

## ALGORITMO TRANSPORTE: MÉTODO VOGEL



- Método Vogel o de las Penalizaciones
- Ejercicios resueltos con Winqsb



**MÉTODO VOGEL O DE LAS PENALIZACIONES (VAM):** Una empresa energética dispone de cuatro centrales para satisfacer la demanda diaria de energía eléctrica en cuatro provincias de Castilla y León. Las centrales eléctricas pueden satisfacer, respectivamente, 80, 30, 60 y 45 millones de Kw diarios. Las necesidades de las ciudades (A, B, C, D), respectivamente, son de 70, 40, 70 y 35 millones de Kw al día. La tabla adjunta refleja el costo asociado al envío de suministro eléctrico por cada millón de Kw entre cada central y cada ciudad.

Encontrar el Coste Mínimo por el Método de Vogel o Método de las Penalizaciones.

	Ciudades			
	A	B	C	D
Central 1	5	2	7	3
Central 2	3	6	6	1
Central 3	6	1	2	4
Central 4	4	3	6	6

**Solución:**

Para aplicar el Método Vogel tiene que haber equilibrio entre la Oferta y la Demanda.

	Ciudades				Oferta
	A	B	C	D	
Central 1	5	2	7	3	80
Central 2	3	6	6	1	30
Central 3	6	1	2	4	60
Central 4	4	3	6	6	45
Demanda	70	40	70	35	215

Se determinan las medidas de penalización, se identifican los costos más bajos por fila y columna. Después se restan dichos valores y el resultado se denomina penalización.

	Ciudades				Oferta	P1
	A	B	C	D		
Central 1	5	2	7	3	80	$3 - 2 = 1$
Central 2	3	6	6	1	30	$3 - 1 = 2$
Central 3	6	1	2	4	60	$2 - 1 = 1$
Central 4	4	3	6	6	45	$4 - 3 = 1$
Demanda	70	40	70	35		
P1	$4 - 3 = 1$	$2 - 1 = 1$	$6 - 2 = 4$	$3 - 1 = 2$		

Después se identifica la fila/columna con mayor penalización, en este caso es la columna donde se encuentra el número 4.

En esa misma columna, se elige el menor costo (2) y se asigna la mayor cantidad posible para cubrir la demanda/oferta. En este caso, se le asignarán 60 millones de kw.

De este modo, la fila de la Central 3 va a desaparecer, ya que ha asignado toda su capacidad.

	Ciudades				Oferta
	A	B	C	D	
Central 1	5	2	7	3	80
Central 2	3	6	6	1	30
Central 3	6	1	60   2	4	0
Central 4	4	3	6	6	45
Demanda	70	40	10	35	

Se repite el mismo proceso con la segunda penalización

	Ciudades				Oferta	P2
	A	B	C	D		
Central 1	5	2	7	3	80	1
Central 2	3	6	6	1	30	2
Central 3	6	1	60   2	4	0	
Central 4	4	3	6	6	45	1
Demanda	70	40	10	35		
P2	1	1	0	2		

Después se identifica la fila/columna con mayor penalización, en este caso hay dos opciones con el valor 2 - Ciudad D y Central 2 - Se elige libremente la Ciudad D.

En la columna de la Ciudad D se asignan 30 millones de kw al menor costo (1).

De este modo, la fila de la Central 2 va a desaparecer, ya que ha asignado toda su capacidad.

	Ciudades				Oferta
	A	B	C	D	
Central 1	5	2	7	3	80
Central 2	3	6	6	30   1	0
Central 3	6	1	60   2	4	0
Central 4	4	3	6	6	45
Demanda	70	40	10	5	

Se repite el mismo proceso con la tercera penalización

	Ciudades				Oferta	P3
	A	B	C	D		
Central 1	5	2	7	3	80	1
Central 2	3	6	6	30   1	0	
Central 3	6	1	60   2	4	0	
Central 4	4	3	6	6	45	1
Demanda	70	40	10	35		
P3	1	1	1	3		

En la columna de la Ciudad D (mayor penalización) se elige el menor costo (3), asignando 5 millones de kw. La Ciudad D ha satisfecho su demanda, por lo que se marca. Por otra parte, la oferta de la Central 1 se reduce a 75 millones de kw.

	Ciudades					Oferta
	A	B	C	D		
Central 1	5	2	7	5	3	75
Central 2	3	6	6	30	1	0
Central 3	6	1	60   2	4		0
Central 4	4	3	6	6		45
Demanda	70	40	10	0		

Se repite el mismo proceso con la cuarta penalización

	Ciudades					Oferta	P4
	A	B	C	D			
Central 1	5	2	7	5	3	75	3
Central 2	3	6	6	30	1	0	
Central 3	6	1	60   2	4		0	
Central 4	4	3	6	6		45	1
Demanda	70	40	10	35			
P4	1	1	1				

En la fila de la Central 1 (mayor penalización) se elige el menor costo (2), asignando 40 millones de kw. La Ciudad B ha satisfecho su demanda, por lo que se marca. Por otra parte, la oferta de la Central 1 se reduce a 35 millones de kw.

	Ciudades					Oferta
	A	B	C	D		
Central 1	5	40   2	7	5	3	35
Central 2	3	6	6	30	1	0
Central 3	6	1	60   2	4		0
Central 4	4	3	6	6		45
Demanda	70	0	10	0		

Se repite el mismo proceso con la quinta penalización

	Ciudades						Oferta	P5
	A	B		C	D			
Central 1	5	40	2	7	5	3	35	2
Central 2	3	6		6	30	1	0	
Central 3	6	1	60   2		4		0	
Central 4	4	3	6	6		45	2	
Demanda	70	0		10	35			
P5	1			1				

Se adjudica 35 millones de kw a la ciudad A desde la Central 1, quedando anulada su oferta, por lo que se marca la fila de la Central 1.

	Ciudades						Oferta	
	A	B		C	D			
Central 1	35	5	40	2	7	5	3	0
Central 2	3	6		6	30	1	0	
Central 3	6	1	60   2		4		0	
Central 4	4	3	6	6		45		
Demanda	35	0		10	0			

Finalmente, desde la Central 4 se adjudica 35 millones de kw a la ciudad A y 10 millones de kw a la ciudad C.

