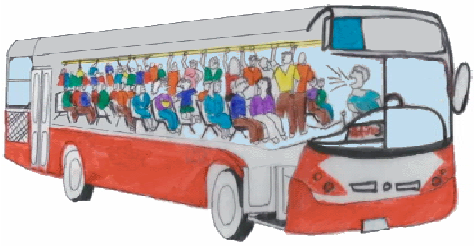


PROBLEMA DEL TRANSPORTE: ALGORITMOS

ANTECEDENTES HISTÓRICOS DEL PROBLEMA DEL TRANSPORTE

Gaspard Monge

Los problemas de transporte constituyen uno de los problemas más antiguos estudiados en el campo de la Investigación de Operaciones.
El problema fue formalizado por el matemático Gaspard Monge en 1781.
Leonid Vitálievich Kantorovich realizó importantes avances en este campo durante la Segunda Guerra Mundial.

L. Walras

La introducción e la Programación Lineal en Economía es muy antigua, es lógico pensar que se inicia cuando los economistas empiezan a presentar los modelos económicos en forma matemática: uno de los primeros trabajos se encuentran en la Tabla de François Quesnay: León Walras propone en 1874 un modelo matemático, siendo los coeficientes de restricción coeficientes tecnológicos, pero hasta 1930 los trabajos sobre esta materia con relativamente escasos.

Von Neumann

La mayor parte de los economistas matemáticos se ocuparon del análisis de problemas teóricos asociados con la posibilidad de equilibrio económico y su eficiencia frente a condiciones competitivas o monopolísticas. Así, en 1930, un grupo de economistas matemáticos austríacos y alemanes trabajan en la generalización de las técnicas lineales de Walras; estos trabajos nacieron debidos a unos problemas planteados por Von Neumann en "A model of general Economic Equilibrium, 1937".

W. Leontief
Nobel, 1973

Desde 1936 el Bureau of Labor Statistics habia aplicado el modelo de Wassily Leontief (Nobel, 1973).
A partir de 1947 hay que destacar la labor de T. C. Koopmans (Nobel, 1975), que llama la atención de los economistas sobre la gran potencialidad de aplicación de los modelos de Programación Lineal a la Economía.

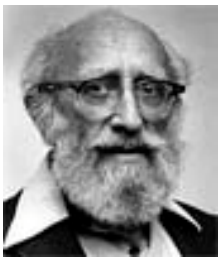
A partir de la fecha mencionada la Cowles Commission organiza Conferencias, en las que intervienen economistas reconocidos: Kenneth Arrow (Nobel, 1972), Robert Dorfman, Leonid Hurwicz (Nobel, 2007), Abba Ptachya Lerner, Jacob Marschak, Oskar Morgenstern, Paul Anthony Samuelson (Nobel, 1970), y matemáticos como G.W. Brown (Dinámica Brown-Von-Neumann-Nash), Merrill Meeks Flood (Teoría de juegos, Dilema del prisionero), Albert William Tucker (Teoría de juegos y Programación no lineal) y George Bernard Dantzig.

Las comunicaciones presentadas se recogen en una obra titulada "Activity Analysis Of Production and Allocation".

K. Arrow
Nobel, 1972

R. Dorfman

L . Hurwicz
Nobel, 2007


A. Lerner

J. Marschak

O. Morgenstern

P. A. Samuelson
Nobel, 1970

G. B. Dantzig

Samuelson en 1955 publica "Market Mechanims and Maximization" y enuncia su "Teorema de sustitución para un modelo generalizado del de Leontief".

F. L. Hitchcock

La formulación lineal del problema, conocida como problema de transporte clásico, junto con una solución constructiva, fue descrito por Frank Lauren Hitchcock en 1941.

De manera independiente, Tjalling Charles Koopmans también desarrolló avances en los problemas del transporte.

L. Kantorovich
Nobel, 1975

Durante los años 1941 y 1942, Kantorovich y Koopmans estudiaron de forma independiente el problema del transporte por primera vez, conociéndose este tipo de problemas como problema de Koopmans-Kantorovich.
Para su solución, emplearon métodos geométricos que están relacionados con la teoría de convexidad de Minkowski.

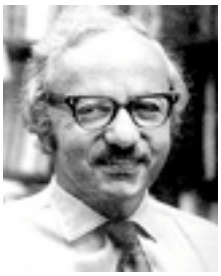
L. Koopmans
Nobel, 1975

G. Stigler
Nobel , 1982

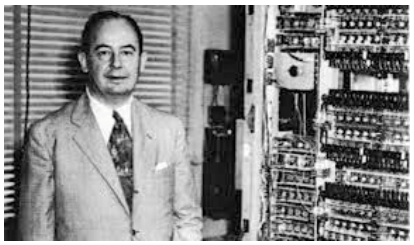
En 1945, George Joseph Stigler planteó el problema de la dieta, a raíz de la preocupación del ejército americano por asegurar unos requerimientos nutricionales básicos para sus tropas al menor coste posible. El problema fue resuelto manualmente mediante un método heurístico con el cual se examinaron 510 diferentes posibilidades de combinación de alimentos, y cuya solución difería tan sólo unos céntimos de la solución aportada años más tarde por el método Simplex.

En 1951, George Bernard Dantzig describe un método para la resolución del problema con una algoritmo que es una adaptación del Método Simplex.

El Algoritmo Simplex encuentra una solución pasando de una esquina adyacente a la próxima, siguiendo los bordes externos de la región factible. En contraste, el Algoritmo de Karmarkar sigue una trayectoria de puntos por el interior de la región factible.



G. B. Dantzig



Neumann, ordenador Strena

Durante las décadas de los 50 y 60, creció el interés y el desarrollo de la Investigación Operativa, debido a su aplicación en el ámbito del comercio y la industria. Un ejemplo de esto es el problema del cálculo del plan óptimo de transporte de arena de construcción a las obras de edificación de la ciudad de Moscú, donde existían 10 puntos de origen y 230 de destino.

Para resolverlo se utilizó un ordenador Strena en el mes de junio de 1958, y después de 10 días de cálculos produjo una solución que aportó una reducción del 11% de los gastos respecto a los costes originales previstos.

H. M. Markowitz
Nobel, 1990

Continuamente crecen los Modelos de Programación Lineal como aplicación a la industria (petróleo, hierro, acero, etc.), destacando los estudios de Harry Max Markowitz en 1954 como aplicación a la industria del metal.

N. Karmarkar

En 1984, Narendra Karmarkar, desarrolló el Algoritmo de Karmarkar que supera con mucho, en eficiencia, el algoritmo del simplex para el tratamiento de problemas con un gran número de variables y de restricciones, dando la posibilidad de resolver problemas que antes no tenían solución.

Delta Air Lines se convirtió en la primera línea aérea comercial en utilizar el algoritmo de Karmarkar, llamado KORBX, desarrollado y vendido por AT&T. Con él, Delta perfeccionó la programación mensual de 7.000 pilotos que llevan más de 400 aviones a 166 ciudades del mundo. Con la eficiencia incrementada en la asignación de recursos limitados, la aerolínea ahorro millones de dólares en tiempo de tripulación y costos relacionados.

PROGRAMACIÓN LINEAL: ALGORITMO DEL SIMPLEX

La Programación Lineal está diseñada para modelos con funciones objetivo y restricciones lineales. Es decir, para poder aplicar la programación lineal el modelo matemático debe constar únicamente de igualdades y desigualdades lineales.

El Algoritmo del Simplex es el más utilizado para resolver modelos de Programación Lineal, este método fue creado en 1947 por el matemático norteamericano George Dantzig.

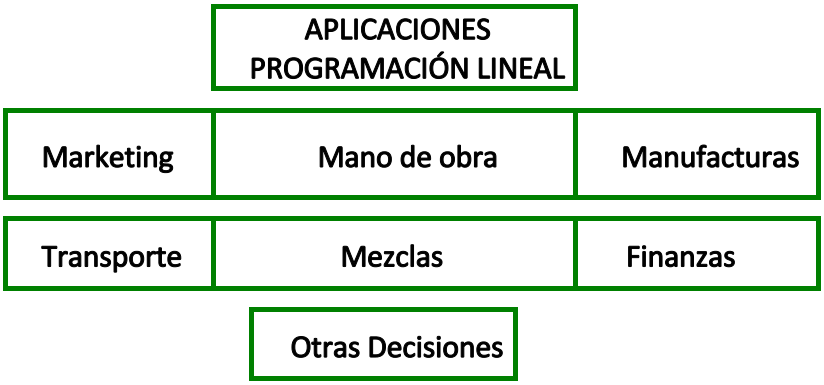
Es un procedimiento iterativo que permite ir mejorando las soluciones a cada paso. El proceso concluye cuando ya no es posible seguir mejorando más dicha solución.

Tiene como base el álgebra matricial y el proceso de eliminación de Gauss-Jordan. Es un proceso de búsqueda que se vuelve sorprendentemente eficiente para solucionar problemas de gran tamaño y complejos.

En la actualidad el Método Simplex se aplica con eficiencia a gran número de paquetes de software que facilitan el proceso de cálculo. Entre otros, en dispositivos Android la aplicación Simplex Android Calculator soporta fracciones sin limitación de variables ni de restricciones.

APLICACIONES DEL SIMPLEX A LA ECONOMÍA Y A LA EMPRESA

Este método o procedimiento cuenta con un sinnúmero de aplicaciones en programación lineal. En Economía y la Empresa entre las aplicaciones más comunes del método Simplex destacan los problemas de Transporte, Transbordo, Coste Mínimo, Flujo máximo, Decisiones en ambiente de incertidumbre.



MÉTODO ABSTRACTO PARA ENCONTRAR UNA SOLUCIÓN ÓPTIMA

Se trata de optimizar una función lineal, llamada objetivo o económica,
$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + \cdots + c_n x_n$ sometida a un sistema de restricciones:

$$\textit{forma regular}\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mn} x_n = b_m \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x_i \geq 0 \end{cases} \qquad [1]$$

Un modelo expresado de esta forma se dice que está en *forma regular*, pues las ecuaciones de restricción son verdaderas ecuaciones (no inecuaciones).

En el caso en que las restricciones sean inecuaciones se sumará o restará (depende del signo de la desigualdad) a cada una de las inecuaciones del sistema de restricciones una variable llamada *variable de holgura*, que son siempre positivas.

En consecuencia, habrá que añadir al sistema *m variables de holgura*.

Evidentemente estas variables también aparecerán en la función objetivo, pero para que ésta no varíe los coeficientes c_i correspondientes serán nulos.

Se llama *solución* del modelo a cualquier conjunto de variables $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ que satisfaga el sistema. Esta solución se llama *factible o posible* si las $x_i \geq 0$. En el csaso en que la solución factible minimice o maximice la función objetivo, se le llama *solución óptima*.

Una solución es *básica no degenerada* cuando consta de m valores no nulos, mientras que si existen menos de m se dice que la solución es degenerada.

El sistema de restricciones en forma regular [1] puede expresarse en la forma:

$$\boxed{Z = cX} \quad \text{sujeto a } X \geq 0 \text{ y } AX = b$$

donde, $c = (c_1, c_2, \cdots, c_n)$ es un vector fila y $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ es un vector columna.

$A = (a_{ij})$, $b = (b_1, b_2, \cdots, b_m)$ y 0 es un vector columna n-dimensional nulo.

Otra representación del sistema [1] es la siguiente:

$$\boxed{Z = cX} \quad \text{sujeto a } X \geq 0 \text{ y } x_1 P_1 + x_2 P_2 + \cdots + x_n P_n = P_0$$

donde P_j $(1 \leq j \leq n)$ es la j-ésima columna de la matriz A y $P_0 = b$

Teorema 1: El conjunto de todas las soluciones posibles al problema de programación lineal es un conjunto convexo.

De todas las soluciones factibles solo interesa las que sean vértices o extremos.

El objetivo es minimizar la función $Z = cX$, solamente se tiene en cuenta este caso porque maximizar una función $\text{Max } Z = -\text{Min}(-Z)$.

Para encontrar la *solución óptima* se tendrán que analizar los puntos extremos del conjunto de soluciones factibles y se hace de forma indirecta, asociando a cada vértice un sistema de vectores linealmente independientes como se refleja a continuación.

Se conoce que el sistema de restricciones de la función objetivo $Z = cX$ puede expresarse en la forma $\sum_{j=1}^{n} x_j P_j = P_o$

Teniendo en cuenta que la característica de la matriz es *m*, se puede afirmar que el número máximo de vectores linealmente independientes entre todos los P_j es *m*.

En estas condiciones se asocia a cada uno de los P_j linealmente independientes un punto extremo de acuerdo con el siguiente teorema.

Teorema 2: Si puede encontrarse un conjunto $k \leq m$ vectores $(P_1, P_2, \cdots, P_k)$ que es linealmente independiente y tal que

$$x_1 P_1 + x_2 P_2 + \cdots + x_n P_n = P_0 \quad \text{y todas las } x_i \geq 0$$

entonces, el punto $X = (x_1, x_2, \cdots, x_k, 0, \cdots, 0)$ es un punto extremo del conjunto convexo de soluciones posibles. En este caso X es un vector n-dimensional cuyos últimos $(n - k)$ términos son cero.

Recíprocamente, si $X = (x_1, x_2, \cdots, x_k)$ es un punto extremo del conjunto convexo de las soluciones, entonces los vectores asociados con las $x_i \geq 0$ forman un conjunto linealmente independiente. De aquí se sigue que, al menos, *m* de las x_i son positivas.

Definición 1: Se dice que las variables $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ constituyen un conjunto básico si la matriz de sus coeficientes tiene inversa (no singular), es decir, si los vectores $(P_1, P_2, \cdots, P_m)$ son linealmente independientes.

Las restantes variables son *no básicas o auxiliares*.

Hay que tener en cuenta que, a lo sumo, hay $\binom{n}{m}$ conjuntos básicos de variables.

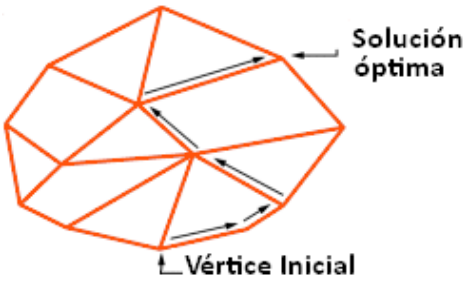
Definición 2: Las soluciones de las ecuaciones de restricción en las que las variables no básicas o auxiliares se hacen iguales a cero, se dice que son *soluciones básicas*.

Una solución básica contiene $(n - m)$ ceros como mínimo y existe un número finito de soluciones básicas, como máximo $\binom{n}{m}$.

Definición 3: Una solución en la que las variables tienen valores no negativos se llama *factible*.

EL MÉTODO DEL SIMPLEX

La solución óptima está asociada a un punto extremo de la región factible que satisface todas las restricciones, determinando el valor máximo de la función objetivo z, o en su caso el valor mínimo de z.



Es un método que, una vez se ha determinado una solución básica, permite obtener otra solución que proporcione el mínimo en un número finito de pasos.

Estos pasos o iteraciones consisten en encontrar una nueva solución posible cuyo valor correspondiente de la función objetivo sea menor que el valor de la función objetivo de la solución precedente.
El proceso continúa hasta alcanzar una solución mínima.

Al conocer que todas las soluciones de puntos extremos tienen asociados *m* vectores linealmente independientes, la búsqueda se limita a aquellas soluciones que son generadas por *m* vectores linealmente independientes.

Se parte de que el problema de programación lineal tiene solución, que cada solución factible básica es no degenerada, y que se conoce una solución factible.

SITUACIÓN DEL PROBLEMA:

Sea la solución dada $X_0 = (x_{10}, x_{20}, \cdots, x_{m0})$

Y el conjunto de vectores linealmente independientes $(P_1, P_2, \cdots, P_m)$

Se tiene que: $x_{10} P_1 + x_{20} P_2 + \cdots + x_{m0} P_{m0} = P_0$ con todas las $x_{i0} \geq 0$

$z_0 = c_1 x_{10} + c_2 x_{20} + c_3 x_{30} + \cdots + c_m x_{m0}$

Las c_i son los coeficientes de coste de la función objetivo y z_0 es el correspondiente valor de la función objetivo para la solución dada.

Puesto que $(P_1, P_2, \cdots, P_m)$ son linealmente independientes se puede expresar cualquier del conjunto $(P_1, P_2, \cdots, P_n)$ en función de $(P_1, P_2, \cdots, P_m)$

Sea P_j dado por: $x_{1j} P_1 + x_{2j} P_2 + \cdots + x_{mj} P_{mj} = P_j \qquad j = 1, 2, \cdots, n$

Y se define, $c_1 x_{1j} + c_2 x_{2j} + c_3 x_{30} + \cdots + c_m x_{mj} = Z_j \qquad j = 1, 2, \cdots, n$

Donde los c_i son los coeficientes de costo correspondientes a P_i

Para evitar confusiones en la notación, se designa el vector solución $X = (x_1, x_2, \cdots, x_m)$ por el vector $X_0 = (x_{10}, x_{20}, \cdots, x_{m0})$. Así mismo se indica que los $(n - k)$ valores restantes del vector solución han sido hechos arbitrariamente iguales a cero.

Para aplicar el Método del Simplex es necesario recurrir a los dos teoremas que se exponen a continuación:

Teorema 1: Si para cualquier j fija, se cumple la condición $z_j - c_j > 0$, entonces se puede construir un conjunto de soluciones posibles tal que $z < z_0$ para cualquier miembro del conjunto, donde el límite inferior de z puede ser finito o infinito.

Teorema 2: Si para cualquier solución básica $X = (x_{10}, x_{20}, \cdots, x_{m0})$ las condiciones $z_j - c_j \leq 0$ se cumplen, para todas las $j = 1, 2, \cdots, n$, entonces dicha solución es una solución factible mínima.

<u>PROCEDIMIENTO PARA RESOLVER EL PROBLEMA</u>

Se supone que:

a) Se seleccionan *m* vectores linealmente independientes que dan como resultado una solución posible, y se expresan todos los otros vectores en términos de esta base.

b) La matriz del problema contiene *m* vectores que pueden ser arreglados explícitamente para formar una matriz diagonal, unidad, de orden *m*.

a) Sean $(P_1, P_2, \cdots, P_m)$ los *m* vectores linealmente independientes y se designa la matriz m x m $(P_1, P_2, \cdots, P_m)$ por B. La matriz B recibe el nombre de base admisible.

Para calcular el vector solución X correspondiente y la representación de los otros vectores en términos de la base, se debe calcular primero B^{-1}, puesto que

$$B X_0 = P_0 \quad \rightarrow \quad X_0 = B^{-1} P_0 \quad \Rightarrow \quad X_j = B^{-1} P_j$$

donde, $X_0 = (x_{10}, x_{20}, \cdots, x_{m0})$ con $x_{i0} \geq 0$ y $X_j = (x_{1j}, x_{2j}, \cdots, x_{mj})$ son vectores columna.

Para comenzar el método del Simplex se agrupan los vectores de la matriz de la forma:

$$\left(P_o \middle| P_1, P_2, \cdots, P_m \middle| P_{m+1}, \cdots, P_n\right) \text{ o bien en la forma } \left(P_o \middle| B \middle| P_{m+1}, \cdots, P_n\right)$$

Multiplicando los elementos de la expresión matricial anterior por B^{-1} se obtiene:

$$B^{-1}\left(P_o \middle| B \middle| P_{m+1}, \cdots, P_n\right) = \left(X_o \middle| I_m \middle| X_{m+1}, \cdots, X_n\right)$$

Como se conocen las c_i, se calculan las $(z_j - c_j)$ y se determina, si para cualquier j la correspondiente $(z_j - c_j) > 0$. Si esto es así, se desarrolla el procedimiento de cómputo descrito en el Teorema 1.

Si no es así, se ha encontrado la solución mínima posible.

b) Se parte de un conjunto dado de vectores $(P_1, P_2, \cdots, P_n)$ que contiene *m* vectores unitarios que pueden ser agrupados para formar una matriz unitaria de orden $m \times m$.

