha_i\, v_i) = p\left(\frac{b_j}{\alpha_i} > v_i\right) = p\left(v_i < \frac{b_j}{\alpha_i}\right) \overset{v_i \sim U[0,k]}{=} \frac{1}{k}\,\frac{b_j}{\alpha_i}$$

$$\max\, u_{b_j} = (v_j - b_j)\ .\ p(ganar/b_j) = (v_j - b_j)\ .\ \frac{1}{k}\,\frac{b_j}{\alpha_i} = \frac{v_j\, b_j}{k\alpha_i} - \frac{b_j^2}{k\alpha_i}$$

Para calcular el valor que maximiza u_{b_j} :

$$\frac{\vartheta}{\vartheta b_j}\left[\frac{v_j\, b_j}{k\alpha_i} - \frac{b_j^2}{k\alpha_i}\right] = v_j - 2b_j = 0 \;\rightarrow\; b_j = \frac{v_j}{2} \quad \text{puja óptima amante al riesgo}$$

Dos jugadores, uno amante al riesgo (b_i) y otro adverso al riesgo (b_j)

$$p(ganar/b_i) = p(b_i > b_j) = p(b_i > \alpha_j\sqrt{v_j}) = p\left(\frac{b_i}{\alpha_j} > \sqrt{v_j}\right) = p\left(v_j < \frac{b_i^2}{\alpha_j^2}\right) \overset{v_j \sim U[0,k]}{=} \frac{1}{k}\,\frac{b_i^2}{\alpha_j^2}$$

$$\max\, u_{b_i} = (v_i - b_i)\ .\ p(ganar/b_i) = (v_i - b_i)\ .\ \frac{1}{k}\,\frac{b_i^2}{\alpha_j^2} = \frac{v_i\, b_i^2}{k\alpha_j^2} - \frac{b_i^3}{k\alpha_j^2}$$

Para calcular el valor que maximiza u_{b_i} :

$$\frac{\vartheta}{\vartheta b_i}\left[\frac{v_i\, b_i^2}{k\alpha_j^2} - \frac{b_i^3}{k\alpha_j^2}\right] = 2b_1 v_i - 3b_i^2 = 0 \;\rightarrow\; b_i = \frac{2v_i}{3} \quad \text{puja óptima amante al riesgo}$$

Análogamente, para el jugador adverso (b_j) al riesgo

$$p(\text{ganar} / b_j) = p(b_j > b_i) = p(b_j > \alpha_i\, v_i^2) = p\left(\sqrt{\frac{b_j}{\alpha_i}} > v_i\right) = p\left(v_i < \sqrt{\frac{b_j}{\alpha_i}}\right) \overset{v_i \sim U[0,k]}{=} \frac{1}{k}\,\frac{b_j^{1/2}}{\alpha_1^{1/2}}$$

$$\max u_{b_j} = (v_j - b_j)\ .\ p(\text{ganar} / b_j) = (v_j - b_j)\ .\ \frac{1}{k}\,\frac{b_j^{1/2}}{\alpha_1^{1/2}} = \frac{v_j\, b_j^{1/2}}{k\,\alpha_1^{1/2}} - \frac{b_j^{3/2}}{k\,\alpha_1^{1/2}}$$

Para calcular el valor que maximiza u_{b_j} :

$$\frac{\vartheta}{\vartheta b_j}\left[\frac{v_j\, b_j^{1/2}}{k\,\alpha_1^{1/2}} - \frac{b_j^{3/2}}{k\,\alpha_1^{1/2}}\right] = v_j - 3 b_j = 0 \ \rightarrow\ b_j = \frac{v_j}{3} \quad \text{puja óptima adverso al riesgo}$$

Dos jugadores, uno adverso al riesgo (b_i) y otro neutral al riesgo (b_j)

$$p(\text{ganar} / b_i) = p(b_i > b_j) = p(b_i > \alpha_j\, v_j) = p\left(\frac{b_i}{\alpha_j} > v_j\right) = p\left(v_j < \frac{b_i}{\alpha_j}\right) \overset{v_j \sim U[0,k]}{=} \frac{1}{k}\,\frac{b_i}{\alpha_j}$$

$$\max u_{b_i} = (v_i - b_i)\ .\ p(\text{ganar} / b_i) = (v_i - b_i)\ .\ \frac{1}{k}\,\frac{b_i}{\alpha_j} = \frac{v_i\, b_i}{k\,\alpha_j} - \frac{b_i^2}{k\,\alpha_j}$$