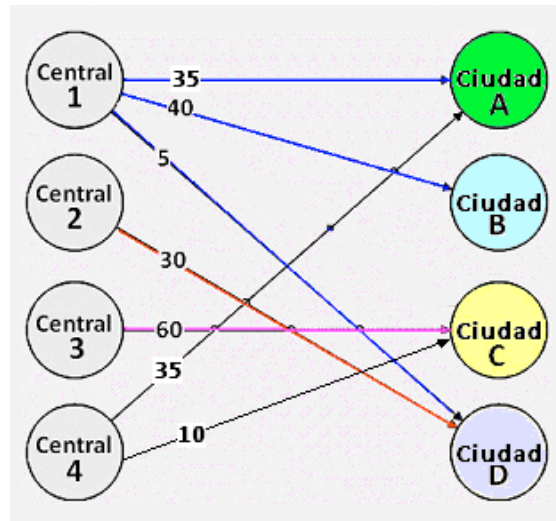
	Ciudades						Oferta	
	A	B		C	D			
Central 1	35	5	40	2	7	5	3	0
Central 2	3	6		6	30	1	0	
Central 3	6	1	60   2		4		0	
Central 4	35	4	3	10	6	6	0	
Demanda	0	0		0	0			

La demanda queda satisfecha sin superar los niveles establecidos por la oferta de cada central.

El Costo total del envío de energía por ciudad es:

$$Z_0 = 35 \times 5 + 40 \times 2 + 5 \times 3 + 30 \times 1 + 60 \times 2 + 35 \times 4 + 10 \times 6 = 620 \text{ millones euros}$$

Distribución de energía eléctrica desde las Centrales Eléctricas a las cuatro Ciudades.



**MÉTODO DEL SIMPLEX**

El método del Simplex obtiene los mejores valores para las variables decisión, esto es, aquellos valores que satisfacen simultáneamente todas las restricciones y proporcionan el valor óptimo para la función objetivo.

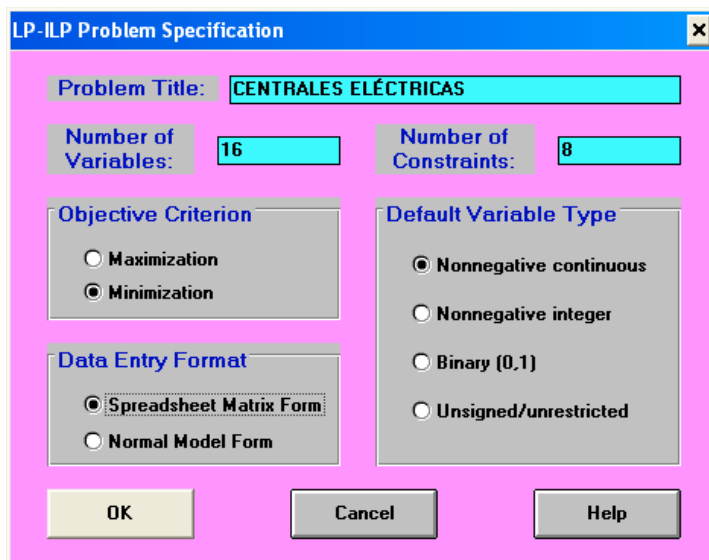
Mientras que los métodos heurísticos: Esquina Noroeste (NWC), Vogel o de las Penalizaciones (VAM), Costes Ficticios (MODI), permiten obtener una solución básica factible inicial (no artificial), próxima a la solución óptima, con la ventaja de obtener ahorros considerables en tiempo.

	Ciudad A	Ciudad B	Ciudad C	Ciudad D	Oferta
Central 1	5 $x_1$	2 $x_2$	7 $x_3$	3 $x_4$	80
Central 2	3 $x_5$	6 $x_6$	6 $x_7$	1 $x_8$	30
Central 3	6 $x_9$	1 $x_{10}$	2 $x_{11}$	4 $x_{12}$	60
Central 4	4 $x_{13}$	3 $x_{14}$	6 $x_{15}$	6 $x_{16}$	45
Demanda	70	40	70	35	215

Función objetivo:  $z = (5x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 3x_4) + (3x_5 + 6x_6 + 6x_7 + x_8) + (6x_9 + x_{10} + 2x_{11} + 4x_{12}) + (4x_{13} + 3x_{14} + 6x_{15} + 6x_{16})$  (16 variables)

restricciones:  $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 80 \\ x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 30 \\ x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} = 60 \\ x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} = 45 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + x_5 + x_9 + x_{13} = 70 \\ x_2 + x_6 + x_{10} + x_{14} = 40 \\ x_3 + x_7 + x_{11} + x_{15} = 70 \\ x_4 + x_8 + x_{12} + x_{16} = 35 \end{cases}$  (8 restricciones)

**WinQSB / Linear and Integer Programming**



UNICAMENTE PARA USO ESCOLAR

UNICAMENTE PARA USO ESCOLAR



**Linear and Integer Programming**

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

**DISTRIBUCIÓN ELÉCTRICA**

<b>Minimize</b>	$5X_1+2X_2+7X_3+3X_4+3X_5+6X_6+6X_7+1X_8+6X_9+1X_{10}+2X_{11}+4X_{12}+4X_{13}+3X_{14}+6X_{15}+6X_{16}$
	<b>OBJ/Constraint/VariableType/Bound</b>
<b>Minimize</b>	$5X_1+2X_2+7X_3+3X_4+3X_5+6X_6+6X_7+1X_8+6X_9+1X_{10}+2X_{11}+4X_{12}+4X_{13}+3X_{14}+6X_{15}+6X_{16}$
<b>C1</b>	$1X_1+1X_2+1X_3+1X_4=80$
<b>C2</b>	$1X_5+1X_6+1X_7+1X_8=30$
<b>C3</b>	$1X_9+1X_{10}+1X_{11}+1X_{12}=60$
<b>C4</b>	$1X_{13}+1X_{14}+1X_{15}+1X_{16}=45$
<b>C5</b>	$1X_1+1X_5+1X_9+1X_{13}=70$
<b>C6</b>	$1X_2+1X_6+1X_{10}+1X_{14}=40$
<b>C7</b>	$1X_3+1X_7+1X_{11}+1X_{15}=70$
<b>C8</b>	$1X_4+1X_8+1X_{12}+1X_{16}=35$
<b>Integer:</b>	
<b>Binary:</b>	
<b>Unrestricted:</b>	
<b>X1</b>	$\geq 0, \leq M$
<b>X2</b>	$\geq 0, \leq M$
<b>X3</b>	$\geq 0, \leq M$
<b>X4</b>	$\geq 0, \leq M$
<b>X5</b>	$\geq 0, \leq M$
<b>X6</b>	$\geq 0, \leq M$
<b>X7</b>	$\geq 0, \leq M$
<b>X8</b>	$\geq 0, \leq M$
<b>X9</b>	$\geq 0, \leq M$
<b>X10</b>	$\geq 0, \leq M$
<b>X11</b>	$\geq 0, \leq M$
<b>X12</b>	$\geq 0, \leq M$
<b>X13</b>	$\geq 0, \leq M$
<b>X14</b>	$\geq 0, \leq M$
<b>X15</b>	$\geq 0, \leq M$
<b>X16</b>	$\geq 0, \leq M$