Sean los vectores $(P_1, P_2, \cdots, P_m)$ tomando como base admisible $B = (P_1, P_2, \cdots, P_m)$

Puesto que $B^{-1} = I_m$ y dado que originariamente se supuso que todos los elementos de P_0 eran no negativos, la solución de punto extremo inicial será:

$$X_0 = P_0 \quad y \quad X_j = P_j$$

donde, $X_0 = (x_{10}, x_{20}, \cdots, x_{m0})$ con $x_{i0} \geq 0$ y $X_j = (x_{1j}, x_{2j}, \cdots, x_{mj})$

Para iniciar el método del simplex se arregla la matriz del problema como se muestra en la tabla adjunta.

I	Base	c	P_0	c_1	c_2	$\cdots$	c_h	$\cdots$	c_m	c_{m+1}	•	c_j	•	c_k	•	c_n
				P_1	P_2	$\cdots$	P_h	$\cdots$	P_m	P_{m+1}	•	P_j	•	P_k	•	P_n
1	P_1	c_1	x_{10}	1	0	$\cdots$	0	$\cdots$	0	$x_{1,m+1}$	•	x_{1j}	•	x_{1k}	•	x_{1n}
2	P_2	c_2	x_{20}	0	1	$\cdots$	0	$\cdots$	0	$x_{2,m+1}$	•	x_{2j}	•	x_{2k}	•	x_{2n}
•	•	•	•	•	•	$\cdots$	•	$\cdots$	•	•	•	•	•	•	•	•
h	P_h	c_h	x_{h0}	0	0	$\cdots$	1	$\cdots$	0	$x_{h,m+1}$	•	x_{hj}	•	x_{hk}	•	x_{hn}
•	•	•	•	•	•	$\cdots$	•	$\cdots$	•	•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	$\cdots$	•	$\cdots$	•	•	•	•	•	•	•	•
m	P_m	c_m	x_{m0}	0	0	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$x_{m,m+1}$	•	x_{mj}	•	x_{mk}	•	x_{mn}
m+1			z_0	0	0	$\cdots$	0	$\cdots$	0	$z_{m+1} - c_{m+1}$		$z_j - c_j$		$z_k - c_k$		$z_n - c_n$

En la práctica no es necesario agrupar entre sí los vectores unitarios, no obstante se hace en esta ocasión con propósito ilustrativo.

De las ecuaciones originales del problema, dadas por $AX = b$, se tiene que $x_{i0} = b_i$, x_{ij} para $j = 1, 2, \cdots, n$ se obtiene tomando el producto escalar *c* con el vector X_j, es decir:

$$z_0 = \sum_{i=1}^{m} c_i x_{i0} \qquad z_j = \sum_{i=1}^{m} c_i x_{ij} \quad 1 \leq j \leq n$$

Los elementos z_j y $(z_j - c_j)$ se anotan en sus respectivas columnas en el renglón $(m+1)$.

- La diferencia $(z_j - c_j)$ será cero para aquellos vectores que están en la base.
- Sí todos los números $(z_j - c_j) \leq 0$ para $(j = 1, 2, \cdots, n)$, entonces la solución $X_0 = (x_{10}, x_{20}, \cdots, x_{m0}) = (b_1, b_2, \cdots, b_m)$ es una solución mínima factible, y el valor correspondiente de la función objetivo es z_0.
- En caso de que al menos una diferencia $(z_j - c_j) > 0$ se calcula una nueva solución factible cuya base contiene $(m-1)$ vectores de la base original $(P_1, P_2, \cdots, P_m)$.

  El vector que debe introducirse es aquel que corresponde a $\boxed{\max_j (z_j - c_j)}$

  Si hay más de un resultado igual, la regla será seguir el orden lexicográfico.

Suponiendo que en este caso es: $\max_j (z_j - c_j) = z_k - c_k > 0$, el vector que será introducido en la base será P_k.

A continuación se calcula: $\boxed{\theta_0 = \min_i \frac{x_{i0}}{x_{ik}}}$ para los valores $x_{ik} > 0$

- Sí todas las $x_{ik} \leq 0$ habría una solución factible donde la función objetivo se puede hacer arbitrariamente pequeña, con lo que finalizaría el proceso.

- Suponiendo que algunas $x_{ik} > 0$ y que $\theta_0 = \min_i \frac{x_{i0}}{x_{ik}} = \frac{x_{h0}}{x_{hk}}$, el vector eliminado en la base sería P_h. La nueva base para la nueva solución sería $(P_1, P_2, \cdots, P_{h-1}, P_{h+1}, \cdots, P_m, P_k)$

Ahora hay que calcular explícitamente la nueva solución y expresar cada vector que no se encuentra en la base en términos de esta nueva base.

Puesto que la base inicial es $(P_1, P_2, \cdots, P_m) = I_m$, se pueden expresar fácilmente todos los vectores P_i en términos de esta base. Teniendo entonces:

$$P_0 = x_{10} P_1 + x_{20} P_2 + \cdots + x_{h0} P_h + \cdots + x_{m0} P_m$$
$$P_k = x_{1k} P_1 + x_{2k} P_2 + \cdots + x_{hk} P_h + \cdots + x_{mk} P_m$$

Si se despeja en la expresión P_k el valor de P_h y se sutituye en la de P_0 se obtiene:

$$P_k = x_{1k} P_1 + x_{2k} P_2 + \cdots + x_{hk} P_h + \cdots + x_{mk} P_m \quad \rightarrow \quad P_h = \frac{P_k}{x_{hk}} - \frac{x_{1k}}{x_{hk}} P_1 - \frac{x_{2k}}{x_{hk}} P_2 - \cdots - \frac{x_{mk}}{x_{hk}} P_m$$

$$P_0 = \overbrace{\left(x_{10} - \frac{x_{h0}}{x_{hk}} x_{1k} \right)}^{x^\bullet_{10}} P_1 + \overbrace{\left(x_{20} - \frac{x_{h0}}{x_{hk}} x_{2k} \right)}^{x^\bullet_{20}} P_2 + \cdots + \overbrace{\frac{x_{h0}}{x_{hk}}}^{x^\bullet_{k0}} P_k + \cdots + \overbrace{\left(x_{m0} - \frac{x_{h0}}{x_{hk}} x_{mk} \right)}^{x^\bullet_{m0}} P_m$$

La nueva solución posible es $X_0^\bullet = (x_{10}^\bullet, x_{20}^\bullet, \cdots, x_{k0}^\bullet, \cdots, x_{m0}^\bullet)$ con $x_{i0}^\bullet \geq 0$ y dada por

$$\boxed{x_{i0}^\bullet = x_{i0} - \frac{x_{h0}}{x_{hk}} x_{ik}} \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \cdots, h-1, h+1, \cdots, m$$

De forma análoga, sustituyendo la expresión para P_h en la de P_j, se obtiene la expresión para cada P_j que no se encuentre en la nueva base.

En términos de esta nueva base, resulta:

$$P_j = x_{1j} P_1 + x_{2j} P_2 + \cdots + x_{hj} P_h + \cdots + x_{mj} P_m \qquad 1 \leq j \leq n \quad \rightarrow$$
$$\rightarrow \quad P_j = x_{1j}^\bullet P_1 + x_{2j}^\bullet P_2 + \cdots + x_{kj}^\bullet P_k + \cdots + x_{mj}^\bullet P_m$$

donde, $\boxed{x_{ij}^\bullet = x_{ij} - \frac{x_{hj}}{x_{hk}} x_{ik}}$ $(i \neq h)$ $\boxed{x_{kj}^\bullet = \frac{x_{hj}}{x_{hk}}}$

Puesto que $z_j^\bullet - c_j = c_1 x_{1j}^\bullet + c_2 x_{2j}^\bullet + \cdots + c_k x_{kj}^\bullet + \cdots + c_m x_{mj}^\bullet - c_j$

Se desprende que $z_j^{\bullet} - c_j = z_j - c_j - \frac{x_{hj}}{x_{hk}}(z_k - c_k)$

Así como que $z_0^{\bullet} = c_1 x_{10}^{\bullet} + c_2 x_{20}^{\bullet} + \cdots + c_k x_{k0}^{\bullet} \cdots + c_m x_{m0}^{\bullet} = z_0 - \frac{x_{h0}}{x_{hk}}(z_k - c_k)$

De esta forma se observa que, para obtener una nueva solución $X_0^{\bullet}$, los nuevos vectores $x_i^{\bullet}$ y las $(z_j^{\bullet} - c_j)$ correspondientes, cada elemento de la tabla anterior para las filas $(i = 1, 2, \cdots, m-1)$ y las columnas $(j = 0, 1, \cdots, n)$ se transforma mediante las fórmulas:

$$\boxed{x_{ij}^{\bullet} = x_{ij} - \frac{x_{hj}}{x_{hk}} x_{ik}} \quad (i \neq h) \qquad \boxed{x_{kj}^{\bullet} = \frac{x_{hj}}{x_{hk}}}$$

donde, $z_0^{\bullet} = x_{m-1\,0}^{\bullet}$ y $(z_j^{\bullet} - c_j) = x_{m-1\,j}^{\bullet}$

Es decir, se aplica las fórmulas a todos los elementos de la tabla, incluyendo la columna P_0 y la fila $(m-1)$

RESUMEN DEL MÉTODO DEL SIMPLEX

- Se calculan los elementos $(z_j - c_j)$ para determinar si se ha encontrado una solución mínima, es decir, sí $(z_j - c_j) \leq 0$ para todo valor de j.
- El vector que se ha de introducir en la base sería el mayor $(z_j - c_j)$
- El vector que ha de ser eliminado de la base, que para asegurar sea una nueva solución ha de ser el vector con $\min\left(\frac{x_{i0}}{x_{ik}}\right)$ para aquellas $x_{ik} > 0$, donde k corresponde al vector seleccionado en el paso 2. Sí todas las $x_{ik} \leq 0$ la solución es ilimitada.
- La transformación de la tabla por el método de eliminación para obtener la nueva solución y los elementos asociados.
- Cada una de estas iteraciones produce una solución nueva y por los teoremas 1 y 2 enunciados se obtiene finalmente una solución mínima, o bien se determina una solución ilimitada.

APLICACIÓN DEL MÉTODO SIMPLEX, SOLUCIÓN FACTIBLE MÍNIMA

Minimizar: $z = x_1 - 3x_2 + 2x_3$

sujeto a las restricciones: $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 \le 7 \\ -2x_1 + 4x_2 \le 12 \\ -4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \le 10 \\ x_j \ge 0 \end{cases}$

Se introducen las variables de holgura x_4 , x_5 y x_6 , cuyos coeficientes en la función objetivo son cero, quedando el planteamiento:

Minimizar: $z = x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 0x_4 - 0x_5 - 0x_6$

sujeto a las restricciones: $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 7 \\ -2x_1 + 4x_2 + x_5 = 12 \\ -4x_1 + 3x_2 + 8x_3 + x_6 = 10 \\ x_j \ge 0 \end{cases}$

La base inicial $B_0 = \{P_4, P_5, P_6\}$ y la solución es $X_0 = (x_4, x_5, x_6) = (7, 12, 10)$

Puesto que $c_4 = c_5 = c_6 = 0$

			0	1	2	3	4	5	6
			c_j	1	−3	2	0	0	0
i	Base	c	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_4	0	7	3	−1	2	1	0	0
2	P_5	0	12	−2	4	0	0	1	0
3	P_6	0	10	−4	3	8	0	0	1
$z_j - c_j$			0				0	0	0

El valor correspondiente de la función objetivo $z_0 = \sum_{i=1}^{3} c_i x_{i0} = 0$

Se selecciona a P_2 para entrar en la base, ya que, $\max_j (z_j - c_j) = z_2 - c_2 = 3 > 0$

Para asegurar una nueva solución ha de ser el vector con $\min(x_{i0} / x_{i2})$ con $x_{i2} > 0$, si todas las $x_{i2} \le 0$ la solución sería ilimitada.

Se calcula $\theta_o = \min_i \frac{x_{i0}}{x_{i2}} = \frac{x_{h0}}{x_{hk}}$ para con $x_{i2} > 0 \rightarrow \theta_0 = \min\left(\frac{x_{20}}{x_{22}}, \frac{x_{30}}{x_{22}}\right) \rightarrow \theta_0 = \min\left(\frac{12}{4}, \frac{10}{4}\right)$

Por consiguiente, es P_5 el que sale de la base, entra P_2, $B_1 = \{P_4, P_2, P_6\}$

Se transforma la base: $\begin{cases} x_{ij}^{\bullet} = x_{ij} - \dfrac{x_{hj}}{x_{hk}} x_{ik} & i \neq h \\ x_{ij}^{\bullet} = \dfrac{x_{hj}}{x_{hk}} & i = h \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_{10}^{\bullet} = x_{10} - \dfrac{x_{20}}{x_{22}} x_{12} = 7 - \dfrac{12}{4} x\,(-1) = 10 \\ x_{20}^{\bullet} = \dfrac{x_{20}}{x_{22}} = \dfrac{12}{4} = 3 \\ x_{30}^{\bullet} = x_{30} - \dfrac{x_{20}}{x_{22}} x_{32} = 10 - \dfrac{12}{4} x\,3 = 1 \end{cases}$

Se obtiene una nueva solución: $X_0^{\bullet} = (x_4\,,\ x_2\,,\ x_6) = (10\,,\ 3\,,\ 1)$, se calculan los valores para cada P_j $(P_1\,, P_3\,, P_5)$ que no se encuentre en la base nueva.

$$x_{11}^{\bullet} = x_{11} - \frac{x_{21}}{x_{22}} x_{12} = 3 - \frac{-2}{4} x\,(-1) = \frac{5}{2} \qquad x_{12}^{\bullet} = x_{12} - \frac{x_{22}}{x_{22}} x_{12} = 0$$

$$x_{21}^{\bullet} = \frac{x_{21}}{x_{22}} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \qquad x_{22}^{\bullet} = \frac{x_{22}}{x_{22}} = 1$$

$$x_{31}^{\bullet} = x_{31} - \frac{x_{21}}{x_{22}} x_{32} = -4 - \frac{-2}{4} x\,3 = -\frac{5}{2} \qquad x_{23}^{\bullet} = \frac{x_{23}}{x_{22}} = 0$$

$$x_{13}^{\bullet} = x_{13} - \frac{x_{23}}{x_{22}} x_{12} = 2 - 0 = 2 \qquad x_{15}^{\bullet} = x_{15} - \frac{x_{25}}{x_{22}} x_{12} = 0 - \frac{1}{4} x(-1) = \frac{1}{4}$$

$$x_{23}^{\bullet} = \frac{x_{23}}{x_{22}} = 0 \qquad x_{25}^{\bullet} = \frac{x_{25}}{x_{22}} = \frac{1}{4}$$

$$x_{33}^{\bullet} = x_{33} - \frac{x_{23}}{x_{22}} x_{12} = 8 - 0 = 8 \qquad x_{35}^{\bullet} = x_{35} - \frac{x_{25}}{x_{22}} x_{32} = 0 - \frac{1}{4} x\,3 = -\frac{3}{4}$$

			0	1	2	3	4	5	6
			c_j	1	-3	2	0	0	0
i	Base	c	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_4	0	10	$5/2$	0	2	1	$1/4$	0
2	P_2	-3	3	$-1/2$	1	0	0	$1/4$	0
3	P_6	0	1	$-5/2$	0	8	0	$-3/4$	1
$z_j^{\bullet} - c_j^{\bullet}$			-9	$1/2$ $\frac{3}{2} - 1$	0 $-3+3$	-2 $0-2$	0	$-3/4$ $-\frac{3}{4} - 0$	0

La función objetivo $z_0^{\bullet} = \sum_{i=1}^{3} c_i\, x_{i0} = -9$

En el segundo paso, puesto que $\max(z_j^{\bullet} - c_j) = z_1^{\bullet} - c_1 = \frac{1}{2} > 0$

Se calcula θ_o para con $x_{i1} > 0 \rightarrow \theta_0 = \frac{x_{10}}{x_{11}} = \frac{10}{5/2}$

Por tanto, P_1 entra en la base y sale P_4, $B_2 = \{P_1, P_2, P_6\}$

Se transforma la base: $\begin{cases} x_{ij}^{\bullet\bullet} = x_{ij} - \dfrac{x_{hj}}{x_{hk}} x_{ik} & i \neq h \\ x_{ij}^{\bullet\bullet} = \dfrac{x_{hj}}{x_{hk}} & i = h \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_{10}^{\bullet\bullet} = \dfrac{x_{10}}{x_{11}} = \dfrac{10}{5/2} = 4 \\ x_{20}^{\bullet\bullet} = x_{20} - \dfrac{x_{10}}{x_{11}} x_{21} = 3 - \dfrac{10}{5/2} x \dfrac{-1}{2} = 5 \\ x_{30}^{\bullet\bullet} = x_{30} - \dfrac{x_{10}}{x_{11}} x_{31} = 1 - \dfrac{10}{5/2} x \dfrac{-5}{2} = 11 \end{cases}$

Se obtiene una nueva solución: $X_0^{\bullet\bullet} = (x_1, x_2, x_6) = (4, 5, 11)$, se calculan los valores para cada P_j (P_3, P_4, P_5) que no se encuentre en la base nueva.

$$x_{13}^{\bullet\bullet} = \frac{x_{13}}{x_{11}} = \frac{2}{5/2} = \frac{4}{5} \qquad x_{14}^{\bullet\bullet} = \frac{x_{14}}{x_{11}} = \frac{1}{5/2} = \frac{2}{5}$$

$$x_{23}^{\bullet\bullet} = x_{23} - \frac{x_{13}}{x_{11}} x_{21} = 0 - \frac{4}{5} x \frac{-1}{2} = \frac{2}{5} \qquad x_{24}^{\bullet\bullet} = x_{24} - \frac{x_{14}}{x_{11}} x_{21} = 0 - \frac{2}{5} x \frac{-1}{2} = \frac{1}{5}$$

$$x_{33}^{\bullet\bullet} = x_{33} - \frac{x_{13}}{x_{11}} x_{31} = 8 - \frac{4}{5} x \frac{-5}{2} = 10 \qquad x_{34}^{\bullet\bullet} = x_{34} - \frac{x_{14}}{x_{11}} x_{31} = 0 - \frac{2}{5} x \frac{-5}{2} = 1$$

$$x_{15}^{\bullet\bullet} = \frac{x_{15}}{x_{11}} = \frac{1/4}{5/2} = \frac{1}{10}$$

$$x_{25}^{\bullet\bullet} = x_{25} - \frac{x_{15}}{x_{11}} x_{21} = \frac{1}{4} - \frac{1}{10} x \frac{-1}{2} = \frac{3}{10}$$

$$x_{35}^{\bullet\bullet} = x_{35} - \frac{x_{15}}{x_{11}} x_{31} = \frac{-3}{4} - \frac{1}{10} x \frac{-5}{2} = -\frac{1}{2}$$

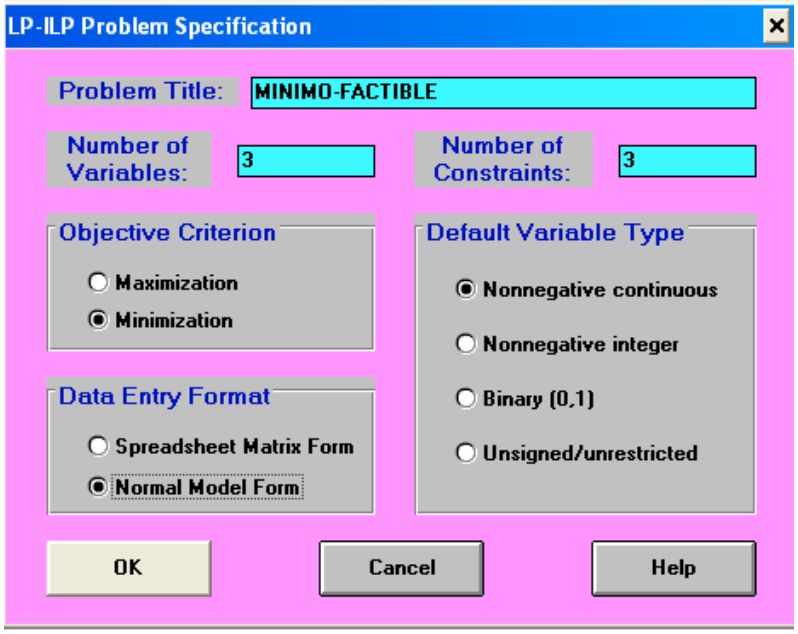
			0	1	2	3	4	5	6
			c_j	1	−3	2	0	0	0
i	Base	c	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_1	1	4	1	0	4/5	2/5	1/10	0
2	P_2	−3	5	0	1	2/5	1/5	3/10	0
3	P_6	0	11	0	0	10	1	−1/2	1
$z_j^{\bullet\bullet} - c_j^{\bullet\bullet}$			−11	0 $1-1$	0 $-3+3$	$-12/5$ $-\frac{2}{5}-2$	$-1/5$ $0-\frac{1}{5}$	$-4/5$ $0-\frac{4}{5}$	0