Para calcular el valor que maximiza u_{b_i} :

$$\frac{\vartheta}{\vartheta b_i}\left[\frac{v_i\, b_i}{k\,\alpha_j} - \frac{b_i^2}{k\,\alpha_j}\right] = v_i - 2\, b_i = 0 \ \rightarrow\ b_i = \frac{v_i}{2} \quad \text{puja óptima adverso al riesgo}$$

Análogamente, para el jugador neutral (b_j) al riesgo

$$p(\text{ganar} / b_j) = p(b_j > b_i) = p(b_j > \alpha_i \sqrt{v_i}) = p\left(\frac{b_j^2}{\alpha_1^2} > v_i\right) = p\left(v_i < \frac{b_j^2}{\alpha_1^2}\right) \overset{v_i \sim U[0,k]}{=} \frac{1}{k}\,\frac{b_j^2}{\alpha_1^2}$$

$$\max u_{b_j} = (v_j - b_j)\ .\ p(\text{ganar} / b_j) = (v_j - b_j)\ .\ \frac{1}{k}\,\frac{b_j^2}{\alpha_1^2} = \frac{v_j\, b_j^2}{k\,\alpha_1^2} - \frac{b_j^3}{k\,\alpha_1^2}$$

Para calcular el valor que maximiza u_{b_j} :

$$\frac{\vartheta}{\vartheta b_j}\left[\frac{v_j\, b_j^2}{k\,\alpha_1^2} - \frac{b_j^3}{k\,\alpha_1^2}\right] = 2 v_j - 3 b_j^2 = 0 \ \rightarrow\ b_j = \frac{2 v_j}{3} \quad \text{puja óptima neutral al riesgo}$$

UAM Universidad Autónoma de Madrid

Asignatura .... Grupo ....
Apellidos .... Nombre ....
Ejercicio del día ....

📖 En una subasta hay dos jugadores, donde todos pagan por su puja sin importar si ganó el objeto subastado. Cada jugador conoce su valoración pero no sabe cuál es la valoración del contricante, solo sabe que es una variable aleatoria que se distribuye $U[0,1]$

a) Encontrar la oferta óptima del jugador si el oponente sigue la regla de decisión $b(v) = k\,v^2$

b) En equilibrio la oferta óptima del jugador i debe seguir $b(v) = k\,v^2$, ¿cuál es el ENB?

Solución:

a) $p(\text{ganar}/b_i) = p(b_i > b_j) = p(b_i > k\,v_j^2) = p\left(\sqrt{\dfrac{b_i}{k}} > v_j\right) = p\left(v_j < \sqrt{\dfrac{b_i}{k}}\right) \overset{v_j \sim U[0,k]}{=} \sqrt{\dfrac{b_i}{k}} = \dfrac{b_i^{1/2}}{k^{1/2}}$

$$\max u_{b_i} = v_i \,.\, p(\text{ganar}/b_i) - b_i = \frac{v_i\, b_i^{1/2}}{k^{1/2}} - b_i$$

Para calcular el valor que maximiza u_{b_i}: $\dfrac{\vartheta}{\vartheta b_i}\left[\dfrac{v_i\, b_i^{1/2}}{k^{1/2}} - b_i\right] = v_i - 2\sqrt{k\,b_i} = 0 \;\rightarrow\; b_i = \dfrac{v_i^2}{4k}$

b) $b_i = \dfrac{v_i^2}{4k} = k\,v_1^2 \;\rightarrow\; k = \dfrac{1}{2} \;\rightarrow\; \text{ENB} = \left\{\left(b_1 = \dfrac{v^2}{2},\; b_2 = \dfrac{v^2}{2}\right)\right\}$

Demostrar que en una subasta de primer precio entre dos jugadores, que un jugador ofrezca su valoración, con la regla de decisión $b(v) = v$, $v \sim U[0,1]$, no es un equilibrio de Nash.