Forma Matricial: Format / Switch to Matriz Form

Linear and Integer Programming

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

DISTRIBUCIÓN ELECTRICIDAD

Variable -->	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9	X10	X11	X12	X13	X14	X15	X16	Direction	R. H. S.
Minimize	5	2	7	3	3	6	6	1	6	1	2	4	4	3	6	6		
C1	1	1	1	1													=	80
C2					1	1	1	1									=	30
C3									1	1	1	1					=	60
C4													1	1	1	1	=	45
C5	1				1				1				1				=	70
C6		1				1				1				1			=	40
C7			1				1				1				1		=	70
C8				1				1				1				1	=	35
LowerBound	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
UpperBound	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M		

Linear and Integer Programming

File Format Results Utilities Window Help

Combined Report for DISTRIBUCIÓN ELECTRICIDAD

	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
1	X1	25,0000	5,0000	125,0000	0	basic	5,0000	5,0000
2	X2	40,0000	2,0000	80,0000	0	basic	-M	4,0000
3	X3	10,0000	7,0000	70,0000	0	basic	3,0000	7,0000
4	X4	5,0000	3,0000	15,0000	0	basic	3,0000	7,0000
5	X5	0	3,0000	0	0	at bound	3,0000	M
6	X6	0	6,0000	0	6,0000	at bound	0	M
7	X7	0	6,0000	0	1,0000	at bound	5,0000	M
8	X8	30,0000	1,0000	30,0000	0	basic	-M	1,0000
9	X9	0	6,0000	0	6,0000	at bound	0	M
10	X10	0	1,0000	0	4,0000	at bound	-3,0000	M
11	X11	60,0000	2,0000	120,0000	0	basic	-M	6,0000
12	X12	0	4,0000	0	6,0000	at bound	-2,0000	M
13	X13	45,0000	4,0000	180,0000	0	basic	-M	4,0000
14	X14	0	3,0000	0	2,0000	at bound	1,0000	M
15	X15	0	6,0000	0	0	at bound	6,0000	M
16	X16	0	6,0000	0	4,0000	at bound	2,0000	M
	<b>Objective Function</b>		<b>(Min.) =</b>	<b>620,0000</b>		<b>(Note: Alternate Solution Exists!!)</b>		
	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
1	C1	80,0000	=	80,0000	0	0	80,0000	M
2	C2	30,0000	=	30,0000	0	-2,0000	30,0000	35,0000
3	C3	60,0000	=	60,0000	0	-5,0000	60,0000	70,0000
4	C4	45,0000	=	45,0000	0	-1,0000	45,0000	70,0000
5	C5	70,0000	=	70,0000	0	5,0000	45,0000	70,0000
6	C6	40,0000	=	40,0000	0	2,0000	0	40,0000
7	C7	70,0000	=	70,0000	0	7,0000	60,0000	70,0000
8	C8	35,0000	=	35,0000	0	3,0000	30,0000	35,0000

IMPRESO EN PAPEL RECICLADO

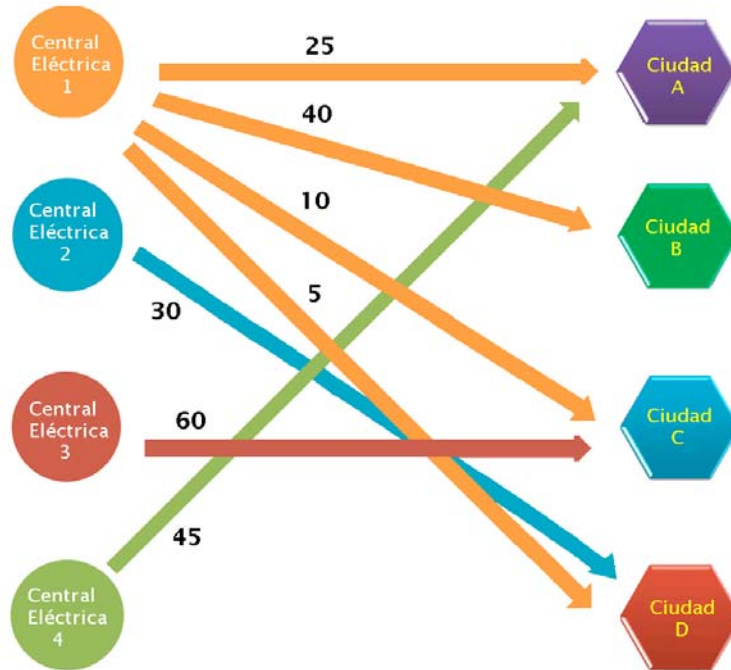
UNICAMENTE PARA USO ESCOLAR

**Interpretación del resultado:**

$x_{ij} \equiv x_{\text{origen destino}} : x_{11} = 25 \quad x_{12} = 40 \quad x_{13} = 10 \quad x_{14} = 5 \quad x_{24} = 30 \quad x_{33} = 60 \quad x_{41} = 45$

	Ciudad A	Ciudad B	Ciudad C	Ciudad D	Oferta
Central 1	5 ( $x_1 = 25$ )	2 ( $x_2 = 40$ )	7 ( $x_3 = 10$ )	3 ( $x_4 = 5$ )	80
Central 2				1 ( $x_8 = 30$ )	30
Central 3			2 ( $x_{11} = 60$ )		60
Central 4	4 ( $x_{13} = 45$ )				45
Demanda	70	40	70	35	215

**Función objetivo:**  $z = 5x_{11} + 2x_{12} + 7x_{13} + 3x_{14} + x_{24} + 2x_{33} + 4x_{41} =$   
 $= 5 \times 25 + 2 \times 40 + 7 \times 10 + 3 \times 5 + 30 + 2 \times 60 + 4 \times 45 = 620$  millones euros



**MÉTODOS HEURÍSTICOS: MÉTODO VOGEL (VAM)**



**WinQSB / Net Problem Specification - Transportation Problem**

**NET Problem Specification**

**Problem Type**

- Network Flow
- Transportation Problem**
- Assignment Problem
- Shortest Path Problem
- Maximal Flow Problem
- Minimal Spanning Tree
- Traveling Salesman Problem

**Objective Criterion**

- Minimization**
- Maximization

**Data Entry Format**

- Spreadsheet Matrix Form**
- Graphic Model Form
- Symmetric Arc Coefficients  
*(i.e., both ways same cost)*