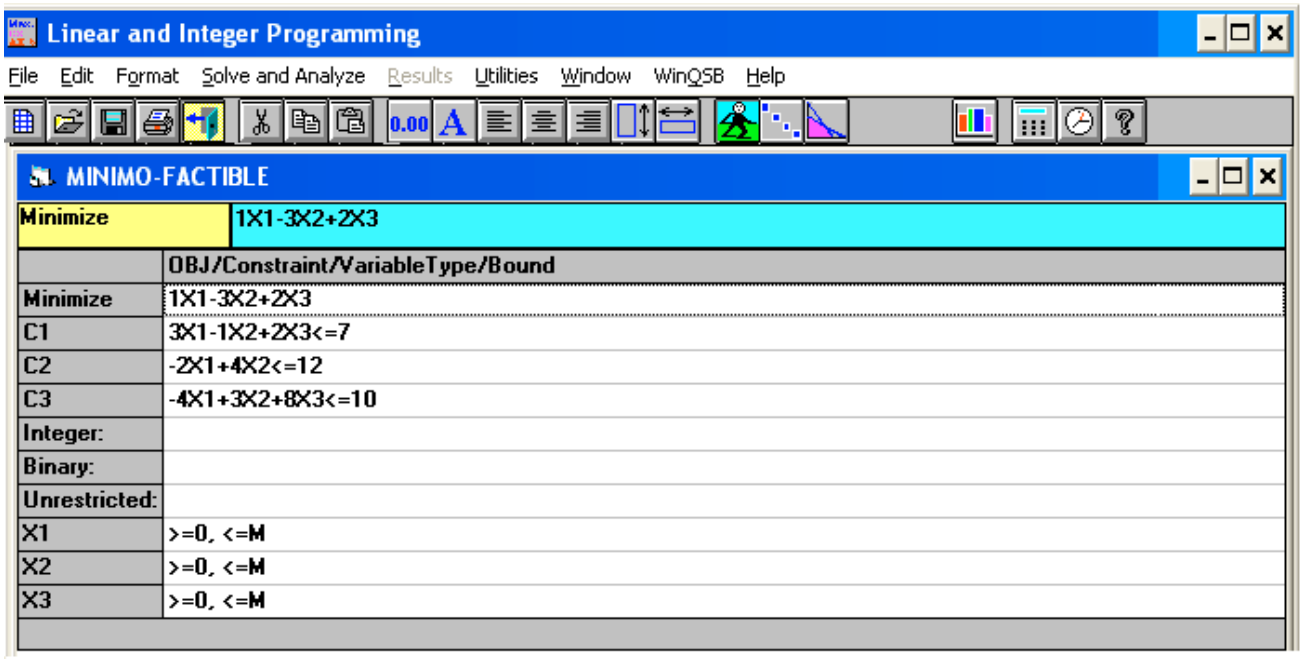
Como $\max(z_j^{\bullet\bullet} - c_j^{\bullet\bullet}) = 0$ la solución $X_0^{\bullet\bullet} = (x_1, x_2, x_6) = (4, 5, 11)$ es una solución factible mínima, con lo que se ha resuelto el problema.

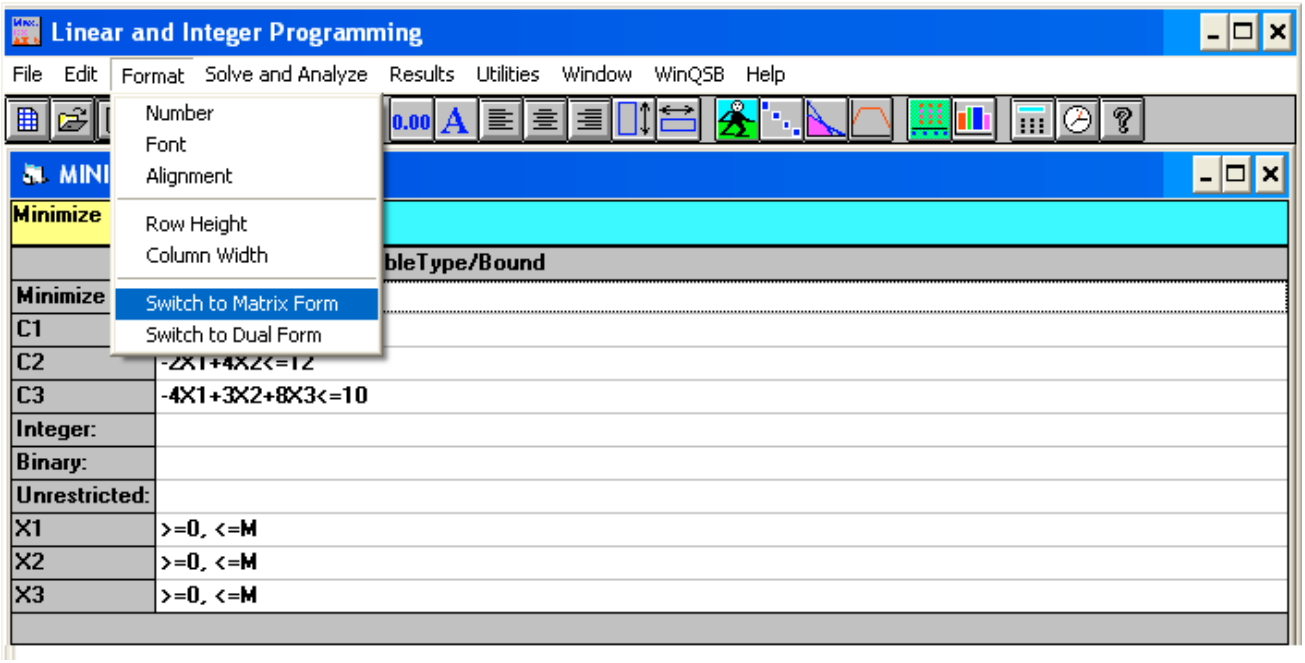
PROGRAMACIÓN LINEAL: SIMPLEX

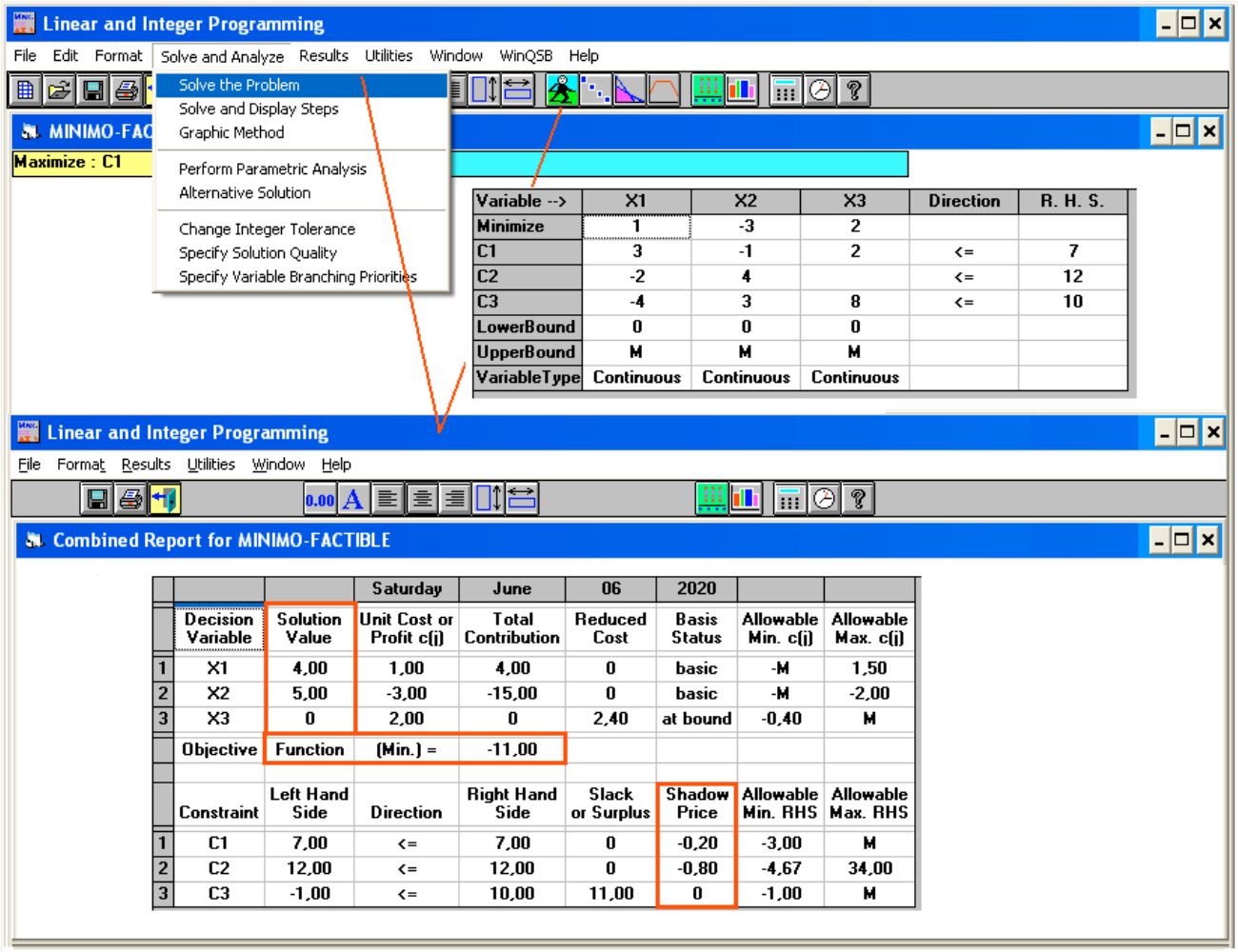
Minimizar: $z = x_1 - 3x_2 + 2x_3$

$$\text{restricciones: } \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 \le 7 \\ -2x_1 + 4x_2 \le 12 \\ -4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \le 10 \\ x_j \ge 0 \end{cases}$$









Variable -->	X1	X2	X3	Direction	R. H. S.
Minimize	1	-3	2		
C1	3	-1	2	<=	7
C2	-2	4		<=	12
C3	-4	3	8	<=	10
LowerBound	0	0	0		
UpperBound	M	M	M		
VariableType	Continuous	Continuous	Continuous		

			Saturday	June	06	2020		
	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
1	X1	4,00	1,00	4,00	0	basic	-M	1,50
2	X2	5,00	-3,00	-15,00	0	basic	-M	-2,00
3	X3	0	2,00	0	2,40	at bound	-0,40	M
	Objective	Function	(Min.) =	-11,00				
	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
1	C1	7,00	<=	7,00	0	-0,20	-3,00	M
2	C2	12,00	<=	12,00	0	-0,80	-4,67	34,00
3	C3	-1,00	<=	10,00	11,00	0	-1,00	M

La solución óptima es: $x_1 = 4$, $x_2 = 5$, $x_3 = 0$

Valor de la función objetivo: $z = -11$

Precios sombra (Shadow Price): Indican cuánto se estaría dispuesto a pagar por una unidad adicional de cada recurso, o bien, la mejora en el valor de la función objetivo por incremento unitario de cada recurso.

PROGRAMACIÓN LINEAL: SIMPLEX DUAL

Maximizar: $z = 4x_1 + 7x_2 + 3x_3$

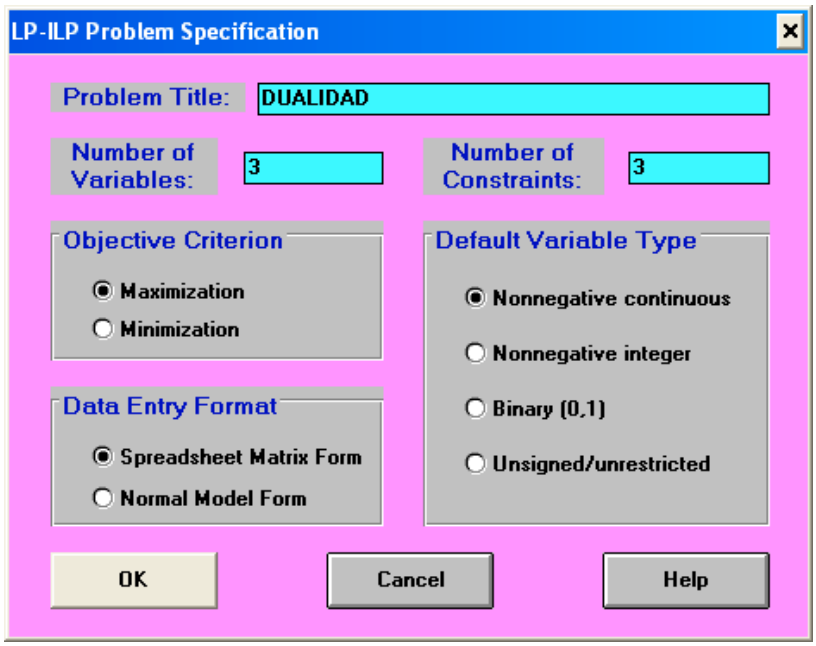
restricciones: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 30 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 45 \\ x_j \ge 0 \end{cases}$ Se pide:

a) Formular y resolver el problema dual

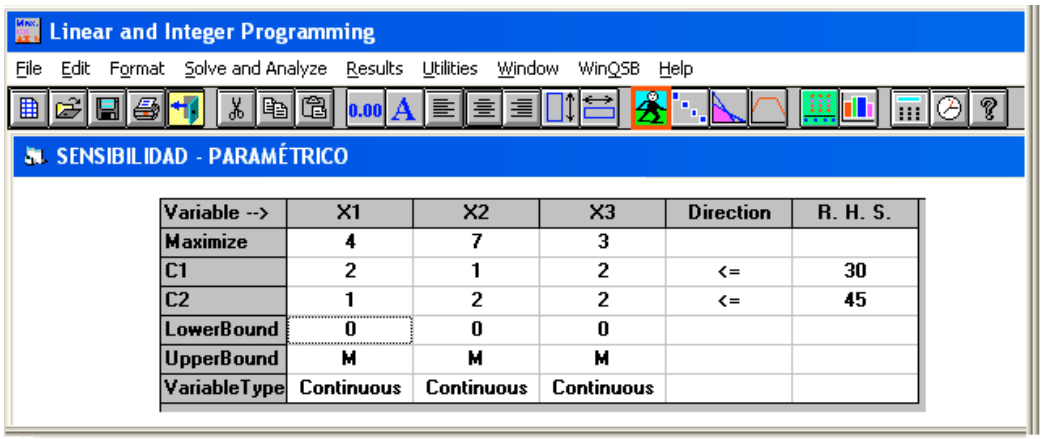
b) ¿Cuánto se pagaría para que la primera restricción fuera 40?

c) Partiendo del problema dual, $(x_1 = 5\ ,\ x_2 = 10\ ,\ x_3 = 5)$, ¿es solución del problema original?

a)

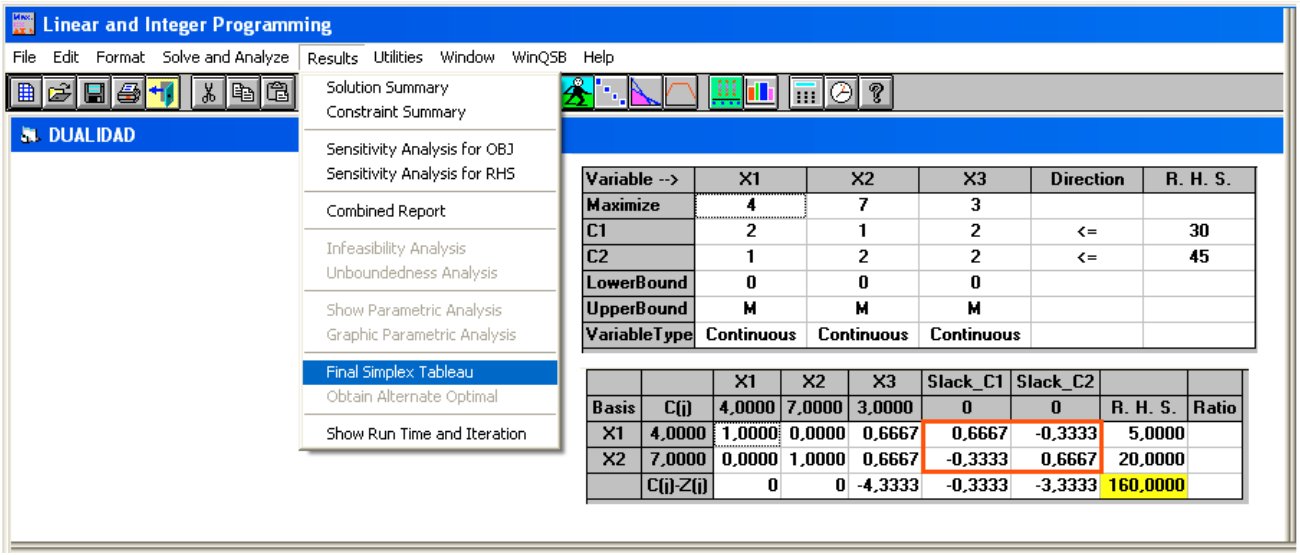


Introducidos los datos



Variable -->	X1	X2	X3	Direction	R. H. S.
Maximize	4	7	3		
C1	2	1	2	<=	30
C2	1	2	2	<=	45
LowerBound	0	0	0		
UpperBound	M	M	M		
VariableType	Continuous	Continuous	Continuous		

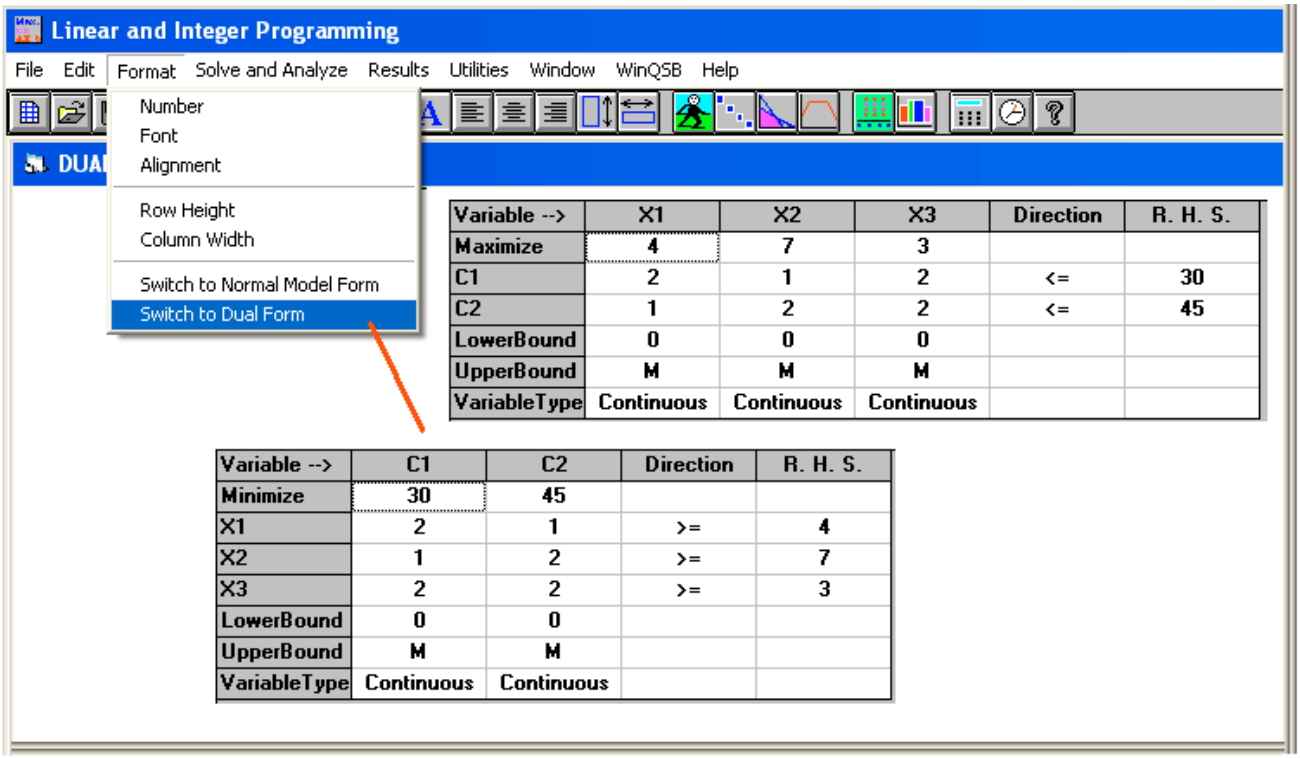
Con la opción: Result / Final Simplex Tableau se obtiene la tabla:



Las variables básicas son x_1 , x_2 . El valor de la función objetivo es $z = 160$

La matriz asociada a la base inicial es $B^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}6667 & -0{,}3333 \\ -0{,}3333 & 0{,}6667 \end{pmatrix}$

a) Para formular el problema dual: Format / Switch to Dual Form



Problema Original

Maximizar: $z = 4x_1 + 7x_2 + 3x_3$

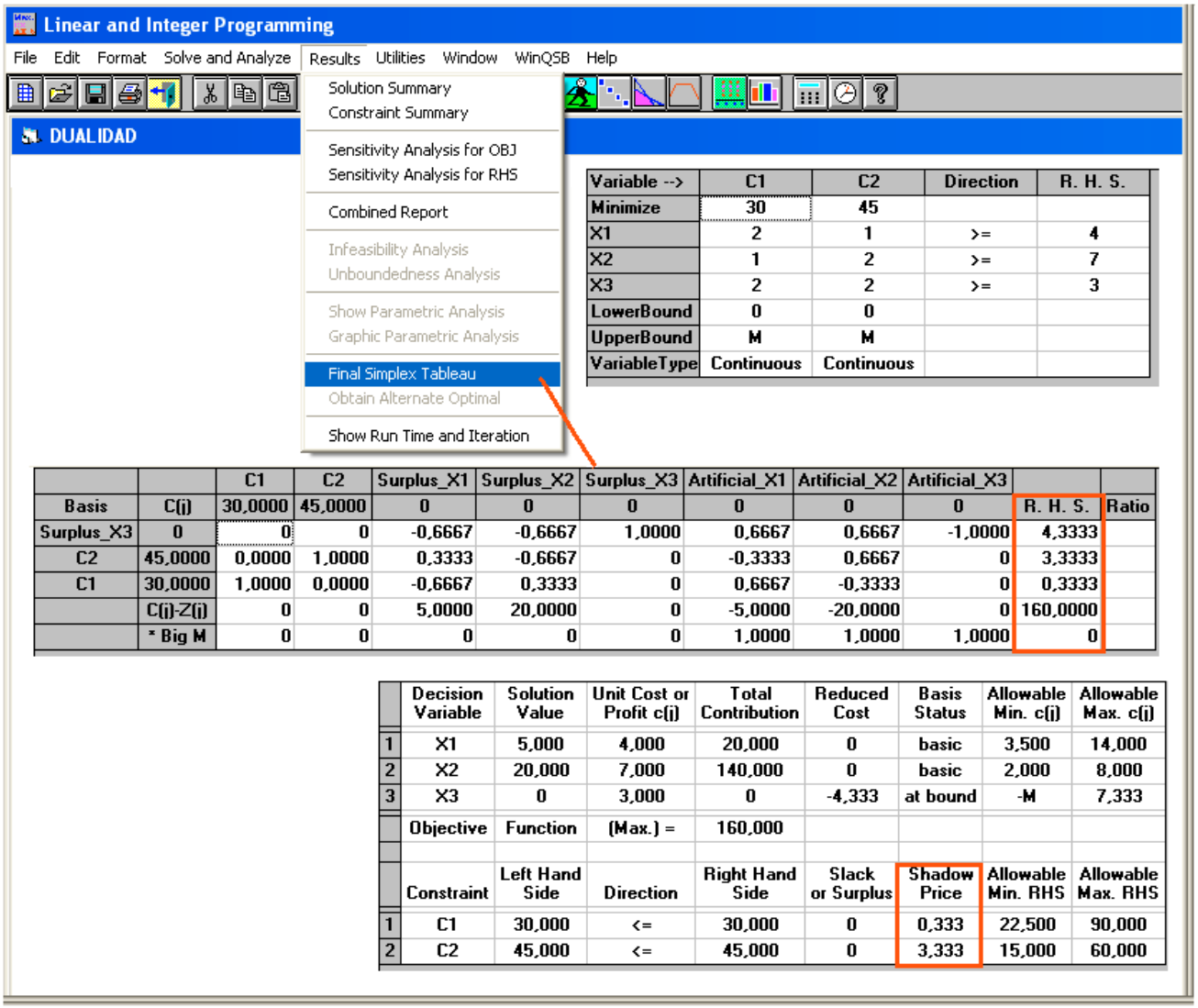
$$\text{restricciones: } \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 30 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 45 \\ x_j \ge 0 \end{cases}$$

Problema Dual

Minimizar: $w = 30y_1 + 45y_2$

$$\text{restricciones: } \begin{cases} 2y_1 + y_2 \ge 4 \\ y_1 + 2y_2 \ge 7 \\ 2y_1 + 2y_2 \ge 3 \\ y_i \ge 0 \end{cases}$$

Con la opción: Result / Final Simplex Tableau se obtiene la tabla:



Variable -->	C1	C2	Direction	R. H. S.
Minimize	30	45		
X1	2	1	>=	4
X2	1	2	>=	7
X3	2	2	>=	3
LowerBound	0	0		
UpperBound	M	M		
VariableType	Continuous	Continuous		

		C1	C2	Surplus_X1	Surplus_X2	Surplus_X3	Artificial_X1	Artificial_X2	Artificial_X3		
Basis	C(j)	30,0000	45,0000	0	0	0	0	0	0	R. H. S.	Ratio
Surplus_X3	0	0	0	-0,6667	-0,6667	1,0000	0,6667	0,6667	-1,0000	4,3333	
C2	45,0000	0,0000	1,0000	0,3333	-0,6667	0	-0,3333	0,6667	0	3,3333	
C1	30,0000	1,0000	0,0000	-0,6667	0,3333	0	0,6667	-0,3333	0	0,3333	
	C(j)-Z(j)	0	0	5,0000	20,0000	0	-5,0000	-20,0000	0	160,0000	
	* Big M	0	0	0	0	0	1,0000	1,0000	1,0000	0	

	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
1	X1	5,000	4,000	20,000	0	basic	3,500	14,000
2	X2	20,000	7,000	140,000	0	basic	2,000	8,000
3	X3	0	3,000	0	-4,333	at bound	-M	7,333
	Objective	Function	(Max.) =	160,000				

	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
1	C1	30,000	<=	30,000	0	0,333	22,500	90,000
2	C2	45,000	<=	45,000	0	3,333	15,000	60,000

La solución óptima es: $y_1 = 0{,}333$, $y_2 = 3{,}333$, obteniendo un valor para la función objetivo $w = 160$, igual que la obtenida en el problema original.

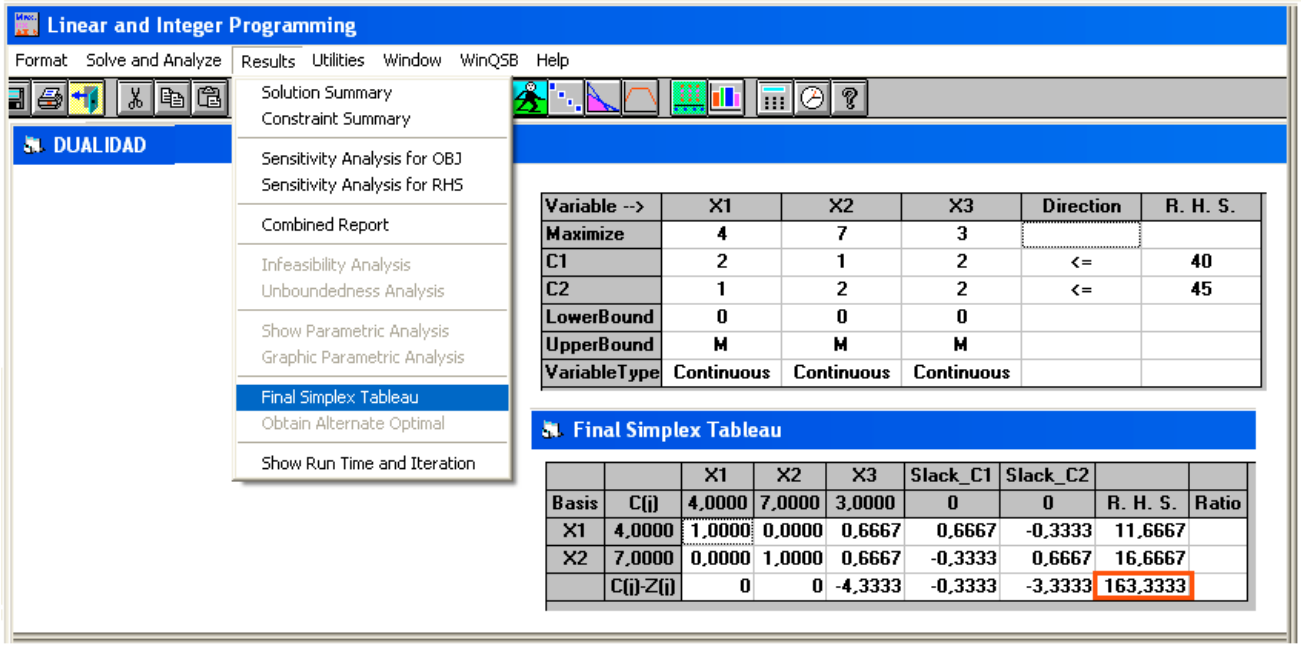
Al observar la tabla resumen del problema original, la solución óptima del problema dual coincide con los precios sombra (Shadow price) asociados al problema original.

Los valores de Shadow price representan el precio que una empresa está dispuesta a pagar por un incremento unitario del recurso disponible.
Nunca se paga más de este precio por unidad suplementaria del recurso; en caso de hacerse, se pagaría por el uso de esa cantidad adicional un precio superior a la mejora que produce en la función objetivo.

b) Si la primera restricción se aumenta en 10 unidades, el problema queda:

Maximizar: $z = 4x_1 + 7x_2 + 3x_3$

restricciones: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 40 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 45 \\ x_j \geq 0 \end{cases}$ Se pide:



Variable -->	X1	X2	X3	Direction	R. H. S.
Maximize	4	7	3		
C1	2	1	2	<=	40
C2	1	2	2	<=	45
LowerBound	0	0	0		
UpperBound	M	M	M		
VariableType	Continuous	Continuous	Continuous		

		X1	X2	X3	Slack_C1	Slack_C2		
Basis	C(j)	4,0000	7,0000	3,0000	0	0	R. H. S.	Ratio
X1	4,0000	1,0000	0,0000	0,6667	0,6667	-0,3333	11,6667	
X2	7,0000	0,0000	1,0000	0,6667	-0,3333	0,6667	16,6667	
	C(j)-Z(j)	0	0	-4,3333	-0,3333	-3,3333	163,3333	

Se obtiene un valor de la función objetivo $z = 163{,}3333$

c) Responder si la solución $(x_1 = 5\ ,\ x_2 = 10\ ,\ x_3 = 5)$ es solución del problema original, se puede hacer de varias formas:

c1) Se sabe que la solución óptima es $x_1 = 5\ ,\ x_2 = 20\ ,\ x_3 = 0$, con lo cual no puede ser óptima.

c2) Resolviendo el problema dual se conoce que la función objetivo es $w = 160$, que coincide con el valor de la función objetivo del problema original.
Para una solución $x_1 = 5\ ,\ x_2 = 10\ ,\ x_3 = 5$ se tendría:
$z = 4x_1 + 7x_2 + 3x_3 \quad \rightarrow \quad z = 4 \times 5 + 7 \times 10 + 3 \times 5 = 105 \neq 160 \quad \rightarrow$ No puede ser

c3) Como la solución del dual tiene todas sus componentes no nulas $(y_1 = 0{,}333\ ,\ y_2 = 3{,}333)$ en la solución óptima, las restricciones del problema original serán igualdades.
Se prueba si se verifica en la solución propuesta:

$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \times 5 + 10 + 2 \times 5 = 30 \quad \rightarrow$ Sí
$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5 + 2 \times 10 + 2 \times 5 = 35 \neq 45 \quad \rightarrow$ No

PROCEDIMIENTO DEL MÉTODO SIMPLEX PARA LA FORMA MATRICIAL

Partiendo de un problema de Programación Lineal en forma estándar, se determinan las matrices:

A, b, B, c_j, c_B, X_B

$A \equiv$ Matriz de coeficientes de las variables en las restricciones

$b \equiv$ Lado derecho de las restricciones (limitaciones)

$B \equiv$ Matriz que proporciona la Solución Inicial Básica Factible y está formada por las columnas de las variables básicas, es decir aquellas que están en solución.

$c_j \equiv$ Coeficientes de las variables en la función objetivo

$c_B \equiv$ Coeficientes de las variables básicas en la Función Objetivo.

$X_B \equiv$ Valores de las variables básicas que dan solución al problema.

$z = c_B X_B$ siendo $X_B \equiv B^{-1} b$

a) Se determina la variable que entra en la base de solución. Se obtienen los $(z_j - c_j)$ para las variables no básicas, donde $Y_j = B^{-1} a_j$, $z_j = c_B Y_j$

Las Y_j de las variables básicas forman las columnas de la matriz identidad y las $(z_j - c_j)$ de las variables básicas son cero.

Las Y_j son las columnas actualizadas a las transformaciones de renglón de la matriz A, para generar la columna de la matriz identidad que aporta la columna de la variable que entra en solución.

Maximizar: Entra la variable que tenga el mayor valor negativo $(z_j - c_j)$, alcanzando la solución óptima cuando todos los $(z_j - c_j) \geq 0$

Minimizar: Entra la variable que tenga el mayor valor positivo $(z_j - c_j)$, alcanzando la solución óptima cuando todos los $(z_j - c_j) \leq 0$

El beneficio que se tendrá en z es $(c_j - z_j)$ por cada unidad de valor que tenga la variable X_r que entra en la solución.

b) VARIABLE QUE SALE DE LA SOLUCIÓN: Se analiza cada columna de las variables no básicas junto con el valor de las variables básicas X_B.

La variable que sale de la solución es el $\text{Min}\left(\frac{X_{Bi}}{Y_{ir}},\ Y_{ir} > 0\right) = \text{Min}\left(\frac{X_{B1}}{Y_{1r}}, \frac{X_{B2}}{Y_{2r}}, \cdots, \text{con } Y_{ir} > 0\right)$,

donde r corresponde a la columna de la variable que entra en la solución.

La columna de la variable que entra en la solución debe aportar la columna de la matriz identidad.

En la matriz B, la columna de la variable con el $\text{Min}\left(\frac{X_{Bi}}{Y_{ir}}\right)$ abandona la base de solución y entra en su lugar la columna de la variable r.

c) Se reinicia el proceso en el apartado (a) hasta que se cumpla el criterio de optimización, bien hasta que todos los $(z_j - c_j) \geq 0$ en caso de maximización, o bien hasta que todos los $(z_j - c_j) \leq 0$ en caso de minimización.

APLICACIÓN: Maximizar $z = 5x_1 + 3x_2$ sujeto a las restricciones: $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \leq 15 \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$

En forma estándar: $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + x_3 \qquad = 15 \\ 5x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 = 10 \\ x_i \geq 0 \quad x_3 \text{ y } x_4 \text{ son variables de holgura} \end{cases}$

Dado que $b = \begin{bmatrix} 15 \\ 10 \end{bmatrix}$, $c_j = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, las columnas a_3 y a_4 forman las columnas de la matriz identidad (x_3 y x_4 son variables básicas), se hace: $b_1 = a_3$ y $b_2 = a_4$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_{B1} \\ x_{B2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x_3 = x_{B1} = 15 \\ x_4 = x_{B2} = 10 \end{matrix} \quad x_1 = x_2 = 0$$

El valor de la función objetivo es: $z_0 = c_B X_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15 \\ 10 \end{bmatrix} = 0$

Se analiza la variable que entra en la solución: $Y = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & 1 & 0 \\ y_{21} & y_{22} & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$y_1 = \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{21} \end{bmatrix} = B^{-1}a_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} y_{11} = 3 \\ y_{21} = 5 \end{matrix}$$

$$y_2 = \begin{bmatrix} y_{12} \\ y_{22} \end{bmatrix} = B^{-1}a_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} y_{12} = 5 \\ y_{22} = 2 \end{matrix}$$

$$z_1 = c_B\, y_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = 0 \qquad z_2 = c_B\, y_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = 0$$

Entra la variable con mayor valor negativo $(z_j - c_j)$: $\begin{cases} z_1 - c_1 = 0 - 5 = -5 \\ z_2 - c_2 = 0 - 3 = -3 \end{cases}$

Así, entra la variable x_1.

Se analiza la variable que sale de la solución donde, r es la fila en cuestión, j corresponde a la variable que entra en solución.

$$\frac{x_{Br}}{y_{rj}} = \text{Min}\left\{ \frac{x_{Bi}}{y_{rj}},\ y_{rj} > 0 \right\} = \text{Min}\left\{ \frac{x_{B1}}{y_{1j}}, \frac{x_{B2}}{y_{2j}},\ y_{rj} > 0 \right\} = \text{Min}\left\{ \frac{15}{3}, \frac{10}{5} \right\} \rightarrow \frac{10}{5} = \frac{x_4}{y_{21}}$$

Por consiguiente, x_4 sale de la solución.

El valor de z mejorado es: $z_1 = z_0 + \dfrac{x_4}{y_{21}}(c_1 - z_1) = 0 + \dfrac{10}{5}(5 - 0) = 10$

La razón de cambio es $(c_1 - z_1)$, por cada unidad que tenga la variable x_1 que entra en la solución, la función objetivo se verá mejorada en $(c_1 - z_1)$ unidades.