Solución:

a) $p(\text{ganar}/b_i) = p(b_i > b_j) = p(b_i > v_j) = p\,(v_j < b_i) \overset{v_j \sim U[0,1]}{=} b_i$

$$\max u_{b_i} = (v_i - b_i)\,.\,p(\text{ganar}/b_i) = (v_i - b_i)\,.\,b_i$$

Para calcular el valor que maximiza u_{b_i}: $\dfrac{\vartheta}{\vartheta b_i}\big[(v_i - b_i)\,.\,b_i\big] = v_i - 2b_i = 0 \;\rightarrow\; b_i = \dfrac{v_i}{2}$

$$\text{ENB} = \left\{\left(b_1 = \frac{v_1}{2},\; b_2 = \frac{v_2}{2}\right)\right\}$$

Si el jugador 2 puja su valoración, el jugador 1 puja prefiere pujar la mitad de la suya, con lo que no es un ENB porque tiene incentivos unilaterales a desviarse.

Herencia Subastada: Dos hermanos heredan la empresa de su padre, para decidir quien se queda con la herencia de la empresa hacen una subasta de primer precio entre ellos donde la puja más alta gana, paga su puja y se queda con la empresa. La diferencia con una subasta normal de primer precio es que el perdedor se queda con la puja del ganador. Es decir, si el hermano i gana con b_i, entonces el se queda con $v_i - b_i$ y el perdedor se queda con b_i.

Se supone que cada uno conoce su valoración, pero no la de su hermano y sabe que $v_i \sim U[0,1]$ y en equilibrio $b(v) = kv$.

Calcular la utilidad esperada en equilibrio.

Utilidad esperada: $u_i = (v_i - b_i)\,.\,p(b_i > b_j) + \int_{b_j/k}^{1} b_j(v_j)\,dv_j$

$$p(\text{ganar}/b_i) = p(b_i > b_j) = p(b_i > k\,v_j) = p\left(\frac{b_i}{k} > v_j\right) = p\left(v_j < \frac{b_i}{k}\right) \overset{v_j \sim U[0,1]}{=} \frac{b_i}{k}$$

$$\int_{b_j/k}^{1} b_j(v_j)\,dv_j = \int_{b_i/k}^{1} k\,v_j\,dv_j = k\int_{b_i/k}^{1} v_j\,dv_j = \frac{k}{2}\left[v_j^2\right]_{b_i/k}^{1} = \frac{k}{2} - \frac{b_i^2}{2k}$$

$$u_i = (v_i - b_i)\,.\,\frac{b_i}{k} + \frac{k}{2} - \frac{b_i^2}{2k^2} = \frac{v_i\,b_i}{k} - \frac{b_i^2}{k} + \frac{k}{2} - \frac{b_i^2}{2k}$$

Para calcular el valor que maximiza la utilidad esperada:

$$\frac{\vartheta}{\vartheta b_i}\left[\frac{v_i\,b_i}{k} - \frac{b_i^2}{k} + \frac{k}{2} - \frac{b_i^2}{2k}\right] = \frac{v_i}{k} - \frac{2b_i}{k} - \frac{b_i}{k} = 0 \;\rightarrow\; v_i - 3b_i = 0 \;\rightarrow\; v_i - 3\,k\,v_i = 0 \;\rightarrow\; k = \frac{1}{3}$$

La utilidad esperada en equilibrio: $u_i = \left(v_i - \dfrac{v_i}{3}\right).\,v_i + \dfrac{3}{2}\left[v_i^2\right]_{v_i}^{1} = \dfrac{3}{2} - \dfrac{5}{6}v_1^2$

Hoja nº ....

Universidad Autónoma de Madrid

Asignatura .... Grupo ....

Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio del día ....

UNICAMENTE PARA USO ESCOLAR (IMPRESO EN PAPEL RECICLADO)

Hoja nº ....

Universidad Autónoma de Madrid

Asignatura .... Grupo ....

Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio del día ....

UNICAMENTE PARA USO ESCOLAR (IMPRESO EN PAPEL RECICLADO)

Instrumentos Estadísticos Avanzados
Facultad Ciencias Económicas y Empresariales
Departamento de Economía Aplicada
Profesor: Santiago de la Fuente Fernández