**Problem Title** CENTRALES ELÉCTRICAS

**Number of Sources** 4 **Number of Destinations** 4

OK Cancel Help

**Network Modeling** Solución óptima Simplex

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB

**CENTRALES ELÉCTRICAS: Minimization (Transportation Problem)**

From \ To	Ciudad A	Ciudad B	Ciudad C	Ciudad D	Supply
Central 1	5	2	7	3	80
Central 2	3	6	6	1	30
Central 3	6	1	2	6	60
Central 4	4	3	6	6	45
Demand	70	40	70	35	

**Network Modeling**

File Format Results Utilities Window Help

**Solution for CENTRALES ELÉCTRICAS: Minimization (Transportation Problem)**

	From	To	Shipment	Unit Cost	Total Cost	Reduced Cost
1	Central 1	Ciudad A	5	5	25	0
2	Central 1	Ciudad B	40	2	80	0
3	Central 1	Ciudad D	35	3	105	0
4	Central 2	Ciudad A	30	3	90	0
5	Central 3	Ciudad C	60	2	120	0
6	Central 4	Ciudad A	35	4	140	0
7	Central 4	Ciudad C	10	6	60	0
	<b>Total</b>	<b>Objective Function</b>	<b>Value =</b>		<b>620</b>	

UNICAMENTE PARA USO ESCOLAR

UNICAMENTE PARA USO ESCOLAR

**El resultado con Algoritmos heurísticos: Solve and Analyze / Select Initial Solution Method**

**MÉTODO VOGEL (VAM) : Solve and Analyze / Select Initial Solution Method**

The screenshot shows the WinQSB Network Modeling interface. A dialog box titled '43: Minimiz' is open, allowing the user to select an initial solution method. The 'Vogel's Approximation Method (VAM)' option is selected. To the right, a transportation tableau is displayed with the following data:

From \ To	Ciudad A	Ciudad B	Ciudad C	Ciudad D	Supply
Central 1	5	2	7	3	80
Central 2	3	6	6	1	30
Central 3	6	1	2	6	60
Central 4	4	3	6	6	45
Demand	70	40	70	35	

**Solve and Analyze / Solve and Display Steps - Tableau**

Transportation Tableau for CENTRALES ELÉCTRICAS - Iteration 1 (Final)

From \ To	Ciudad A	Ciudad B	Ciudad C	Ciudad D	Supply	Dual P(i)
Central 1	5 35	2 40	7	3 5	80	0
Central 2	3	6	6	1 30	30	-2
Central 3	6	1	2 60	6	60	-5
Central 4	4 35	3	6 10	6	45	-1
Demand	70	40	70	35		
Dual P(j)	5	2	7	3		
<b>Objective Value = 620 (Minimization)</b>						

En este caso, la solución de la aproximación de Vogel coincide con la solución óptima del Simplex.

**MÉTODO VOGEL (DESBALANCEADO, VAM):** Tres centrales eléctricas de distribución tienen que dar electricidad a tres ciudades (A, B, C) de 35, 50 y 40 kwh (kilowatios-hora), cuyas demandas máximas son 45, 20 y 30. Los costos unitarios se describen en la tabla adjunta:

Central	Ciudades		
	A	B	C
Central 1	8	15	10
Central 2	10	12	14
Central 3	14	9	15

Obtener un modelo de programación que permita satisfacer las necesidades de las cuatro provincias y minimizar los costos asociados al transporte de energía.

### Solución:

Las especificaciones del problema se completan en la siguiente tabla:

Central	Ciudades			Oferta
	A	B	C	
Central 1	8	15	10	35
Central 2	10	12	14	50
Central 3	14	9	15	40
Demanda	45	20	30	

En el problema del transporte debe comprobarse si la matriz es balanceada, es decir, si es igual la oferta a la demanda.

En el problema del transporte debe comprobarse si la matriz es balanceada, es decir, si es igual la oferta a la demanda.

$$\text{Oferta} = 35 + 50 + 40 = 125 \quad \text{Demanda} = 45 + 20 + 30 = 95$$

La Oferta es mayor que la Demanda, el problema no está balanceado.

Hay que ajustar la situación para tener equilibrio entre Oferta y Demanda creando una demanda ficticia o de holgura de  $(125 - 95 = 30)$ .

Sea la columna ficticia F con una demanda de 30 kwh.

Central	Ciudades				Oferta
	A	B	C	F	
Central 1	8	15	10	0	35
Central 2	10	12	14	0	50
Central 3	14	9	15	0	40
Demanda	45	20	30	30	

Se determinan los costos más bajos por fila y columna, después se restan dichos valores y el resultado se denomina Penalización (Pe).

Central	Ciudades				Oferta	1 Pe
	A	B	C	F		
Central 1	8	15	10	0	35	$8 - 0 = 8$
Central 2	10	12	14	0	50	$10 - 0 = 10$
Central 3	14	9	15	0	40	$9 - 0 = 9$
Demanda	45	20	30	30		
1 Pe	$10 - 8 = 2$	$12 - 9 = 3$	$14 - 10 = 4$	0		

El valor de la penalización siempre es positivo dado que la resta es el valor mayor menos el valor menor.

Se identifica la fila o columna con mayor penalización, en este caso la Fila Central 2 con una penalización de 10. En esta fila se elige el menor costo (0) y se asigna la mayor cantidad posible de unidades que se necesita para cubrir la demanda.

En esta celda se pueden asignar 30 kwh (demanda de la Ciudad Ficticia F)

Central	Ciudades				Oferta	1Pe	
	A	B	C	F			
Central 1	8	15	10	0	35		
Central 2	10	12	14	30	0	$50 - 30 = 20$	10
Central 3	14	9	15	0	40		
Demanda	45	20	30	$30 - 30 = 0$			
1 Pe							

Dado que la columna de la Ciudad Ficticia F ya tiene satisfecha su demanda (30 kwh) debe desaparecer. De otra parte, la Central 2 queda con 20 kwh.

Central	Ciudades				Oferta	1 Pe	
	A	B	C	F			
Central 1	8	15	10	0	35		
Central 2	10	12	14	30	0	20	10
Central 3	14	9	15	0	40		
Demanda	45	20	30	0			
1 Pe							

Se ha llegado al final del ciclo, por tanto se repite el proceso.

Se determinan los costos más bajos por fila y columna, después se restan dichos valores.

Central	Ciudades				Oferta	2 Pe
	A	B	C	F		
Central 1	8	15	10	0	35	$10 - 8 = 2$
Central 2	10	12	14	0	20	$12 - 10 = 2$
Central 3	14	9	15	30	0	$14 - 9 = 5$
Demanda	45	20	30	0		
2 Pe	$10 - 8 = 2$	$12 - 9 = 3$	$14 - 10 = 4$			

Se identifica la fila o columna con mayor penalización, Fila Central 3 con 5. En esta fila se elige el menor costo (9) y se asigna la mayor cantidad posible de unidades que se necesita para cubrir la demanda.