Se inicia el proceso iterativo: Las variables básicas x_3 y x_4 pasan a ser x_3 y x_1

Se hace $b_1 = a_3$, $b_2 = a_1$, con lo que:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3/5 \\ 0 & 1/5 \end{bmatrix}$$

$$X_B = B^{-1} b = \begin{bmatrix} 1 & -3/5 \\ 0 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_{B1} \\ x_{B2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x_3 = x_{B1} = 9 \\ x_1 = x_{B2} = 2 \end{matrix} \quad x_2 = x_4 = 0$$

El valor de la función objetivo es: $z_1 = c_B X_B = \begin{bmatrix} 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \end{bmatrix} = 10$

Se analiza la variable que entra en la solución: $Y = \begin{bmatrix} 0 & y_{12} & 1 & y_{14} \\ 1 & y_{22} & 0 & y_{24} \end{bmatrix}$

$$y_2 = \begin{bmatrix} y_{12} \\ y_{22} \end{bmatrix} = B^{-1} a_2 = \begin{bmatrix} 1 & -3/5 \\ 0 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19/5 \\ 2/5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} y_{12} = 19/5 \\ y_{22} = 2/5 \end{matrix}$$

$$y_4 = \begin{bmatrix} y_{14} \\ y_{24} \end{bmatrix} = B^{-1} a_4 = \begin{bmatrix} 1 & -3/5 \\ 0 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/5 \\ 1/5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} y_{14} = -3/5 \\ y_{24} = 1/5 \end{matrix}$$

$$z_2 = c_B\, y_2 = \begin{bmatrix} 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 19/5 \\ 2/5 \end{bmatrix} = 2 \qquad z_4 = c_B\, y_4 = \begin{bmatrix} 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3/5 \\ 1/5 \end{bmatrix} = 1$$

Entra la variable con mayor valor negativo $(z_j - c_j)$: $\begin{cases} z_2 - c_2 = 2 - 3 = -1 \\ z_4 - c_4 = 1 - 0 = 1 \end{cases} \rightarrow$ Entra x_2

Se analiza la variable que sale de la solución donde: r es la fila en cuestión, j corresponde a la variable que entra en solución.

$$\frac{x_{Br}}{y_{rj}} = \text{Min}\left\{ \frac{9}{19/5}, \frac{2}{2/5}, y_{ij} > 0 \right\} = \frac{9}{19/5} = \frac{45}{19} = \frac{x_3}{y_{12}} \rightarrow \text{Sale } x_3$$

El valor de z mejorado es: $z_2 = z_1 + \frac{x_3}{y_{12}}(c_2 - z_2) = 10 + \frac{45}{19}(3-2) = \frac{235}{19}$

Se inicia el proceso iterativo: Las variables básicas x_3 y x_1 pasan a ser x_2 y x_1

Se hace $b_1 = a_2$, $b_2 = a_1$, con lo que:

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 5/19 & -3/19 \\ -2/19 & 5/19 \end{bmatrix}$$

$$X_B = B^{-1} b = \begin{bmatrix} 5/19 & -3/19 \\ -2/19 & 5/19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45/19 \\ 20/19 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_{B1} \\ x_{B2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x_2 = x_{B1} = 45/19 \\ x_1 = x_{B2} = 20/19 \end{matrix} \quad x_3 = x_4 = 0$$

El valor de la función objetivo es: $z = c_B X_B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 45/19 \\ 20/19 \end{bmatrix} = \frac{235}{19}$

Se analiza la variable que entra en la solución: $Y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & y_{13} & y_{14} \\ 1 & 0 & y_{23} & y_{24} \end{bmatrix}$

$$y_3 = \begin{bmatrix} y_{13} \\ y_{23} \end{bmatrix} = B^{-1} a_3 = \begin{bmatrix} 5/19 & -3/19 \\ -2/19 & 5/19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/19 \\ -2/19 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} y_{13} = 5/19 \\ y_{23} = -2/19 \end{matrix}$$

$$y_4 = \begin{bmatrix} y_{14} \\ y_{24} \end{bmatrix} = B^{-1} a_4 = \begin{bmatrix} 5/19 & -3/19 \\ -2/19 & 5/19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/19 \\ 5/19 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} y_{14} = -3/19 \\ y_{24} = 5/19 \end{matrix}$$

$$z_3 = c_B\, y_3 = \begin{bmatrix} 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5/19 \\ -2/19 \end{bmatrix} = \frac{5}{19} \qquad z_4 = c_B\, y_4 = \begin{bmatrix} 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3/19 \\ 5/19 \end{bmatrix} = \frac{16}{19}$$

Entra la variable con mayor valor negativo $(z_j - c_j)$: $\begin{cases} z_3 - c_3 = 5/19 - 0 = 5/19 \\ z_4 - c_4 = 16/19 - 0 = 16/19 \end{cases}$

Todos los valores $(z_j - c_j) \geq 0$, con lo cual ninguna variable entra en la solución ya que es óptima.

$$z = c_B X_B \quad = \begin{bmatrix} 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 45/19 \\ 20/19 \end{bmatrix} = \frac{235}{19}$$

x_2 y x_1 son variables básicas $x_B = \begin{bmatrix} 45/19 \\ 20/19 \end{bmatrix}$, ya que con estos valores la función objetivo óptima es $z^{\bullet} = \frac{235}{19}$

☞ RESUMEN DEL MÉTODO DE KARMARKAR (MÉTODO DEL PUNTO INTERIOR)

La estrategia consiste en la búsqueda del óptimo a través de caminos que recorren la zona ìnterior de la región factible; de ahí su nombre de Método del Punto Interior.

1. Se realizan los cocientes entre cada elemento de la columna P_0 por el homólogo de la columna P_1 (asociada a la variable x_1), que es la variable que va a dejar de ser nula en el vértice adyacente siguiente.

2. El mínimo cociente positivo corresponde a la variable que pasará a ser nula en el vértice siguiente. El elemento de la columna P_1 que haga mínimo el cociente será el *elemento pivote* (x_{hk}), alrededor de él gira la transformación de los coeficientes de la tabla que permitirá pasar a la segunda tabla del proceso.

3. La fila del *pivote* se divide por el valor del *pivote*.

4. La columna del *pivote* se hace 0 salvo el elemento del *pivote* que vale 1.

5. Las columnas de las variables que con respecto a la tabla anterior que siguen en base quedan inalteradas. Cualquier otro elemento se transforma según la regla que se adjunta:

$$x_{ij}^{\bullet} = x_{ij} - \frac{x_{hj}}{x_{hk}} x_{ik} \quad i \neq h \qquad x_{kj}^{\bullet} = \frac{x_{hj}}{x_{hk}} \quad i = h$$

6. Que la actividad *h* tome el valor o nivel k_1, en lugar del valor 0 que tomaba antes es $k_1(c_h - z_h)$ en lugar de $k_1 c_h$, debido a que para producir la actividad h es necesario distraer una parte de los recursos destinados a las actividades que en el vértice V_0 eran no nulas.

   Esta reducción sobre el beneficio unitario c_h que produce una unidad de la actividad h viene dada por el *coste de substitución:* $z_h = \sum_{i=1}^{n} c_i^{\bullet} x_{ih}^{\bullet}$

   Las cantidades $(c_h - z_h)$, en el caso de variables físicas reales, reciben el nombre de *beneficios reducidos*, en tanto que las magnitudes $(z_h - c_h)$ reciben el nombre de *costes reducidos*.

7. El proceso es reiterado hasta que no sea posible encontrar una cantidad de *beneficios reducidos* $(c_h - z_h) > 0$, en cuyo momento habrá alcanzado el *óptimo* y finaliza el algoritmo.

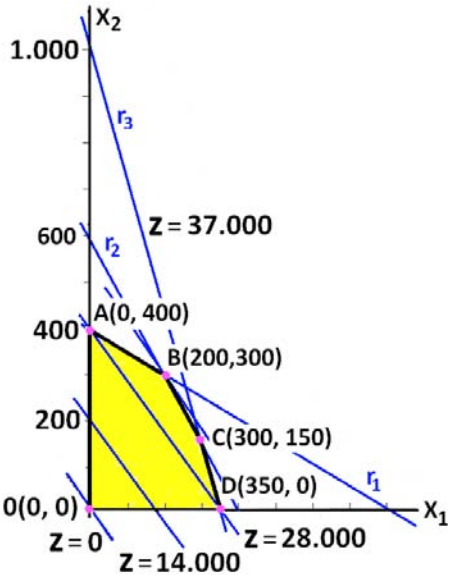
El razonamiento en el caso de mínimo es similar, aunque las valoraciones en el caso de analizar el valor de z_j se hagan en sentido contrario al desarrollado en el caso de máximo.

APLICACIÓN DEL MÉTODO KARMARKAR, CÁLCULO DEL ÓPTIMO

La función económica o función objetivo: $z = 80x_1 + 70x_2$

Con siguientes restricciones: $\begin{cases} 10x_1 + 20x_2 \leq 8000 \\ 15x_1 + 10x_2 \leq 6000 \\ 18x_1 + 6x_2 \leq 6300 \\ x_1 \geq 0 \qquad x_2 \geq 0 \end{cases}$

El interior y la frontera del polígono convexo de vértices O, A, B, C, D constituyen el conjunto de posibles soluciones del problema.



Siendo la función económica: $z = 80x_1 + 70x_2$

$$\begin{cases} z_O = 80 \times 0 + 70 \times 0 = 0 \\ z_A = 80 \times 0 + 70 \times 400 = 28000 \\ z_D = 80 \times 350 + 70 \times 0 = 28000 \\ z_C = 80 \times 300 + 70 \times 150 = 34500 \\ z_B = 80 \times \boxed{200} + 70 \times \boxed{300} = 37000 \end{cases}$$

En definitiva, la función objetivo o función económica alcanza el máximo para $x_1 = 200$, $x_2 = 300$

Para resolver por el *método del Simplex* se comienza por convertir las desigualdades en igualdades introduciendo sendas *variables de holgura* no negativas en cada restricción.

Maximizar $z = 80x_1 + 70x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$

$$\begin{cases} 10x_1 + 20x_2 + x_3 \qquad = 8000 \\ 15x_1 + 10x_2 \qquad + x_4 = 6000 \\ 18x_1 + 6x_2 \qquad\qquad + x_5 = 6300 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x_j \geq 0 \end{cases}$$

Se aplica el método de Karmarkar, una de las variantes del Simplex, un buscador de óptimos a partir de puntos interiores, siendo ésta la gran novedad en relación con el método Simplex.

El problema así formulado parte de un espacio de cinco dimensiones, con una base inicial formada por $B = \{P_3, P_4, P_5\} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$, con solución $X_0 = (x_3, x_4, x_5) = (8000, 6000, 6300)$ y un vértice inicial $V_0 = (0, 0, 8000, 6000, 6300)$

La variable que va a pasar a ser nula en la siguiente solución se determina calculando los cocientes entre cada elemento de la columna P_0 por el homólogo de la columna P_1, asociada a la x_1 que es la variable que va a dejar de ser nula en el vértice adyacente siguiente. Estos cocientes son:

$$\frac{8000}{10} = 800 \qquad \frac{6000}{15} = 400 \qquad \frac{6300}{18} = 350$$

El cociente mínimo positivo corresponde a la variable x_5, que pasará a ser nula en el vértice siguiente. El elemento de la columna P_1 que determina este cociente es 18 que pasa a ser el *elemento pivote*, la variable x_1 entra en la base sustituyendo a la variable x_5

La columna del pivote se hace 0 excepto el elemento pivote que vale 1.

Se divide toda fila del pivote por 18.

		c_j	80	70	0	0	0
Base	$c_i^\bullet$	P_0	P_1 ↘	P_2	P_3	P_4	P_5
x_3	0	8000	10	20	1	0	0
x_4	0	6000	15	10	0	1	0
x_5	0	6300	18	6	0	0	1
Coste sustitución z_j		0	0	0	0	0	0
Beneficio reducido $(c_j - z_j)$			80	70	0	0	0

Las columnas de las variables que con respecto a la tabla anterior siguen en base quedan inalteradas, $P_3 = (1, 0, 0)$ y $P_4 = (0, 1, 0)$

Cualquier otro elemento de la tabla, siendo el elemento pivote es $x_{hk} \equiv x_{31}$, donde $h = 3$, $k = 1$, se transforma según la regla: $x_{ij}^\bullet = x_{ij} - \frac{x_{hj}}{x_{hk}} x_{ik} \quad i \neq h \qquad x_{kj}^\bullet = \frac{x_{hj}}{x_{hk}} \quad i = h$

$$\begin{cases} x_{10}^\bullet = x_{10} - \frac{x_{30}}{x_{31}} x_{11} = 8000 - \frac{6300}{18} 10 = 4500 \\ x_{20}^\bullet = x_{20} - \frac{x_{30}}{x_{31}} x_{21} = 6000 - \frac{6300}{18} 15 = 750 \\ x_{12}^\bullet = x_{12} - \frac{x_{32}}{x_{31}} x_{11} = 20 - \frac{6}{18} 10 = \frac{300}{18} \\ x_{22}^\bullet = x_{22} - \frac{x_{32}}{x_{31}} x_{21} = 10 - \frac{6}{18} 15 = 5 \end{cases}$$

$$x_{15}^\bullet = x_{15} - \frac{x_{35}}{x_{31}} x_{11} = 0 - \frac{1}{18} 10 = \frac{-10}{18}$$

$$x_{25}^\bullet = x_{25} - \frac{x_{35}}{x_{31}} x_{21} = 0 - \frac{1}{18} 15 = \frac{-15}{18}$$

		c_j	80	70	0	0	0
Base	$c_i^\bullet$	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
x_3	0	4500	0	300 / 18	1	0	−10 / 18
x_4	0	750	0	5	0	1	−15 / 18
$x_1^\bullet$	80	350	1	6 / 18	0	0	1 / 18
Coste sustitución z_j		28.000	80	80 / 3	0	0	80 / 18
Beneficio reducido $(c_j - z_j)$			0	130 / 3	0	0	−80 / 18

Coste de sustitución: $z_h = \sum_{i=1}^{3} c_i^\bullet x_{ih}^\bullet$

$$z_0 = \sum_{i=1}^{3} c_i^{\bullet} x_{i0}^{\bullet} = c_1^{\bullet} x_{30}^{\bullet} = 80 \text{ x } 350 = 28.000 \qquad z_2 = \sum_{i=1}^{3} c_i^{\bullet} x_{i2}^{\bullet} = c_1^{\bullet} x_{32}^{\bullet} = 80 \text{ x } \frac{6}{18} = \frac{80}{3}$$

$$z_1 = \sum_{i=1}^{3} c_i^{\bullet} x_{i1}^{\bullet} = c_1^{\bullet} x_{31}^{\bullet} = 80 \text{ x } 1 = 80 \qquad z_5 = \sum_{i=1}^{3} c_i^{\bullet} x_{i5}^{\bullet} = c_1^{\bullet} x_{35}^{\bullet} = 80 \text{ x } \frac{1}{18} = \frac{80}{18}$$

Beneficio reducido: $(c_h - z_h)$: $(c_2 - z_2) = 70 - \frac{80}{3} = \frac{130}{3}$ $\quad (c_5 - z_5) = 0 - \frac{80}{18} = -\frac{80}{18}$

Sale de la base inicial P_5 y entra P_1, con solución $X_0^{\bullet} = (x_1, x_3, x_4) = (4500, 6000, 6300)$, el vértice cambia $V_1 = (350, 0, 4500, 750, 0)$ y la función objetivo pasa a valer 28.000.

Como en la tabla hay valores $(c_j - z_j) > 0$ la solución puede mejorarse, introduciendo en la base la variable x_2, a la que corresponde ese beneficio marginal positivo.

Para continuar el proceso se hacen los cocientes cada elemento de la columna P_0 por los homólogos de P_2 (columna correspondiente a la variable que entra en la nueva base).

La selección del mínimo cociente positivo indica que variable sale de la base y el pivote.

Los cocientes son: $\frac{4500}{300/18} = 270 \qquad \frac{750}{\boxed{5}} = 150 \qquad \frac{350}{6/18} = 1050$

El elemento pivote es $x_{hk} = x_{22} = 5$ donde, $h = 2,\ k = 2$.

		c_j	80	70	0	0	0	
Base	$c_i^{\bullet}$	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	
x_3	0	4500	0	$300/18$	1	0	$-10/18$	270
x_4	0	750	0	$\boxed{5}$	0	1	$-15/18$	150
$x_1^{\bullet}$	80	350	1	$6/18$	0	0	$1/18$	1050
Coste sustitución z_j		28.000	80	$80/3$	0	0	$80/18$	
Beneficio reducido $(c_j - z_j)$			0	$130/3$	0	0	0	

La columna del pivote se hace 0 excepto el elemento pivote que vale 1.

Se divide toda fila del pivote por 5.

Sale de la base la variable x_4 y entra la variable x_2 con base $P_2 = (0, 1, 0)$, hay que modificar P_4 y P_5

Las columnas de las variables que con respecto a la tabla anterior siguen en base quedan inalteradas, $P_1 = (0, 0, 1)$ y $P_3 = (1, 0, 0)$

Cualquier otro elemento de la tabla, siendo el elemento pivote es $x_{hk} = x_{22}$, donde $h = 2$, $k = 2$,

se transforma según la regla: $x_{ij}^{\bullet} = x_{ij} - \frac{x_{hj}}{x_{hk}} x_{ik} \quad i \neq h \qquad x_{kj}^{\bullet} = \frac{x_{hj}}{x_{hk}} \quad i = h$

$$\begin{cases} x_{10}^{\bullet} = x_{10} - \frac{x_{20}}{x_{22}} x_{12} = 4500 - \frac{750}{5}\frac{300}{18} = 2000 \\ x_{30}^{\bullet} = x_{30} - \frac{x_{20}}{x_{22}} x_{32} = 350 - \frac{750}{5}\frac{6}{18} = 300 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{14}^{\bullet} = x_{14} - \frac{x_{24}}{x_{22}} x_{12} = 0 - \frac{1}{5}\frac{300}{18} = -\frac{10}{3} \\ x_{24}^{\bullet} = \frac{x_{24}}{x_{22}} = \frac{1}{5} \\ x_{34}^{\bullet} = x_{34} - \frac{x_{24}}{x_{22}} x_{32} = 0 - \frac{1}{5}\frac{6}{18} = -\frac{1}{15} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{15}^{\bullet} = x_{15} - \frac{x_{25}}{x_{22}} x_{12} = -\frac{10}{18} + \frac{15/18}{5}\frac{300}{18} = \frac{20}{9} \\ x_{25}^{\bullet} = \frac{x_{25}}{x_{22}} x_{22} = -\frac{15/18}{5} = -\frac{1}{6} \\ x_{35}^{\bullet} = x_{35} - \frac{x_{25}}{x_{22}} x_{32} = \frac{1}{18} + \frac{15/18}{5}\frac{6}{18} = \frac{1}{9} \end{cases}$$

		c_j	80	70	0	0	0
Base	$c_i^{\bullet}$	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
x_3	0	2000	0	0	1	$-10/3$	$20/9$
$x_2^{\bullet}$	70	150	0	1	0	$1/5$	$-1/6$
$x_1^{\bullet}$	80	300	1	0	0	$-1/15$	$1/9$
Coste sustitución z_j		34.500	80	70	0	$26/3$	$-25/9$
Beneficio reducido $(c_j - z_j)$			0	0	0	$-26/3$	$25/9$

Costes de sustitución: $z_h = \sum_{i=1}^{3} c_i^{\bullet} x_{ih}^{\bullet}$

$$z_0 = \sum_{i=1}^{3} c_i^{\bullet} x_{i0}^{\bullet} = c_1^{\bullet} x_{30}^{\bullet} + c_2^{\bullet} x_{20}^{\bullet} = 80 \text{ x } 300 + 70 \text{ x } 150 = 34.500$$

$$z_4 = \sum_{i=1}^{3} c_i^{\bullet} x_{i4}^{\bullet} = c_1^{\bullet} x_{14}^{\bullet} + c_2^{\bullet} x_{24}^{\bullet} = 80 \text{ x } \frac{-1}{15} + 70 \text{ x } \frac{1}{5} = \frac{26}{3}$$

$$z_5 = \sum_{i=1}^{3} c_i^{\bullet} x_{i5}^{\bullet} = c_1^{\bullet} x_{15}^{\bullet} + c_2^{\bullet} x_{25}^{\bullet} = 80 \text{ x } \frac{1}{9} + 70 \text{ x } \frac{-1}{6} = -\frac{25}{9}$$

Beneficio reducido: $(c_h - z_h)$: $(c_4 - z_4) = 0 - \frac{26}{3} = -\frac{26}{3} \qquad (c_5 - z_5) = 0 + \frac{25}{9} = \frac{25}{9}$

Sale de la base inicial P_4 y entra P_2, con solución $X_0^{\bullet} = (x_1, x_2, x_4) = (300, 150, 6300)$

Los vértices han ido cambiando con las iteraciones:

Del vértice inicial $V_0 = (0, 0, 8000, 6000, 6300)$, en la primera etapa cambia el vértice a $V_1 = (350, 0, 4500, 750, 0)$, en la segunda etapa a $V_2 = (300, 150, 2000, 0, 0)$

La función objetivo pasa de 28.000 a 34.500.

Como en la tabla $(c_5 - z_5) > 0$ la solución puede mejorarse, introduciendo en la base la variable x_5, a la que corresponde ese beneficio marginal positivo.

Para continuar el proceso se hacen los cocientes cada elemento de la columna P_0 por los homólogos de P_5 (columna correspondiente a la variable que entra en la nueva base).

La selección del mínimo cociente positivo indica que variable sale de la base y el pivote.