Solo se pueden asignar 20 kwh, por ser una cantidad disponible en la Central 3

Central	Ciudades				Oferta	2 Pe		
	A	B	C	F				
Central 1	8	15	10	0	35			
Central 2	10	12	14	0	20			
Central 3	14	20	9	15	30	0	$40 - 20 = 20$	5
Demanda	45	$20 - 20 = 0$	30	0				
2 Pe								

Dado que la columna de la Ciudad B ha satisfecho la demanda debe desaparecer.

De otra parte, la oferta de la Central 3 es de 20 kwh.

Central	Ciudades				Oferta	2 Pe		
	A	B	C	F				
Central 1	8	15	10	0	35			
Central 2	10	12	14	0	20			
Central 3	14	20	9	15	30	0	20	5
Demanda	45	0	30	0				
2 Pe								

Se ha llegado al final del ciclo, por tanto se repite el proceso.



Se determinan los costos más bajos por fila y columna. Después se restan dichos valores.

Central	Ciudades				Oferta	3 Pe
	A	B	C	F		
Central 1	8	15	10	0	35	$10 - 8 = 2$
Central 2	10	12	14	0	20	$14 - 10 = 4$
Central 3	14	20	9	15	30	0
Demanda	45	0	30	0		
3 Pe	$10 - 8 = 2$		$14 - 10 = 4$			

La mayor penalización se encuentra en la columna de la Ciudad C y en la fila de la Central 2, en este caso se marcaran ambas.

Se toma la decisión arbitraria de elegir primero la fila de la Central 2, donde el menor costo es 10, asignando a esa celda la mayor cantidad posible de unidades (20).

Posteriormente, se elige a la columna de la Ciudad C, donde el menor costo es 10, asignando a esta celda la mayor cantidad posible de unidades.

Central	Ciudades				Oferta	4 Pe
	A	B	C	F		
Central 1	8	15	10	0	35	
Central 2	20	10	12	14	0	$20 - 20 = 0$
Central 3	14	20	9	15	30	0
Demanda	$45 - 20 = 25$	0	30	0		
4 Pe			4			

En la fila de la Central 2, celda con valor 10, se pueden asignar 20 kwh por ser la cantidad que oferta la Central 2. Por tanto, la Central 2 ha quedado vacía por lo que desaparece.

De otra parte, la Ciudad A queda con una demanda de 25 kwh.

Central	Ciudades				Oferta	4 Pe
	A	B	C	F		
Central 1	8	15	30	10	0	$35 - 30 = 5$
Central 2	20	10	12	14	0	0
Central 3	14	20	9	15	30	0
Demanda	25	0	$30 - 30 = 0$	0		
4 Pe						

En la columna de la Ciudad C, celda con valor 10, se pueden asignar los 30 kwh demandados, dado que la Central 1 tiene una oferta de mayor número de unidades.

La Ciudad C tiene satisfecha su demanda (30 kwh), con lo que desaparece.

Central	Ciudades						Oferta	4 Pe
	A		B	C		F		
Central 1	8		15	30	10	0	5	
Central 2	20	10	12	14		0	0	
Central 3	14		20	9	15	30	0	20
Demanda	25		0	0		0		
4 Pe								

A la Ciudad A, en el menor valor (8) se pueden asignar 5 kwh, oferta disponible de la Central 1.  
La Central 1 ha quedado vacía por lo que desaparece.

Central	Ciudades						Oferta	
	A		B	C		F		
Central 1	5	8	15	30	10	0	0	
Central 2	20	10	12	14		0	0	
Central 3	14		20	9	15	30	0	20
Demanda	20		0	0		0		


Por último se asigna a la Central 3 los 20 kwh demandados por la Ciudad A.

Central	Ciudades						Oferta	
	A		B	C		F		
Central 1	5	8	15	30	10	0	0	
Central 2	20	10	12	14		0	0	
Central 3	20	14	20	9	15	30	0	0
Demanda	0		0	0		0		

El Plan de distribución más económico que se requiere para suministrar energía a las cuatro Ciudades:

Central	Ciudades						
	A		B	C		F	
Central 1	5	8		30	10		
Central 2	20	10					
Central 3	20	14	20	9		30	0

$$z = 5 \times 8 + 30 \times 10 + 20 \times 10 + 20 \times 14 + 20 \times 9 + 30 \times 0 = 1.000 \text{ euros}$$

 **MÉTODO VOGEL (PENALIZACIONES):** Delta Airlines se especializa en el transporte de vuelos charters. Cierta día se encuentra con aviones vacíos en los lugares y cantidades descritos en la tabla

Lugar	Exigencia
A1	47
A2	82
A3	31
A4	29
A5	66

Al día siguiente necesita aviones para los siguientes lugares

Lugar	Exigencia
A1	28
A4	36
A6	79
A7	68

El supervisor del tráfico aéreo de la compañía elabora una tabla de distancias en cientos de millas entre los lugares en cuestión, resultando:

Destino Origen	A1	A4	A6	A7
A1	0	176	49	76
A2	213	72	149	68
A3	39	132	105	163
A4	91	0	63	82
A5	34	76	92	132

### Solución:

Observando el horario de aviones, encuentra que no habrá aviones de A4 a A7, ni desde A3 a A1, resultando imposible los vuelos entre estos lugares.

Encontrar una solución inicial y determinar el mejor esquema de vuelos.

- Las especificaciones de la situación se muestran en tabla:

Destino Aviones	A1	A4	A6	A7	Oferta	
A1	0	176	49	76	47	
A2	213	72	149	68	82	
A3	39	132	105	163	31	
A4	91	0	63	82	29	
A5	34	76	92	132	66	
Demanda	28	36	79	68	211	255

La matriz es DESBALANCEADA, es decir, la oferta (Aviones) no es igual a la demanda (Destinos), superando la oferta en 44 unidades a la demanda, por lo que se necesita incluir en la tabla un Destino Ficticio (A0).

Por otra parte, la imposibilidad de comunicación ente (A3 – A1) y de (A4 – A7) obliga a modificar los costes, asignando un coste muy elevado (1000).

Las especificaciones del supervisor se completan en la siguiente tabla:

Destino \ Aviones	A1	A4	A6	A7	A0	Oferta
A1	0	176	49	76	0	47
A2	213	72	149	68	0	82
A3	1000	132	105	163	0	31
A4	91	0	63	1000	0	29
A5	34	76	92	132	0	66
Demanda	28	36	79	68	44	

Se determinan las medidas de penalización, se identifican las distancias más bajas por fila y columna. Después se restan dichos valores y el resultado se denomina Penalización (Pe).