Los cocientes son: $\dfrac{2000}{\boxed{20/9}} = 900 \qquad \dfrac{150}{-1/6} = -900 \qquad \dfrac{300}{1/9} = 2700$

Como entre los cocientes hay dos positivos, se selecciona el menor, que corresponde a la variable x_3.

El elemento pivote es $x_{hk} = x_{15} = \dfrac{20}{9}$ donde, $h = 1$, $k = 5$.

		c_j	80	70	0	0	0	
Base	$c_i^\bullet$	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	
x_3	0	2000	0	0	1	$-10/3$	$\boxed{20/9}$	900
$x_2^\bullet$	70	150	0	1	0	$1/5$	$-1/6$	-900
$x_1^\bullet$	80	300	1	0	0	$-1/15$	$1/9$	2700
Coste sustitución z_j		$\boxed{34.500}$	80	70	0	$26/3$	$26/3$	
Beneficio reducido $(c_j - z_j)$			0	0	0	$-26/3$	$25/9$	

La columna del pivote se hace 0 excepto el elemento pivote que vale 1.

Se divide toda fila del pivote por $\dfrac{20}{9}$

Las columnas de las variables que con respecto a la tabla anterior siguen en base quedan inalteradas, $P_1 = (0, 0, 1)$ y $P_2 = (0, 1, 0)$

Sale de la base la variable x_3 y entra la variable x_5 con base $P_5 = (1, 0, 0)$. En consecuencia, hay que modificar P_3 y P_4

Cualquier otro elemento de la tabla, siendo el elemento pivote es $x_{hk} = x_{22}$, donde $h = 1$, $k = 5$, se transforma según la regla: $x_{ij}^\bullet = x_{ij} - \dfrac{x_{hj}}{x_{hk}} x_{ik} \quad i \neq h \qquad x_{kj}^\bullet = \dfrac{x_{hj}}{x_{hk}} \quad i = h$

$$\begin{cases} x_{10}^{\bullet} = \dfrac{x_{10}}{x_{15}} = \dfrac{2000}{20/9} = 900 \\ x_{20}^{\bullet} = x_{20} - \dfrac{x_{10}}{x_{15}} x_{25} = 150 + \dfrac{2000}{20/9}\dfrac{1}{6} = 300 \\ x_{30}^{\bullet} = x_{30} - \dfrac{x_{10}}{x_{15}} x_{35} = 300 - \dfrac{2000}{20/9}\dfrac{1}{9} = 200 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{13}^{\bullet} = \dfrac{x_{13}}{x_{15}} = \dfrac{1}{20/9} = \dfrac{9}{20} \\ x_{23}^{\bullet} = x_{23} - \dfrac{x_{12}}{x_{15}} x_{25} = 0 + \dfrac{1}{20/9}\dfrac{1}{6} = \dfrac{3}{40} \\ x_{33}^{\bullet} = x_{33} - \dfrac{x_{13}}{x_{15}} x_{35} = 0 - \dfrac{1}{20/9}\dfrac{1}{9} = -\dfrac{1}{20} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{14}^{\bullet} = \dfrac{x_{14}}{x_{15}} = \dfrac{-10/3}{20/9} = -\dfrac{3}{2} \\ x_{24}^{\bullet} = x_{24} - \dfrac{x_{14}}{x_{15}} x_{25} = \dfrac{1}{5} - \dfrac{10/3}{20/9}\dfrac{1}{6} = -\dfrac{1}{20} \\ x_{34}^{\bullet} = x_{34} - \dfrac{x_{14}}{x_{15}} x_{35} = -\dfrac{1}{15} + \dfrac{10/3}{20/9}\dfrac{1}{9} = \dfrac{1}{10} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{15}^{\bullet} = \dfrac{x_{15}}{x_{15}} = 1 \\ x_{25}^{\bullet} = x_{25} - \dfrac{x_{15}}{x_{15}} x_{25} = 0 \\ x_{35}^{\bullet} = x_{35} - \dfrac{x_{15}}{x_{15}} x_{35} = 0 \end{cases}$$

		c_j	80	70	0	0	0
Base	$c_i^{\bullet}$	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
$x_5^{\bullet}$	0	900	0	0	$9/20$	$-3/2$	1
$x_2^{\bullet}$	70	300	0	1	$3/40$	$-1/20$	0
$x_1^{\bullet}$	80	200	1	0	$-1/20$	$1/10$	0
Coste sustitución z_j		37.000	80	70	$5/4$	$9/2$	0
Beneficio reducido $(c_j - z_j)$			0	0	$-5/4$	$-9/2$	0

Costes de sustitución: $z_h = \sum_{i=1}^{3} c_i^{\bullet} x_{ih}^{\bullet}$

$$z_0 = \sum_{i=1}^{3} c_i^{\bullet} x_{i0}^{\bullet} = c_1^{\bullet} x_{30}^{\bullet} + c_2^{\bullet} x_{20}^{\bullet} + c_3^{\bullet} x_{10}^{\bullet} = 80 \text{ x } 200 + 70 \text{ x } 300 + 0 \text{ x } 900 = 37.000$$

$$z_3 = \sum_{i=1}^{3} c_i^{\bullet} x_{i3}^{\bullet} = c_1^{\bullet} x_{33}^{\bullet} + c_2^{\bullet} x_{23}^{\bullet} + c_3^{\bullet} x_{13}^{\bullet} = 80 \text{ x } \frac{-1}{20} + 70 \text{ x } \frac{3}{40} + 0 \text{ x } \frac{9}{20} = \frac{5}{4}$$

$$z_4 = \sum_{i=1}^{3} c_i^{\bullet} x_{i4}^{\bullet} = c_1^{\bullet} x_{34}^{\bullet} + c_2^{\bullet} x_{24}^{\bullet} + c_3^{\bullet} x_{14}^{\bullet} = 80 \text{ x } \frac{1}{10} + 70 \text{ x } \frac{-1}{20} + 0 \text{ x } \frac{-3}{2} = \frac{9}{2}$$

Beneficio reducido: $(c_h - z_h)$: $(c_3 - z_3) = 0 - \frac{5}{4} = -\frac{5}{4}$ $\quad (c_4 - z_4) = 0 - \frac{9}{2} = -\frac{9}{2}$

Como en la tabla no hay ningún beneficio reducido $(c_j - z_j) > 0$ la solución no puede mejorar y el algoritmo ha finalizado.

La función objetivo pasa de 34.500 a 37.000

Los vértices han ido cambiando con las iteraciones:

Del vértice inicial $V_0 = (0, 0, 8000, 6000, 6300)$, en la primera etapa cambia el vértice a $V_1 = (350, 0, 4500, 750, 0)$, en la segunda etapa a $V_2 = (300, 150, 2000, 0, 0)$ y en la tercera etapa al vértice $V_3 = (200, 300, 0, 0, 900)$

La función objetivo o función económica alcanza el máximo para $x_1 = 200$, $x_2 = 300$

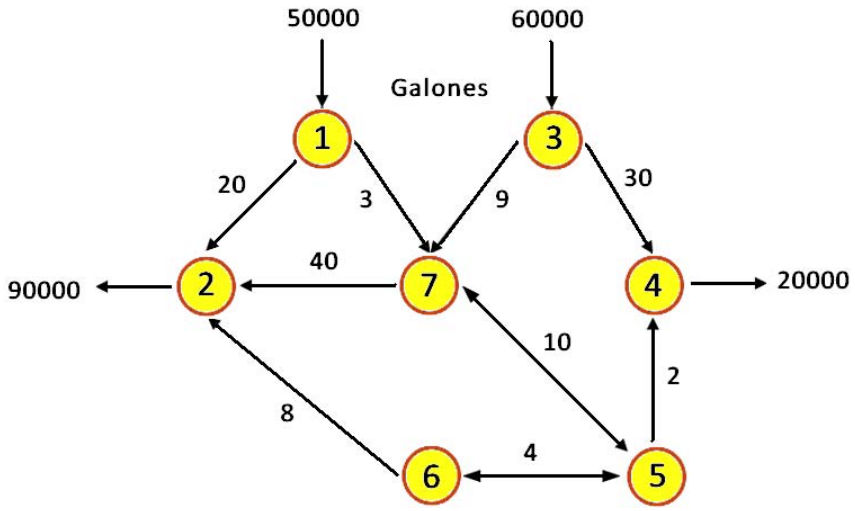
EL PROBLEMA DEL TRANSBORDO

El Transbordo es un caso mixto del transporte en el que existen nodos con oferta pura, nodos con demanda pura y nodos de transbordo que a su vez presentan oferta y demanda. El objetivo es minimizar el coste total del transporte satisfaciendo las demandas.

Es un problema de transporte donde aparece una nueva familia de restricciones, las llamadas restricciones de balanceo que posibilitan que el sistema sea viable, es decir, que todas las unidades que ingresen a un nodo sean iguales a las que salgan del mismo.
(unidades que salen + unidades que conserve el nodo).

PROBLEMA DEL TRANSBORDO (SIMPLEX): REDES DE SUMINISTRO

Calcular el coste mínimo del suministro (galones) de una red de gasoductos en donde los distintos nodos representan estaciones de bombeo y recepción.
Los costos se encuentran en las rutas de la figura.



Denotando por $x_{ij} \equiv$ Cantidad de galones enviados de la estación i a la estación j

Función objetivo:

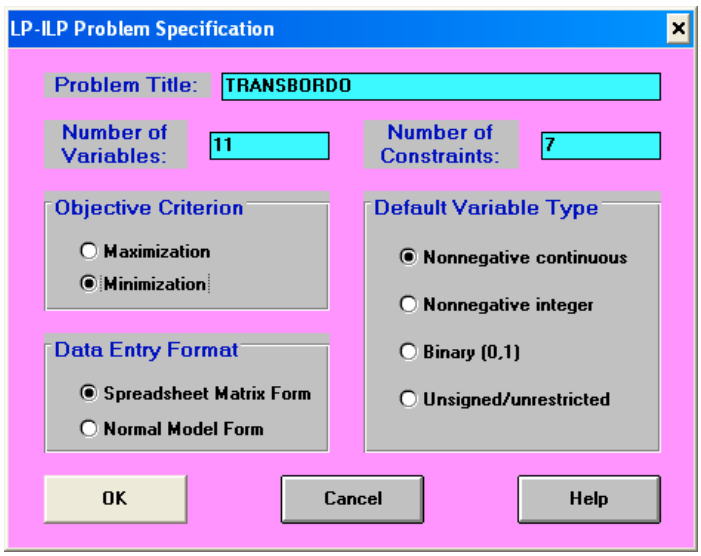
Minimizar $z = 20x_{12} + 3x_{17} + 9x_{37} + 30x_{34} + 40x_{72} + 10x_{75} + 10x_{57} + 8x_{62} + 4x_{65} + 4x_{56} + 2x_{54}$

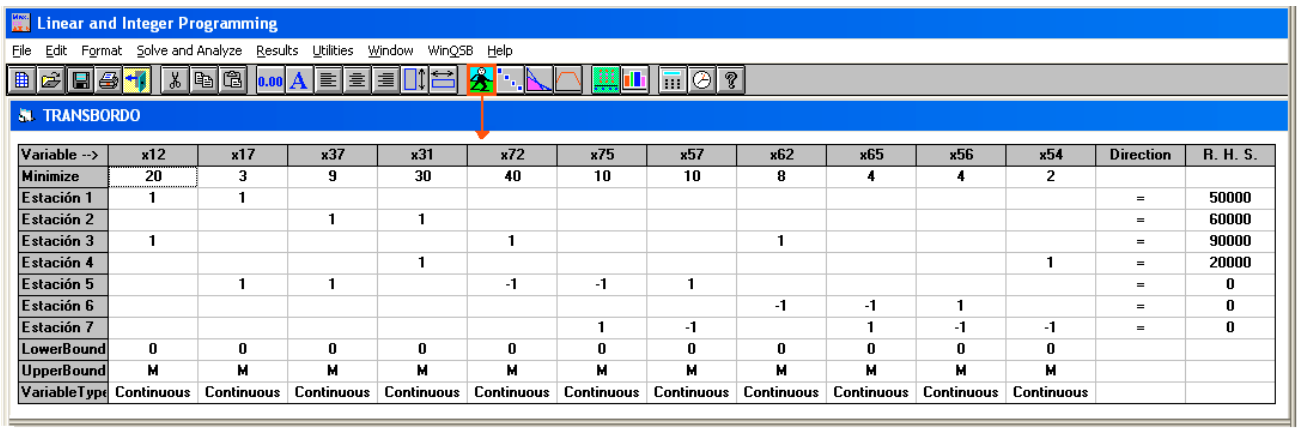
- Restricciones de balanceo para nodos únicamente transitorios:

Restricciones oferta y demanda: $\begin{cases} x_{12} + x_{17} = 50.000 \\ x_{37} + x_{34} = 60.000 \\ x_{12} + x_{72} + x_{62} = 90.000 \\ x_{34} + x_{54} = 20.000 \end{cases}$

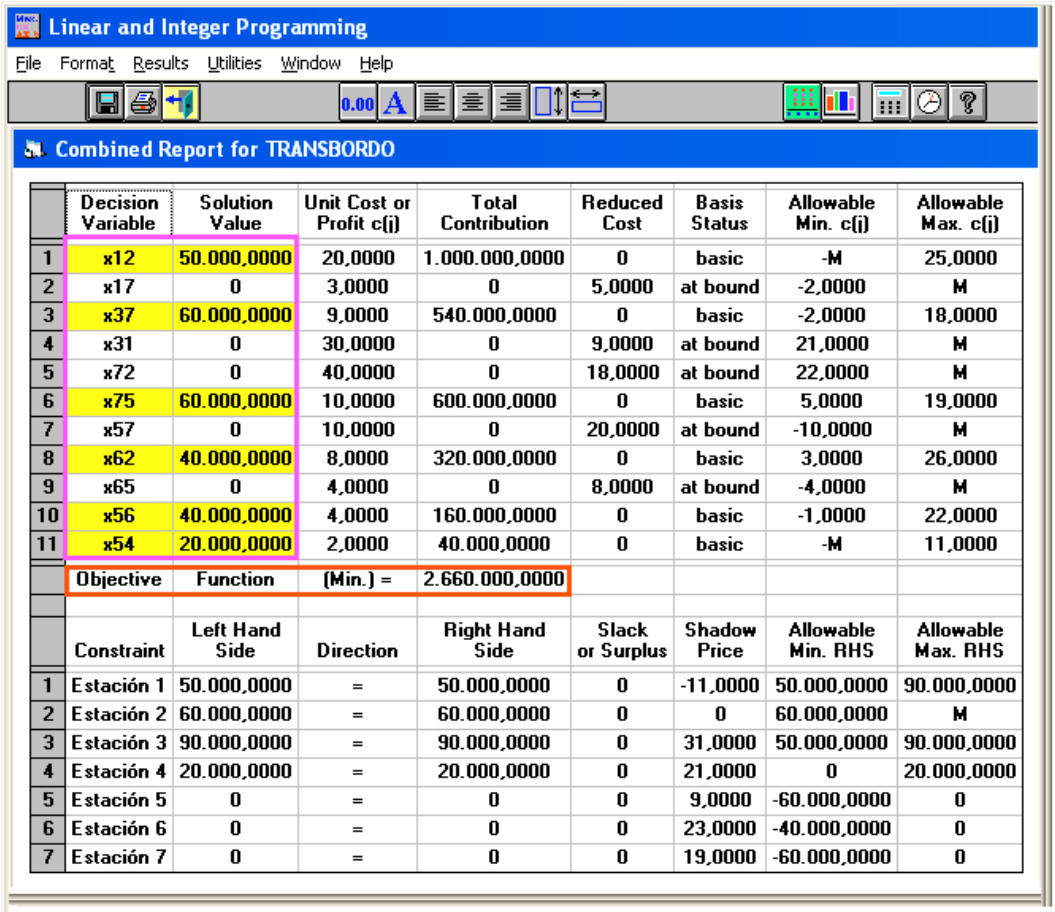
- Restricciones de balanceo para nodos transitorios con requerimientos: Consolidan que todas las unidades que llegan (oferta) sean iguales a la suma de todas de las unidades que salen más los requerimientos del nodo (demanda).

Restricciones balance: $\begin{cases} x_{17} + x_{37} + x_{57} = x_{72} + x_{75} \\ x_{56} = x_{65} + x_{62} \\ x_{75} + x_{65} = x_{57} + x_{56} + x_{54} \end{cases}$





Variable -->	x12	x17	x37	x31	x72	x75	x57	x62	x65	x56	x54	Direction	R. H. S.
Minimize	20	3	9	30	40	10	10	8	4	4	2		
Estación 1	1	1										=	50000
Estación 2			1	1								=	60000
Estación 3	1				1			1				=	90000
Estación 4				1							1	=	20000
Estación 5		1	1		-1	-1	1					=	0
Estación 6								-1	-1	1		=	0
Estación 7						1	-1		1	-1	-1	=	0
LowerBound	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
UpperBound	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M		
VariableType	Continuous	Continuous	Continuous	Continuous	Continuous	Continuous	Continuous	Continuous	Continuous	Continuous	Continuous		

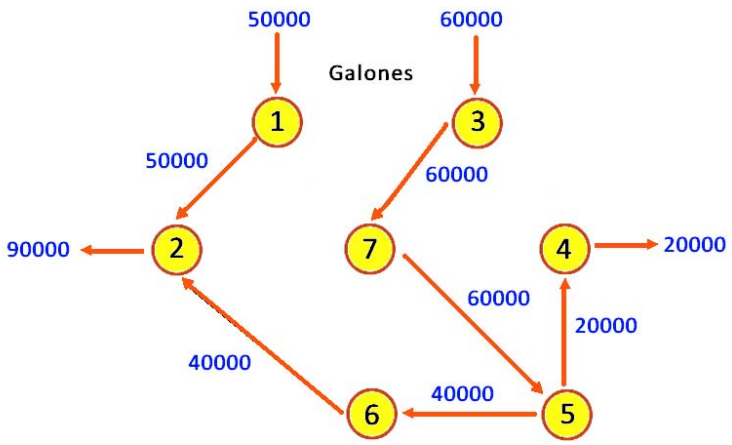


	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
1	x12	50.000,0000	20,0000	1.000.000,0000	0	basic	-M	25,0000
2	x17	0	3,0000	0	5,0000	at bound	-2,0000	M
3	x37	60.000,0000	9,0000	540.000,0000	0	basic	-2,0000	18,0000
4	x31	0	30,0000	0	9,0000	at bound	21,0000	M
5	x72	0	40,0000	0	18,0000	at bound	22,0000	M
6	x75	60.000,0000	10,0000	600.000,0000	0	basic	5,0000	19,0000
7	x57	0	10,0000	0	20,0000	at bound	-10,0000	M
8	x62	40.000,0000	8,0000	320.000,0000	0	basic	3,0000	26,0000
9	x65	0	4,0000	0	8,0000	at bound	-4,0000	M
10	x56	40.000,0000	4,0000	160.000,0000	0	basic	-1,0000	22,0000
11	x54	20.000,0000	2,0000	40.000,0000	0	basic	-M	11,0000
	Objective	Function	(Min.) =	2.660.000,0000				

	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
1	Estación 1	50.000,0000	=	50.000,0000	0	-11,0000	50.000,0000	90.000,0000
2	Estación 2	60.000,0000	=	60.000,0000	0	0	60.000,0000	M
3	Estación 3	90.000,0000	=	90.000,0000	0	31,0000	50.000,0000	90.000,0000
4	Estación 4	20.000,0000	=	20.000,0000	0	21,0000	0	20.000,0000
5	Estación 5	0	=	0	0	9,0000	-60.000,0000	0
6	Estación 6	0	=	0	0	23,0000	-40.000,0000	0
7	Estación 7	0	=	0	0	19,0000	-60.000,0000	0

El coste óptimo es de 2.660.000 unidades monetarias.

Representación gráfica de la solución:



MÉTODOS PARA OBTENER SOLUCIONES EN EL PROBLEMA DE TRANSPORTE

Para resolver el Modelo del Transporte, es decir, para obtener los mejores valores numéricos para las variables de decisión, hay dos métodos:

Métodos óptimos: Permiten obtener los mejores valores para las variables de decisión, es decir, aquellos valores que satisfacen simultáneamente todas las restricciones y proporcionan el mejor valor para la función objetivo - Método del Simplex y Método de Karmarkar.