	A1	A4	A6	A7	A0	Oferta	1 Pe
A1	0	176	49	76	0	47	0 - 0 = 0
A2	213	72	149	68	0	82	68 - 0 = 68
A3	1000	132	105	163	0	31	105 - 0 = 105
A4	91	0	63	1000	0	29	0 - 0 = 0
A5	34	76	92	132	0	66	34 - 0 = 34
Demanda	28	36	79	68	44		
1 Pe	34 - 0 = 34	72	63 - 49 = 14	8	0		

La mayor penalización se encuentra en la Fila A3, donde la menor distancia es 0, asignando a esa celda la mayor cantidad posible de unidades.

En la celda  $c_{35}$  se pueden asignar como máximo 31 unidades ofertadas por A3

	A1	A4	A6	A7	A0	Oferta	1 Pe
A1	0	176	49	76	0	47	0
A2	213	72	149	68	0	82	68
A3	1000	132	105	163	31	0	31 - 31 = 0
A4	91	0	63	1000	0	29	0
A5	34	76	92	132	0	66	34
Demanda	28	36	79	68	44 - 31 = 13		
1 Pe	34	72	14	8	0		

Queda vacía la oferta de la Fila A3 por lo que se procede a eliminarla, reiterando el proceso con nuevas penalizaciones.

	A1	A4	A6	A7	A0	Oferta	2 Pe
A1	0	176	49	76	0	47	0
A2	213	72	149	68	0	82	$68 - 0 = 68$
A3	1000	132	105	163	31   0	0	
A4	91	0	63	1000	0	29	0
A5	34	76	92	132	0	66	$34 - 0 = 34$
Demanda	28	36	79	68	13		
2 Pe	$34 - 0 = 34$	72	$63 - 49 = 14$	8	0		

La mayor penalización se encuentra en la Columna A4, donde el menor valor es 0 (celda  $c_{42}$ ), asignando a esta celda la mayor cantidad posible de unidades de forma que no sobrepase la cantidad ofertada ( 29 unidades).

	A1	A4	A6	A7	A0	Oferta	2 Pe
A1	0	176	49	76	0	47	0
A2	213	72	149	68	0	82	68
A3	1000	132	105	163	31   0	0	
A4	91	29   0	63	1000	0	$29 - 29 = 0$	0
A5	34	76	92	132	0	66	34
Demanda	28	$36 - 29 = 7$	79	68	13		
2 Pe	34	72	14	8	0		

Queda vacía la oferta de la Fila A4 por lo que se procede a eliminar, reiterando el proceso con nuevas penalizaciones.

	A1	A4	A6	A7	A0	Oferta	3 Pe
A1	0	176	49	76	0	47	0
A2	213	72	149	68	0	82	$68 - 0 = 68$
A3	1000	132	105	163	31   0	0	
A4	91	29   0	63	1000	0	0	
A5	34	76	92	132	0	66	34
Demanda	28	7	79	68	13		
3 Pe	$34 - 0 = 34$	$76 - 72 = 4$	$92 - 49 = 43$	8	0		

La mayor penalización se encuentra en la Fila A2, donde el menor valor es 0 (celda  $c_{25}$ ), asignando a esta celda la mayor cantidad posible de unidades de forma que no sobrepase la cantidad ofertada ( 13 unidades).

Asignatura .....

Grupo .....

Apellidos .....

Nombre .....

Ejercicio del día .....

	A1	A4	A6	A7	A0	Oferta	3 Pe
A1	0	176	49	76	0	47	0
A2	213	72	149	68	13   0	82 - 13 = 69	68
A3	1000	132	105	163	31   0	0	
A4	91	29   0	63	1000	0	0	0
A5	34	76	92	132	0	66	34
Demanda	28	7	79	68	0		
3 Pe	34	72	14	8	0		

Queda vacía la demanda de la Columna A0 por lo que se procede a eliminar, reiterando el proceso con nuevas penalizaciones.

	A1	A4	A6	A7	A0	Oferta	4 Pe
A1	0	176	49	76	0	47	49
A2	213	72	149	68	13   0	69	4
A3	1000	132	105	163	31   0	0	
A4	91	29   0	63	1000	0	0	
A5	34	76	92	132	0	66	76 - 34 = 42
Demanda	28	7	79	68	0		
4 Pe	34	4	43	8			

La mayor penalización se encuentra en la Fila A1, donde el menor valor es 0 (celda  $c_{11}$ ), asignando a esta celda la mayor cantidad posible de unidades de forma que no sobrepase la cantidad ofertada ( 28 unidades).

	A1	A4	A6	A7	A0	Oferta	4 Pe
A1	28   0	176	49	76	0	47 - 28 = 19	49
A2	213	72	149	68	13   0	69	4
A3	1000	132	105	163	31   0	0	
A4	91	29   0	63	1000	0	0	
A5	34	76	92	132	0	66	42
Demanda	0	7	79	68	0		
4 Pe	34	4	43	8			

Queda vacía la demanda de la Columna A1 por lo que se procede a eliminar, reiterando el proceso con nuevas penalizaciones.

	A1	A4	A6	A7	A0	Oferta	5 Pe
A1	28   0	176	49	76	0	19	27
A2	213	72	149	68	13   0	69	4
A3	1000	132	105	163	31   0	0	
A4	91	29   0	63	1000	0	0	
A5	34	76	92	132	0	66	16
Demanda	0	7	79	68	0		
5 Pe		4	43	8			

La mayor penalización se encuentra en la Columna A6, donde el menor valor es 49 (celda  $c_{13}$ ), asignando a esta celda la mayor cantidad posible de unidades de forma que no sobrepase la cantidad ofertada ( 19 unidades).

	A1	A4	A6	A7	A0	Oferta	5 Pe
A1	28   0	176	19   49	76	0	0	27
A2	213	72	149	68	13   0	69	4
A3	1000	132	105	163	31   0	0	
A4	91	29   0	63	1000	0	0	
A5	34	76	92	132	0	66	16
Demanda	0	7	79 - 19 = 60	68	0		
5 Pe		4	43	8			

Queda vacía la oferta de la Fila A1 por lo que se procede a eliminar, reiterando el proceso con nuevas penalizaciones.

	A1	A4	A6	A7	A0	Oferta	6 Pe
A1	28   0	176	19   49	76	0	0	
A2	213	72	149	68	13   0	69	4
A3	1000	132	105	163	31   0	0	
A4	91	29   0	63	1000	0	0	
A5	34	76	92	132	0	66	16
Demanda	0	7	60	68	0		
6 Pe		4	57	8			

La mayor penalización se encuentra en la Columna A6, donde el menor valor es 92 (celda  $c_{53}$ ), asignando a esta celda la mayor cantidad posible de unidades de forma que no sobrepase la cantidad ofertada ( 60 unidades).