Métodos heurísticos: Permiten obtener una solución inicial próxima a la solución óptima con la ventaja de obtener ahorros considerables en tiempo respecto a los métodos basados en algoritmos matemáticos - Esquina Noroeste (MEN), Vogel (MAV), Costes Ficticios (MODI), y el Método de Asignación o Método Húngaro.

MÉTODO DE LA ESQUINA NOROESTE

	DESTINOS		
ORIGENES	Esquina Noroeste		

Es un método para encontrar para encontrar una solución inicial básica factible del modelo del transporte. Es el método heurístico con mínimo cálculos, ignorando los costos, considera todas las restricciones para su elaboración. Es útil en problemas con innumerables orígenes y destinos en los que importe satisfacer las restricciones.

El método parte en forma matricial, es decir, *filas* que representan *orígenes* y *columnas* que representan *destinos*. El algoritmo se inicia en la celda, ruta o esquina Noroeste de la tabla (esquina superior izquierda).

Una vez obtenida la tabla inicial del problema del transporte, el algoritmo de manera resumida consta de los siguientes pasos:

PASO 1: En la celda seleccionada como esquina noroeste se asigna la máxima cantidad de unidades posibles, cantidad que se encuentra restringida bien por las restricciones de oferta o bien de demanda.

En este paso se procede a ajustar la oferta y demanda de la fila y columna afectada, restándole la cantidad asignada a la celda.

PASO 2: Se procede a eliminar la fila o columna cuya oferta o demanda sea 0 después del Paso 1. Si ambas son 0 arbitrariamente se elige cual eliminar y la otra se deja con oferta o demanda 0, según sea el caso.

PASO 3: Pueden ocurrir dos posibilidades:

a) Que quede una sola fila o columna, en este caso ha finalizado el algoritmo.

b) Que quede más de una fila o columna, entonces se reinicia el PASO 1.

W. R. Vogel

MÉTODO DE VOGEL (William. R. Vogel)

Es uno de los más eficientes por que se puede acercar más a la solución inicial básica factible en comparación con otros métodos, esto gracias a que toma en cuenta los costos y la variación de estos con ofertas y demandas.

También es conocido como Método de las Penalizaciones.

El Algoritmo de Vogel (MAV) requiere de un número mayor de iteraciones que otros métodos heurísticos existentes con esta finalidad, sin embargo produce mejores resultados iniciales.

Consta de 3 PASOS fundamentales y un PASO más que asegura el ciclo hasta la finalización del método.

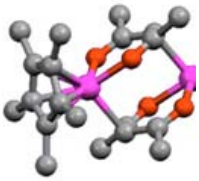
PASO 1: Determina para cada fila y columna una medida de penalización restando los dos costos menores en filas y columnas. El valor de la penalización siempre es positivo dado que la resta es el valor mayor menos el valor menor.

PASO 2: Se elige la fila o columna con la mayor penalización, es decir, de la resta realizada en el Paso 1 se debe escoger el número mayor. En caso de haber empate, se debe escoger arbitrariamente (criterio personal).

PASO 3: De la fila o columna de mayor penalización determinada en el *Paso 2* hay que elegir la celda con el menor costo, y en ésta asignar la mayor cantidad posible de unidades. Una vez se realiza este paso una oferta o demanda quedará satisfecha, en consecuencia se tachará la fila o columna, en caso de empate solo se tachará 1, la restante quedará con oferta o demanda igual a 0.

PASO 4: CICLO Y EXCEPCIONES

- Si queda sin tachar exactamente una fila o columna con 0 oferta o demanda, detenerse.
- Si queda sin tachar una fila o columna con oferta o demanda positiva, determinar las variables básicas en la fila o columna con el método de costos mínimos, detenerse
- Si todas las filas y columnas que no se tacharon tienen 0 oferta y demanda, determinar las variables básicas cero por el método del costo mínimo, detenerse.
- Si no se presenta ninguno de los casos anteriores regresar al Paso 1 hasta que las ofertas y las demandas se hayan agotado.



MÉTODO MODI (Método de distribución modificada)

Cuando la solución básica obtenida por otros algoritmos no es óptima, la mejora es posible y ésta se puede llevar a cabo mediante diferentes métodos, como el método de STEPPING-STONE y el método MODI.

El algoritmo MODI (Modified Distribution Method), conocido como Método de los Costes Ficticios, consiste en añadir a la matriz de costes una fila y una columna que recogen unos costes ficticios determinados arbitrariamente (los números MODI), tal que permite calcular los índices de mejora para las celdas (casillas) no utilizadas sin tener que trazar todos los circuitos (ciclos) que requiere el algoritmo de Stepping-Stone.

En general, supone ahorros en tiempo respecto a la utilización del algoritmo de Stepping-Stone en la resolución de problemas de transporte, debido a su rapidez y el fácil tratamiento de las soluciones degeneradas.

El método MODI sigue los siguientes pasos:

PASO 1: Se parte de la solución inicial hallada por uno de los métodos heurísticos.

PASO 2: Se inicia con la matriz C_{ij} de los costes inicial de la solución inicial obtenida por otros métodos.

PASO 3: Se elaboran un conjunto de números u_i y v_j de modo que la suma sea igual a los valores de la matriz C_{ij} de los costos de la variable solución.

El objetivo es obtener una matriz de costes $Z_{ij} = u_i + v_j$

Cuando todos los elementos de la matriz de costes reducidos $(C_{ij} - Z_{ij}) \geq 0$ el algoritmo MODI ha terminado. La solución de partida de costes inicial C_{ij} es óptima.

Cuando uno o más elementos de la matriz $(C_{ij} - Z_{ij}) < 0$ es posible obtener una solución mejor. La presencia de elementos negativos indica que no se ha conseguido la solución óptima.

PASO 4: En el caso de no haber alcanzado la solución óptima, esto es cuando uno o más elementos de la matriz $(C_{ij} - Z_{ij}) < 0$.

En la matriz $(C_{ij} - Z_{ij})$ se selecciona la casilla z_{ij} que tiene el coste más pequeño. Por tanto, en la matriz C_{ij} entra el elemento c_{ij} con el valor más pequeño de los que están en las casillas con signos menos.

A partir de c_{ij} se van alternando los signos $(\pm)$ a izquierda o derecha en las casillas del coste mínimo calculado por el método heurístico inicial.

El circuito obtenido es cerrado, donde en todas las columnas y filas seleccionadas hay un elemento positivo y otro negativo, es decir se suma y se resta la misma cantidad c_{ij}, filas y columnas tienen que estar balanceadas (verificar las condiciones de oferta y demanda).

Se obtiene una nueva solución de coste mejorada, con su correspondiente matriz $C_{ij}^{\bullet}$

PROCESO ITERATIVO: Se parte de la solución $C_{ij}^{\bullet}$ y se vuelve al Paso 3. El algoritmo finaliza cuando todos los elementos de la matriz de costes reducidos $(C_{ij}^{\bullet} - Z_{ij}) \geq 0$

D. Kőnig J. Egerváry

MÉTODO HÚNGARO (Optimizar Asignación, 1955)

Es un método de optimización de problemas de asignación, recibe el nombre porque los primeros aportes al método clásico fueron de dos matemáticos húngaros: Dénes Kőnig y Jenő Egerváry.

El problema de Asignación es uno de los problemas más importantes de Programación Lineal.
Los orígenes del problema de asignación datan del siglo XVIII, cuando Gaspard Monge (1781) formuló el problema de transporte de la masa continua como un enorme problema de asignación que minimiza el coste de transportar todas las moléculas.

La estructura combinatoria del problema fue investigada al principio del siglo XX (Miller, Kőnig, Frobenius), mientras que el primer algoritmo de enumeración implícita (en tiempo exponencial) fue propuesto por Easterfield en 1946.

El primer algoritmo moderno en tiempo polinomial para el problema de asignación, inventado por Harold W. Kuhn hace 50 años, fue bautizado como 'El Método Húngaro' , para destacar que deriva de resultados anteriores de Kőnig y Egerváry obtenidos en los primeros años del siglo XX.

CONTEXTUALIZACIÓN DEL MÉTODO:

El método húngaro requiere del mismo número de filas y columnas, está diseñado para la resolución de problemas de minimización.

PASO 1: En la matriz original de costo, identificar el mínimo de cada fila y restarlo de todos los elementos de la fila.

PASO 2: En la matriz que resulte del Paso 1, identificar el mínimo de cada columna, y restarlo de todos los elementos de la columna. Obteniendo la *Matriz de Coste Reducido*.

PASO 3: Se trazan líneas horizontales o verticales o ambas con el objetivo de cubrir todos los ceros de la *Matriz de Coste Reducido* con el menor número de líneas posibles.

- Si el número de líneas es igual al número de filas o columnas se ha obtenido la solución óptima (mejor asignación en el contexto de optimización).
- Sí el número de líneas es inferior al número de filas o columnas hay que continuar con el PASO 4.

PASO 4: Tomar el menor elemento no cubierto (atravesado) por una línea.

(a) Restar este valor a todos los elementos de las filas no cubiertas (no cruzadas)

(b) Sumar este valor a todos los elementos de las columnas cubiertas (cruzadas)

Finalizado el proceso se vuelve al PASO 3.

ASIGNACIONES: Se inician por la fila que tenga menos ceros y tachando los ceros de la fila y columna donde se realizó la asignación.
En caso de tener que elegir se hace en el orden alfabético de los destinos.

MAXIMIZAR POR EL MÉTODO HÚNGARO: Para abordar problemas de maximización es necesario añadir variables de holgura o ficticias hasta obtener el mismo número de filas y columnas, equivalentes a 0 en todas sus componentes.

Si el problema lo permite, pueden crearse variables ficticias duplicadas de una existente.

Como operación adicional se busca el mayor valor tabulado y se resta éste valor a cada una de las celdas.

A partir de la nueva matriz obtenida se aplica el método húngaro como se haría en el caso normal de minimización.

OBJETIVO: DEMOSTRAR QUE LA SOLUCIÓN INICIAL DEL MÉTODO VOGEL NO SE MEJORA CON OTRO MÉTODO HEURÍSTICO

El Método de Aproximación de VOGEL es una versión mejorada del Método del COSTO MÍNIMO y el Método de la ESQUINA NOROESTE que produce mejores soluciones básicas factibles de inicio, que reportan un menor valor en la función objetivo (minimización).

OBJETIVO: Demostrar que el método VOGEL no se puede mejorar con otro Método Heurístico.

Aplicando el método de la ESQUINA NOROESTE y, posteriormente mejorándolo con el método MODI, se llega a la misma solución VOGEL.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE TRANSPORTE

Se aplican distintos Métodos del Transporte: Programación Lineal (SIMPLEX) y distintos Métodos Heurísticos – Método de la Esquina Noroeste (NWC) , Método del Mínimo Coste (MM) , Método de Aproximación de Vogel (VAM) y Método de los Costes Ficticios (MODI) -

Finalmente, aplicando el Método Húngaro, se optimiza la asignación entre origenes y destinos.
Es una variación del problema de l transporte donde las variables de decisión x_{ij} solo pueden tomar valores binarios (0 o 1) en la solución óptima, lo que supone que oferta y demanda están alineadas, ambas son iguales a 1.

Con cálculo operacional y mediante el programa WinQSB, se demuestra que el Método VAM es el que obtiene o se aproxima más a la solución óptima, solución obtenida por el Método SIMPLEX.

El Método MODI (Modifield Distribution Method), conocido como el Método de los Costes Ficticios, no se puede comprobar mediante el programa informático WinQSB al no estar incorporado.
Es un método muy parecido al SIMPLEX, lo que cambia en el Método MODI es que tiene como finalidad determinar los costos marginales o reducidos $(c_j - z_j)$ en dos pasos.

Primero se obtienen los coeficientes de filas y columnas usando solamente las celdas de variables básicas, y segundo, con los coeficientes, se determinan los costos marginales para cada celda vacía.

PROBLEMA CLÁSICO: Una empresa energética dispone de cuatro centrales para satisfacer la demanda diaria de energía eléctrica en cuatro provincias de Castilla y León. Las centrales eléctricas pueden satisfacer, respectivamente, 80, 30, 60 y 45 millones de Kw diarios. Las necesidades de las ciudades (A, B, C, D), respectivamente, son de 70, 40, 70 y 35 millones de Kw al día.
La tabla adjunta refleja el costo asociado al envío de suministro eléctrico por cada millón de Kw entre cada central y cada ciudad:

	Ciudades			
	A	B	C	D
Central 1	5	2	7	3
Central 2	3	6	6	1
Central 3	6	1	2	4
Central 4	4	3	6	6

MÉTODO VOGEL O MÉTODO DE LAS PENALIZACIONES

Para el modelo existe el equilibrio entre la oferta y la demanda. Los datos del problema se trasladan en la siguiente tabla:

	Ciudades				
	A	B	C	D	Oferta
Central 1	5	2	7	3	80
Central 2	3	6	6	1	30
Central 3	6	1	2	4	60
Central 4	4	3	6	6	45
Demanda	70	40	70	35	215

Se determinan las medidas de penalización, se identifican los costos más bajos por fila y columna. Después se restan dichos valores y el resultado se denomina *penalización.*

	Ciudades					
	A	B	C	D	Oferta	P2
Central 1	5	2	7	3	80	3 – 2 = 1
Central 2	3	6	6	1	30	3 – 1 = 2
Central 3	6	1	2	4	60	2 – 1 = 1
Central 4	4	3	6	6	45	4 – 3 = 1
Demanda	70	40	70	35		
P1	4 – 3 = 1	2 – 1 = 1	6 – 2 = 4	3 – 1 = 2		

Después se identifica la fila/columna con mayor penalización, en este caso es la columna donde se encuentra el número 4.

En esa misma columna, se elige el menor costo y se asigna la mayor cantidad posible para cubrir la demanda/oferta. En este caso, se le asignarán 60 millones de kw.

De este modo, la fila de la Central 3 va a desaparecer, ya que ha asignado toda su capacidad.

	Ciudades					
	A	B	C	D	Oferta	P2
Central 1	5	2	7	3	80	1
Central 2	3	6	6	1	30	2
Central 3	6	1	60 | 2	4	60 – 60 = 0	1
Central 4	4	3	6	6	45	1
Demanda	70	40	70 – 60 = 10	35		
P1	1	1	4	2		

Se repite el mismo proceso con la segunda penalización

	Ciudades					
	A	B	C	D	Oferta	P2
Central 1	5	2	7	3	80	1
Central 2	3	6	6	30 | 1	30 – 30 = 0	2
Central 3	6	1	60 | 2	4	0	
Central 4	4	3	6	6	45	1
Demanda	70	40	10	35 – 30 = 5		
P2	1	1	0	2		

Se repite el proceso con la tercera penalización

	Ciudades					
	A	B	C	D	Oferta	P3
Central 1	5	2	7	5 | 3	80 – 5 = 75	1
Central 2	3	6	6	30 | 1	0	
Central 3	6	1	60 | 2	4	0	
Central 4	4	3	6	6	45	1
Demanda	70	40	10	5 – 5 = 0		
P3	1	1	1	3		

Se repite el proceso con la cuarta penalización

	Ciudades					
	A	B	C	D	Oferta	P4
Central 1	5	40 | 2	7	5 | 3	75 – 40 = 35	3
Central 2	3	6	6	30 | 1	0	
Central 3	6	1	60 | 2	4	0	
Central 4	4	3	6	6	45	1
Demanda	70	40 – 40 = 0	10	0		
P4	1	1	1			

Se repite el proceso con la quinta penalización

	Ciudades					
	A	B	C	D	Oferta	P5
Central 1	5	40 | 2	7	5 | 3	35	2
Central 2	3	6	6	30 | 1	0	
Central 3	6	1	60 | 2	4	0	
Central 4	45 | 4	3	6	6	45 – 45 = 0	2
Demanda	70 – 45 = 25	0	10	0		
P5	1		1			

Por último, se adjudica 25 millones de kw a la ciudad A y 10 millones de kw a la ciudad C:

	Ciudades				
	A	B	C	D	Oferta
Central 1	25 | 5	40 | 2	10 | 7	5 | 3	35 – 35 = 0
Central 2	3	6	6	30 | 1	0
Central 3	6	1	60 | 2	4	0
Central 4	45 | 4	3	6	6	0
Demanda	25 – 25 = 0	0	10 – 10 = 0	0	

Por lo tanto, la demanda queda satisfecha sin superar los niveles establecidos por la oferta de cada central.

El costo total del envío de energía por ciudad se refleja en la siguiente tabla:

	Ciudades			
	A	B	C	D
Central 1	25 | 5	40 | 2	10 | 7	5 | 3
Central 2				30 | 1
Central 3			60 | 2	
Central 4	45 | 4			

$Z_0 = 25 \times 5 + 40 \times 2 + 10 \times 7 + 5 \times 3 + 30 \times 1 + 60 \times 2 + 45 \times 4 = 620$ euros

MÉTODO DE LOS MULTIPLICADORES MODI APLICADO A LA SOLUCIÓN VOGEL

Se aplica el Método Modi a la solución Vogel para encontrar la solución óptima.

Matriz coste inicial: $C_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 7 & 3 \\ 3 & 6 & 6 & 1 \\ 6 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 6 & 6 \end{pmatrix}$

1 Iteración: Se calcula la matriz de costes reducidos $(C_{ij} - Z_{ij})$

Paso 1: Se considera la matriz Z_{ij} de los costes de la variable solución:

Matriz de coste solución Vogel

5	2	7	3
z_{21}	z_{22}	z_{23}	1
z_{31}	z_{32}	2	z_{34}
4	z_{42}	z_{43}	z_{44}

Paso 2: Los costes de la variable solución se calculan recurriendo a un conjunto de números u_i y v_j (números MODI), originando que el método MODI se conozca también como el método de los Costes Ficticios.

De modo que la suma de estos números sea igual a los valores de la matriz Z_{ij} de los costes de la variable solución Vogel.

$u_i + v_j$	v_1	v_2	v_3	v_4
u_1	5	2	7	3
u_2				1
u_3			2	
u_4	4			

El número de ecuaciones es menor que el número de incógnitas por lo que el sistema resultante siempre es compatible indeterminado (infinitas soluciones). Vale cualquier solución particular.

$$\text{Haciendo } v_1 = 0 \quad \mapsto \quad \begin{cases} u_1 + v_1 = 5 & \rightarrow \quad u_1 = 5 \\ u_1 + v_2 = 2 & \rightarrow \quad v_2 = 2 - 5 = -3 \\ u_1 + v_3 = 7 & \rightarrow \quad v_3 = 7 - 5 = 2 \\ u_1 + v_4 = 3 & \rightarrow \quad v_4 = 3 - 5 = -2 \\ u_2 + v_4 = 1 & \rightarrow \quad u_2 = 1 + 2 = 3 \\ u_3 + v_3 = 2 & \rightarrow \quad u_3 = 2 - 2 = 0 \\ u_4 + v_1 = 4 & \rightarrow \quad u_4 = 4 \end{cases}$$

Se completan las celdas vacías de la tabla anterior con la suma de los u_i y v_j calculados, resultando la matriz Z_{ij}.

$u_i + v_j$	$v_1 = 0$	$v_2 = -3$	$v_3 = 2$	$v_4 = -2$
$u_1 = 5$	5	2	7	3
$u_2 = 3$	3	0	5	1
$u_3 = 0$	0	-3	2	-2
$u_4 = 4$	4	1	6	2

Matriz coste variable solución: $Z_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 7 & 3 \\ 3 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & -2 \\ 4 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$

Matriz de costos reducidos: $C_{ij} - Z_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 7 & 3 \\ 3 & 6 & 6 & 1 \\ 6 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 6 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 2 & 7 & 3 \\ 3 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & -2 \\ 4 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

La solución es óptima al ser todos los elementos de la matriz $C_{ij} - Z_{ij} \geq 0$, el algoritmo Modi ha finalizado.