	A1		A4	A6		A7	A0	Oferta	6 Pe	
A1	28	0	176	19	49	76	0	0		
A2	213		72	149		68	13	0	69	4
A3	1000		132	105		163	31	0	0	
A4	91	29	0	63		1000	0		0	
A5	34	76		60	92	132	0		6	16
Demanda	0		7	0		68	0			
6 Pe			4	57		8				

Queda vacía la demanda de la Columna A6 por lo que se procede a eliminar, reiterando el proceso con nuevas penalizaciones.

	A1		A4	A6		A7	A0	Oferta	7 Pe	
A1	28	0	176	19	49	76	0	0		
A2	213		72	149		68	13	0	69	4
A3	1000		132	105		163	31	0	0	
A4	91	29	0	63		1000	0		0	
A5	34	76		60	92	132	0		6	56
Demanda	0		7	0		68	0			
7 Pe			4			64				

La mayor penalización se encuentra en la Columna A7, donde el menor valor es 68 (celda  $c_{24}$ ), asignando a esta celda la mayor cantidad posible de unidades de forma que no sobrepase la cantidad ofertada ( 68 unidades).

	A1		A4	A6		A7	A0	Oferta	7 Pe	
A1	28	0	176	19	49	76	0	0		
A2	213		72	149		68	68	13	0	4
A3	1000		132	105		163	31	0	0	
A4	91	29	0	63		1000	0		0	
A5	34	76		60	92	132	0		6	56
Demanda	0		7	0		0	0			
7 Pe			4			64				

Queda vacía la demanda de la Columna A7 por lo que se procede a eliminar, reiterando el proceso con nuevas penalizaciones.



Asignatura .....

Grupo .....

Apellidos .....

Nombre .....

Ejercicio del día .....

	A1		A4	A6		A7	A0	Oferta	8 Pe		
A1	28	0	176	19	49	76	0	0			
A2	213		72	149		68	68	13	0	1	72
A3	1000		132	105		163		31	0	0	
A4	91	29	0	63		1000		0		0	
A5	34	76		60	92	132		0		6	76
Demanda	0		7	0		0		0			
8 Pe			4								

La mayor penalización se encuentra en la Fila A5, donde el menor valor es 76 (celda  $c_{52}$ ), asignando a esta celda la mayor cantidad posible de unidades de forma que no sobrepase la cantidad ofertada ( 6 unidades).

	A1		A4	A6		A7	A0	Oferta	8 Pe		
A1	28	0	176	19	49	76	0	0			
A2	213		72	149		68	68	13	0	1	72
A3	1000		132	105		163		31	0	0	
A4	91	29	0	63		1000		0		0	
A5	34	6	76	60	92	132		0		0	76
Demanda	0		1	0		0		0			
8 Pe			4								

Queda vacía la oferta de la Fila A5 por lo que se procede a eliminar, reiterando el proceso con nuevas penalizaciones.

	A1		A4	A6		A7	A0	Oferta	9 Pe		
A1	28	0	176	19	49	76	0	0			
A2	213		72	149		68	68	13	0	1	72
A3	1000		132	105		163		31	0	0	
A4	91	29	0	63		1000		0		0	
A5	34	6	76	60	92	132		0		0	76
Demanda	0		1	0		0		0			
9 Pe			72								

Finalmente, queda por asignar 1 unidad a la celda  $c_{22}$ , quedando vacías la columna A4 y la Fila A2.

Asignatura .....

Grupo .....

Apellidos .....

Nombre .....

Ejercicio del día .....

	A1		A4		A6		A7		A0		Oferta
A1	28	0	176		19	49	76		0		0
A2	213		1	72	149		68	68	13	0	0
A3	1000		132		105		163		31	0	0
A4	91		29	0	63		1000		0		0
A5	34		6	76	60	92	132		0		0
Demanda	0		0		0		0		0		

Por tanto, una solución inicial y el mejor esquema de vuelos se reflejan en la tabla siguiente:

	A1		A4		A6		A7		A0	
A1	28	0			19	49				
A2			1	72			68	68	13	0
A3									31	0
A4			29	0						
A5			6	76	60	92				

Valor de la función objetivo:  $z = 1 \times 72 + 6 \times 76 + 19 \times 49 + 60 \times 92 + 68 \times 68 = 11.603$

**MÉTODO VOGEL (DESBALANCEADO, VAM):** Tres centrales eléctricas de distribución tienen que dar electricidad a tres ciudades (A, B, C) de 35, 50 y 40 kwh (kilowatios-hora), cuyas demandas máximas son 45, 20 y 30. Los costos unitarios se describen en la tabla adjunta:

Central	Ciudades		
	A	B	C
Central 1	8	15	10
Central 2	10	12	14
Central 3	14	9	15

Obtener un modelo de programación que permita satisfacer las necesidades de las cuatro provincias y minimizar los costos asociados al transporte de energía.

**Solución:**

Las especificaciones del problema se completan en la siguiente tabla:

Central	Ciudades			Oferta
	A	B	C	
Central 1	8	15	10	35
Central 2	10	12	14	50
Central 3	14	9	15	40
Demanda	45	20	30	

En el problema del transporte debe comprobarse si la matriz es balanceada, es decir, si es igual la oferta a la demanda.

En el problema del transporte debe comprobarse si la matriz es balanceada, es decir, si es igual la oferta a la demanda.

$$\text{Oferta} = 35 + 50 + 40 = 125 \quad \text{Demanda} = 45 + 20 + 30 = 95$$

La Oferta es mayor que la Demanda, el problema no está balanceado.

Hay que ajustar la situación para tener equilibrio entre Oferta y Demanda creando una demanda ficticia o de holgura de  $(125 - 95 = 30)$ .

Sea la columna ficticia F con una demanda de 30 kwh.

Central	Ciudades				Oferta
	A	B	C	F	
Central 1	8	15	10	0	35
Central 2	10	12	14	0	50
Central 3	14	9	15	0	40
Demanda	45	20	30	30	

Se determinan los costos más bajos por fila y columna, después se restan dichos valores y el resultado se denomina Penalización (Pe).

Central	Ciudades				Oferta	1 Pe
	A	B	C	F		
Central 1	8	15	10	0	35	$8 - 0 = 8$
Central 2	10	12	14	0	50	$10 - 0 = 10$
Central 3	14	9	15	0	40	$9 - 0 = 9$
Demanda	45	20	30	30		
1 Pe	$10 - 8 = 2$	$12 - 9 = 3$	$14 - 10 = 4$	0		

El valor de la penalización siempre es positivo dado que la resta es el valor mayor menos el valor menor.

Se identifica la fila o columna con mayor penalización, en este caso la Fila Central 2 con una penalización de 10. En esta fila se elige el menor costo (0) y se asigna la mayor cantidad posible de unidades que se necesita para cubrir la demanda.

En esta celda se pueden asignar 30 kwh (demanda de la Ciudad Ficticia F)

Central	Ciudades				Oferta	1Pe	
	A	B	C	F			
Central 1	8	15	10	0	35		
Central 2	10	12	14	30	0	$50 - 30 = 20$	10
Central 3	14	9	15	0	40		
Demanda	45	20	30	$30 - 30 = 0$			
1 Pe							

Dado que la columna de la Ciudad Ficticia F ya tiene satisfecha su demanda (30 kwh) debe desaparecer. De otra parte, la Central 2 queda con 20 kwh.

Central	Ciudades				Oferta	1 Pe	
	A	B	C	F			
Central 1	8	15	10	0	35		
Central 2	10	12	14	30	0	20	10
Central 3	14	9	15	0	40		
Demanda	45	20	30	0			
1 Pe							

Se ha llegado al final del ciclo, por tanto se repite el proceso.

Se determinan los costos más bajos por fila y columna, después se restan dichos valores.

Central	Ciudades				Oferta	2 Pe
	A	B	C	F		
Central 1	8	15	10	0	35	$10 - 8 = 2$
Central 2	10	12	14	0	20	$12 - 10 = 2$
Central 3	14	9	15	30	0	$14 - 9 = 5$
Demanda	45	20	30	0		
2 Pe	$10 - 8 = 2$	$12 - 9 = 3$	$14 - 10 = 4$			

Se identifica la fila o columna con mayor penalización, Fila Central 3 con 5. En esta fila se elige el menor costo (9) y se asigna la mayor cantidad posible de unidades que se necesita para cubrir la demanda.

Solo se pueden asignar 20 kwh, por ser una cantidad disponible en la Central 3

Central	Ciudades				Oferta	2 Pe		
	A	B	C	F				
Central 1	8	15	10	0	35			
Central 2	10	12	14	0	20			
Central 3	14	20	9	15	30	0	$40 - 20 = 20$	5
Demanda	45	$20 - 20 = 0$	30	0				
2 Pe								

Dado que la columna de la Ciudad B ha satisfecho la demanda debe desaparecer.

De otra parte, la oferta de la Central 3 es de 20 kwh.

Central	Ciudades				Oferta	2 Pe		
	A	B	C	F				
Central 1	8	15	10	0	35			
Central 2	10	12	14	0	20			
Central 3	14	20	9	15	30	0	20	5
Demanda	45	0	30	0				
2 Pe								

Se ha llegado al final del ciclo, por tanto se repite el proceso.

Se determinan los costos más bajos por fila y columna. Después se restan dichos valores.

Central	Ciudades				Oferta	3 Pe
	A	B	C	F		
Central 1	8	15	10	0	35	$10 - 8 = 2$
Central 2	10	12	14	0	20	$14 - 10 = 4$
Central 3	14	20	9	15	30	0
Demanda	45	0	30	0		
3 Pe	$10 - 8 = 2$		$14 - 10 = 4$			

La mayor penalización se encuentra en la columna de la Ciudad C y en la fila de la Central 2, en este caso se marcaran ambas.

Se toma la decisión arbitraria de elegir primero la fila de la Central 2, donde el menor costo es 10, asignando a esa celda la mayor cantidad posible de unidades (20).

Posteriormente, se elige a la columna de la Ciudad C, donde el menor costo es 10, asignando a esta celda la mayor cantidad posible de unidades.

Central	Ciudades				Oferta	4 Pe
	A	B	C	F		
Central 1	8	15	10	0	35	
Central 2	20	10	12	14	0	$20 - 20 = 0$
Central 3	14	20	9	15	30	0
Demanda	$45 - 20 = 25$	0	30	0		
4 Pe			4			

En la fila de la Central 2, celda con valor 10, se pueden asignar 20 kwh por ser la cantidad que oferta la Central 2. Por tanto, la Central 2 ha quedado vacía por lo que desaparece.

De otra parte, la Ciudad A queda con una demanda de 25 kwh.

Central	Ciudades				Oferta	4 Pe
	A	B	C	F		
Central 1	8	15	30	10	0	$35 - 30 = 5$
Central 2	20	10	12	14	0	0
Central 3	14	20	9	15	30	0
Demanda	25	0	$30 - 30 = 0$	0		
4 Pe						

En la columna de la Ciudad C, celda con valor 10, se pueden asignar los 30 kwh demandados, dado que la Central 1 tiene una oferta de mayor número de unidades.

La Ciudad C tiene satisfecha su demanda (30 kwh), con lo que desaparece.

Central	Ciudades						Oferta	4 Pe
	A		B	C		F		
Central 1	8		15	30	10	0	5	
Central 2	20	10	12	14		0	0	
Central 3	14		20	9	15	30	0	20
Demanda	25		0	0		0		
4 Pe								

A la Ciudad A, en el menor valor (8) se pueden asignar 5 kwh, oferta disponible de la Central 1.  
La Central 1 ha quedado vacía por lo que desaparece.

Central	Ciudades						Oferta	
	A		B	C		F		
Central 1	5	8	15	30	10	0	0	
Central 2	20	10	12	14		0	0	
Central 3	14		20	9	15	30	0	20
Demanda	20		0	0		0		

Por último se asigna a la Central 3 los 20 kwh demandados por la Ciudad A.

Central	Ciudades						Oferta	
	A		B	C		F		
Central 1	5	8	15	30	10	0	0	
Central 2	20	10	12	14		0	0	
Central 3	20	14	20	9	15	30	0	0
Demanda	0		0	0		0		

El Plan de distribución más económico que se requiere para suministrar energía a las cuatro Ciudades:

Central	Ciudades						
	A		B	C		F	
Central 1	5	8		30	10		
Central 2	20	10					
Central 3	20	14	20	9		30	0

$$z = 5 \times 8 + 30 \times 10 + 20 \times 10 + 20 \times 14 + 20 \times 9 + 30 \times 0 = 1.000 \text{ euros}$$

Asignatura ..... Grupo.....  
Apellidos ..... Nombre .....

Ejercicio del día .....



Asignatura ..... Grupo.....  
Apellidos ..... Nombre .....

Ejercicio del día .....

(IMPRESO EN PAPEL RECICLADO)

UNICAMENTE PARA USO ESCOLAR



Instrumentos Estadísticos Avanzados  
Facultad Ciencias Económicas y Empresariales  
Departamento de Economía Aplicada  
Profesor: Santiago de la Fuente Fernández