La solución óptima es: $Z_0 = 620$ euros

MÉTODO ESQUINA NOROESTE

Para el modelo existe el equilibrio entre la oferta y la demanda. Los datos del problema se trasladan en la siguiente tabla:

	Ciudades				
	A	B	C	D	Oferta
Central 1	5	2	7	3	80
Central 2	3	6	6	1	30
Central 3	6	1	2	4	60
Central 4	4	3	6	6	45
Demanda	70	40	70	35	215

El siguiente paso es seleccionar la demanda de la esquina más al noroeste, de manera que no sobrepase la oferta, en caso contrario se asigna la mayor cantidad. En este caso se asignan 70 millones de kw a la provincia A.
La demanda de la ciudad A es 0, una vez restada la cantidad asignada, se procede a eliminar la columna, continuando el proceso de asignación.

	Ciudades				
	A	B	C	D	Oferta
Central 1	70 | 5	2	7	3	80 – 70 = 10
Central 2	3	6	6	1	30
Central 3	6	1	2	4	60
Central 4	4	3	6	6	45
Demanda	70 – 70 = 0	40	70	35	215

A la nueva esquina noroeste (ciudad B) se le asignan los 10 kw restantes, quedando la oferta de la central 1 a 0. Por lo tanto, se elimina la primera fila.

	Ciudades				
	A	B	C	D	Oferta
Central 1	70 | 5	10 | 2	7	3	10 – 10 = 0
Central 2	3	6	6	1	30
Central 3	6	1	2	4	60
Central 4	4	3	6	6	45
Demanda	70 – 70 = 0	40 – 10 = 30	70	35	215

A la nueva esquina noroeste, la central 2 tiene la misma oferta y demanda. En este caso, tanto la oferta como la demanda se quedan a 0, así que se eliminan ambas arbitrariamente.

	Ciudades				
	A	B	C	D	Oferta
Central 1	70 | 5	10 | 2	7	3	10 – 10 = 0
Central 2	3	30 | 6	6	1	30 – 30 = 0
Central 3	6	1	2	4	60
Central 4	4	3	6	6	45
Demanda	70 – 70 = 0	30 – 30 = 0	70	35	215

La nueva esquina noroeste pasaría a ser la central 3 de la ciudad C. A esta se le asignan 60 kw quedando la oferta a 0 y eliminando toda la fila de la central 3.

	Ciudades				
	A	B	C	D	Oferta
Central 1	70 | 5	10 | 2	7	3	10 – 10 = 0
Central 2	3	30 | 6	6	1	30 – 30 = 0
Central 3	6	1	60 | 2	4	60 – 60 = 0
Central 4	4	3	6	6	45
Demanda	70 – 70 = 0	30 – 30 = 0	70 – 60 = 10	35	215

A continuación, se le asignan los 10 kw restantes de la demanda de la ciudad C a la central 4. Se procede a eliminar la columna de la ciudad C.

	Ciudades				
	A	B	C	D	Oferta
Central 1	70 | 5	10 | 2	7	3	10 – 10 = 0
Central 2	3	30 | 6	6	1	30 – 30 = 0
Central 3	6	1	60 | 2	4	60 – 60 = 0
Central 4	4	3	10 | 6	6	45 – 10 = 35
Demanda	70 – 70 = 0	30 – 30 = 0	10 – 10 = 0	35	215

Por último, queda solamente la central 4 para ofertar. Por lo tanto, tanto la demanda como la oferta se quedan a 0, terminando así este proceso.

	Ciudades				
	A	B	C	D	Oferta
Central 1	70 | 5	10 | 2	7	3	10 – 10 = 0
Central 2	3	30 | 6	6	1	30 – 30 = 0
Central 3	6	1	60 | 2	4	60 – 60 = 0
Central 4	4	3	10 | 6	35 | 6	35 – 35 = 0
Demanda	70 – 70 = 0	30 – 30 = 0	10 – 10 = 0	35 – 35 = 0	215

El cuadro de asignaciones y de costo se refleja en al siguiente tabla:

	Ciudades			
	A	B	C	D
Central 1	70 | 5	10 | 2		
Central 2		30 | 6		
Central 3			60 | 2	
Central 4			10 | 6	35 | 6

La solución básica factible inicial reporta un costo mínimo (valor de la función objetivo) de:

$Z_0 = 70 \times 5 + 10 \times 2 + 30 \times 6 + 60 \times 2 + 10 \times 6 + 35 \times 6 = 940$ euros.

El método de la Esquina Noroeste tiene un mínimo de cálculos, ignorando los costos, considera todas las restricciones para su elaboración.

Es útil en problemas con innumerables origenes y destinos en los que importe satisfacer las restricciones. Es el algoritmo de transporte menos probable para ofrecer una buena solución de bajo costo.

MÉTODO DE LOS MULTIPLICADORES MODI APLICADO A LA SOLUCIÓN ESQUINA NOROESTE

Se aplica el Método Modi a la solución de la Esquina Noroeste para encontrar la solución óptima.

Matriz coste inicial: $C_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 7 & 3 \\ 3 & 6 & 6 & 1 \\ 6 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 6 & 6 \end{pmatrix}$

Primera Iteración: Se calcula la matriz de costes reducidos $(C_{ij} - Z_{ij})$

Paso 1: Se considera la matriz Z_{ij} de los costes de la solución de la Esquina Noroestre:

Matriz de coste solución Esquina Noroeste

5	2	z_{13}	z_{14}
z_{21}	6	z_{23}	z_{24}
z_{31}	z_{32}	2	z_{34}
z_{41}	z_{42}	6	6

Paso 2: Los costes de la variable solución se calculan recurriendo un conjunto de números u_i y v_j (números MODI). De modo que la suma de estos números sea igual a los valores de la matriz Z_{ij} de los costes de la variable solución de la Esquina Noroeste.

$u_i + v_j$	v_1	v_2	v_3	v_4
u_1	5	2		
u_2		6		
u_3			2	
u_4			6	6

El número de ecuaciones es menor que el número de incógnitas por lo que el sistema resultante siempre es compatible indeterminado (infinitas soluciones). Vale cualquier solución particular.

En este caso, resultan seis ecuaciones y ocho incógnitas por lo que se requieren dos parámetros.

En este sentido, una solución particular se obtiene asignando un 0 a cualquier celda vacía (por ejemplo, sea $z_{32} = 1$. De este modo, se opera como en el caso anterior.

Se considera la matriz Z_{ij} de los costes de la variable solución:

Nueva Matriz de coste solución Esquina Noroeste

$u_i + v_j$	v_1	v_2	v_3	v_4
u_1	5	2		
u_2		6		
u_3		1	2	
u_4			6	6

$$\text{Haciendo } v_1 = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} u_1 + v_1 = 5 & \rightarrow \quad u_1 = 5 \\ u_1 + v_2 = 2 & \rightarrow \quad v_2 = 2 - 5 = -3 \\ u_2 + v_2 = 6 & \rightarrow \quad u_2 = 6 + 3 = 9 \\ u_3 + v_2 = 1 & \rightarrow \quad u_3 = 1 + 3 = 4 \\ u_3 + v_3 = 2 & \rightarrow \quad v_3 = 2 - 4 = -2 \\ u_4 + v_3 = 6 & \rightarrow \quad u_4 = 6 + 2 = 8 \\ u_4 + v_4 = 6 & \rightarrow \quad v_4 = 6 - 8 = -2 \end{cases}$$

Se completan las celdas vacías de la tabla anterior con la suma de los números u_i y v_j (números MODI) calculados, resultando la matriz Z_{ij}

Nueva Matriz de coste solución Esquina Noroeste

$u_i + v_j$	0	-3	-2	-2
5	5	2	3	3
9	9	6	7	7
4	4	1	2	2
8	8	5	6	6

$$\text{Matriz coste variable solución: } Z_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 3 \\ 9 & 6 & 7 & 7 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \\ 8 & 5 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

Matriz de costos reducidos: $C_{ij} - Z_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 7 & 3 \\ 3 & 6 & 6 & 1 \\ 6 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 6 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 3 \\ 9 & 6 & 7 & 7 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \\ 8 & 5 & 6 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 \\ -6 & 0 & -1 & -6 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ -4 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

La matriz de costes reducidos tiene ceros en los elementos correspondientes a las variables que están en la solución. La presencia de elementos negativos indica que no se ha conseguido la solución óptima.
El coste de entrada más pequeño coincide en las celdas $z_{21} = -6$ y $z_{24} = -6$, pudiendo seleccionar cualquiera de las dos casillas. En este caso, se selecciona $z_{24} = -6$

En consecuencia, entra en la base la variable x_{24} con signo $(+)$.

A partir de este elemento, se van alternando los signos $(\pm)$ a izquierda o derecha en las casillas del coste mínimo calculado por el método de la Esquina Noroeste.

	Ciudades				
	A	B	C	D	Oferta
Central 1	70	10			80
Central 2		$(-)$ 30 x_{22}		$(+)$ x_{24}	30
Central 3		$(+)$ 0	$(-)$ 60		60
Central 4			$(+)$ 10	$(-)$ 35	45
Demanda	70	40	70	35	215

Hay que introducir el 0 con signo $(+)$. El elemento más pequeño con signo $(-)$ es el 30.

El elemento x_{24} toma el valor más pequeño de los valores de la tabla que tienen $(-)$, con lo que $x_{24} = 30$ y desde esta variable se traza la trayectoria (± 30).

La trayectoria se traza en un circuito cerrado, teniendo balanceadas filas y columnas, es decir, sumando y restando la misma cantidad.

	Ciudades				
	A	B	C	D	Oferta
Central 1	70	10			80
Central 2		$30 - 30 = 0$		$\boxed{30}$	30
Central 3		$0 + 30 = 30$	$60 - 30 = 30$		60
Central 4			$10 + 30 = 40$	$35 - 30 = 5$	45
Demanda	70	40	70	35	215

El circuito obtenido es cerrado, donde en todas las columnas y filas seleccionadas hay un elemento positivo y otro negativo, es decir se suma y se resta la misma cantidad (30).
Si se seleccionan los valores 70 y 10 el circuito no estaría cerrado, columnas y filas no quedarían balanceadas.

La nueva matriz de costes y costo mínimo (valor de la función objetivo):

	Ciudades				
	A	B	C	D	Oferta
Central 1	70 | 5	10 | 2			80
Central 2				30 | 1	30
Central 3		30 | 1	30 | 2		60
Central 4			40 | 6	5 | 6	45
Demanda	70	40	70	35	215

Para hallar el coste de la nueva solución, se deberá restar 960 (resultado obtenido en el método de la Esquina Noroeste) al producto de 6 (coste de entrada más pequeño seleccionado anteriormente) por 30 (valor más pequeño de la tabla, seleccionada anteriormente para trazar el circuito).

El coste de la nueva solución es: $Z_1 = 960 - 6 \times 30 = 760$ euros

Otra alternativa para calcularlo sería multiplicando todos los valores obtenidos en la tabla final de la iteración.

$Z_1 = 70 \times 5 + 10 \times 2 + 30 \times 1 + 30 \times 2 + 40 \times 6 + 30 \times 1 + 5 \times 6 = 760$ euros.

El algoritmo del método MODI se va iterando hasta encontrar la solución óptima, cosa que sucede cuando no hay elementos negativos en la matriz de costes reducidos $(C_{ij} - Z_{ij})$.

Segunda Iteración: Se calcula la matriz de costes reducidos $(C_{ij} - Z_{ij})$

Paso 1: Se considera la matriz Z_{ij} de los costes de la solución de la 1ª iteración:

Matriz de coste solución 1ª Iteración

5	2	z_{13}	z_{14}
z_{21}	z_{22}	z_{23}	1
z_{31}	1	2	z_{34}
z_{41}	z_{42}	6	6

Paso 2: Se calculan los números $(u_i$ y $v_j)$, de modo que la suma $u_i + v_j$ sea igual a los valores de la matriz Z_{ij} de los costes de la variable solución de la Primera Iteración.

$u_i + v_j$	v_1	v_2	v_3	v_4
u_1	5	2		
u_2				1
u_3		1	2	
u_4			6	6

El número de ecuaciones es menor que el número de incógnitas por lo que el sistema resultante siempre es compatible indeterminado (infinitas soluciones). Vale cualquier solución particular.

En esta ocasión hay siete ecuaciones y ocho incógnitas, requeriendo un parámetro.

$$\text{Haciendo } v_1 = -3 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} u_1 + v_1 = 5 & \rightarrow \quad u_1 = 5 + 3 = 8 \\ u_1 + v_2 = 2 & \rightarrow \quad v_2 = 2 - 8 = -6 \\ u_3 + v_2 = 1 & \rightarrow \quad u_3 = 1 + 6 = 7 \\ u_3 + v_3 = 2 & \rightarrow \quad v_3 = 2 - 7 = -5 \\ u_4 + v_3 = 6 & \rightarrow \quad u_4 = 6 + 5 = 11 \\ u_4 + v_4 = 6 & \rightarrow \quad v_4 = 6 - 11 = -5 \\ u_2 + v_4 = 1 & \rightarrow \quad u_2 = 1 + 5 = 6 \end{cases}$$

Se completan las celdas vacías de la tabla anterior con la suma de los números u_i y v_j, resultando la matriz Z_{ij}

Nueva Matriz de coste solución 1ª iteración

$u_i + v_j$	-3	-6	-5	-5
8	5	2	3	3
6	3	0	1	1
7	4	1	2	2
11	8	5	6	6

$$\text{Matriz coste variable solución: } Z_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \\ 8 & 5 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{Matriz de costos reducidos: } \quad C_{ij} - Z_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 7 & 3 \\ 3 & 6 & 6 & 1 \\ 6 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 6 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \\ 8 & 5 & 6 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ -4 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz de costes reducidos tiene ceros en los elementos correspondientes a las variables que están en la solución. La presencia de elementos negativos indica que no se ha conseguido la solución óptima.
El coste de entrada más pequeño coincide en la celda $z_{41} = -4$

En consecuencia, entra en la base la variable x_{41} con signo $(+)$.

A partir de este elemento, se van alternando los signos $(\pm)$ a izquierda o derecha en las casillas del coste mínimo calculado en la 1ª iteración.

Matriz de coste mínimo 1ª iteración

	Ciudades				
	A	B	C	D	Oferta
Central 1	70 | 5	10 | 2			80
Central 2				30 | 1	30
Central 3		30 | 1	30 | 2		60
Central 4			40 | 6	5 | 6	45
Demanda	70	40	70	35	215

Resulta, por tanto:

	Ciudades				
	A	B	C	D	Oferta
Central 1	(–) 70	(+) 10			80
Central 2				30	30
Central 3		(–) 30	(+) 30		60
Central 4	(+) x_{41}		(–) 40	5	45
Demanda	70	40	70	35	215

El elemento más pequeño que tiene signo $(-)$ es el 30.

El elemento x_{41} toma el valor más pequeño de los valores de la tabla que tienen $(-)$, con lo que $x_{41} = 30$ y desde esta variable se traza la trayectoria (± 30)

	Ciudades				
	A	B	C	D	Oferta
Central 1	$70-30=40$	$10+30=40$			80
Central 2				30	30
Central 3		$30-30=0$	$30+30=60$		60
Central 4	$\boxed{30}$		$40-30=10$	5	45
Demanda	70	40	70	35	215

El circuito obtenido es cerrado. De tomar los valores 30 y 5, el circuito no estaría cerrado y las columnas y filas no quedarían balanceadas.
La nueva matriz de costes y costo mínimo (valor de la función objetivo):

	Ciudades				
	A	B	C	D	Oferta
Central 1	40 | 5	40 | 2			80
Central 2				30 | 1	30
Central 3			60 | 2		60
Central 4	30 | 4		10 | 6	5 | 6	45
Demanda	70	40	70	35	215

Para hallar el coste de la nueva solución, se deberá restar 760 (coste final obtenido en la Primera Iteración) al producto de 4 (coste de entrada más pequeño seleccionado anteriormente) por 30 (el valor más pequeño de la tabla, seleccionado anteriormente para trazar el circuito).

El coste de la nueva solución es: $Z_2 = 760 - 4 \times 30 = 640$ euros .

Otra alternativa para calcularlo sería multiplicar todos los valores obtenidos en la tabla final de la iteración.

$$Z_2 = 40 \times 5 + 40 \times 2 + 30 \times 1 + 60 \times 2 + 30 \times 4 + 10 \times 6 + 5 \times 6 = 640 \text{ euros.}$$

El algoritmo del método MODI finaliza al encontrar la solución óptima, es decir, cuando no hay elementos negativos en la matriz de costes reducidos $(C_{ij} - Z_{ij})$.

Tercera Iteración: Se calcula la matriz de costes reducidos $(C_{ij} - Z_{ij})$

Paso 1: Se considera la matriz Z_{ij} de los costes de la solución de la 2ª iteración:

Matriz de coste solución 2ª Iteración

5	2	z_{13}	z_{14}
z_{21}	z_{22}	z_{23}	1
z_{31}	z_{32}	2	z_{34}
4	z_{42}	6	6

Paso 2: Se calculan los números (u_i y v_j), de modo que la suma $u_i + v_j$ sea igual a los valores de la matriz Z_{ij} de los costes de la variable solución de la 2ª Iteración.

$u_i + v_j$	v_1	v_2	v_3	v_4
u_1	5	2		
u_2				1
u_3			2	
u_4	4		6	6

El número de ecuaciones es menor que el número de incógnitas por lo que el sistema resultante siempre es compatible indeterminado (infinitas soluciones). Hay siete ecuaciones y ocho incógnitas, con lo cual hay un parámetro.

$$\text{Haciendo } v_1 = 5 \rightarrow \begin{cases} u_1 + v_1 = 5 & \rightarrow \quad u_1 = 5 - 5 = 0 \\ u_1 + v_2 = 2 & \rightarrow \quad v_2 = 2 - 0 = 2 \\ u_4 + v_1 = 4 & \rightarrow \quad u_4 = 4 - 5 = -1 \\ u_4 + v_3 = 6 & \rightarrow \quad v_3 = 6 + 1 = 7 \\ u_4 + v_4 = 6 & \rightarrow \quad v_4 = 6 + 1 = 7 \\ u_3 + v_3 = 2 & \rightarrow \quad u_3 = 2 - 7 = -5 \\ u_2 + v_4 = 1 & \rightarrow \quad u_2 = 1 - 7 = -6 \end{cases}$$

Se completan las celdas vacías de la tabla anterior con la suma de los números u_i y v_j, resultando la matriz Z_{ij}

Nueva Matriz de coste solución 2ª iteración

$u_i + v_j$	5	2	7	7
0	5	2	7	7
-6	-1	-4	1	1
-5	0	-3	2	2
-1	4	1	6	6

Matriz coste variable solución: $Z_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 7 & 7 \\ -1 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 6 & 6 \end{pmatrix}$

Matriz de costos reducidos: $C_{ij} - Z_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 7 & 3 \\ 3 & 6 & 6 & 1 \\ 6 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 6 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 2 & 7 & 7 \\ -1 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 6 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -4 \\ 4 & 10 & 5 & 0 \\ 6 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

La presencia de elementos negativos indica que no se ha conseguido la solución óptima.

El coste de entrada más pequeño coincide en la celda $z_{14} = -4$

En consecuencia, entra en la base la variable x_{14} con signo $(+)$.

A partir de este elemento, se van alternando los signos $(\pm)$ a izquierda o derecha en las casillas del coste mínimo calculado en la Segunda Iteración.

Matriz de coste mínimo 2ª iteración

	Ciudades				
	A	B	C	D	Oferta
Central 1	40 | 5	40 | 2			80
Central 2				30 | 1	30
Central 3			60 | 2		60
Central 4	30 | 4		10 | 6	5 | 6	45
Demanda	70	40	70	35	215

Con lo que resulta:

	Ciudades				
	A	B	C	D	Oferta
Central 1	(–) 40	40		(+) x_{14}	80
Central 2				30	30
Central 3			60		60
Central 4	(+) 30		10	(–) 5	45
Demanda	70	40	70	35	215

El elemento más pequeño que tiene signo $(-)$ es el 5.

El elemento x_{14} toma el valor más pqueño de los valores de la tabla que tienen $(-)$, por tanto $x_{14} = 5$ y desde esta variable se traza la trayectoria (± 5)

	Ciudades				
	A	B	C	D	Oferta
Central 1	$40-5=35$	40		5	80
Central 2				30	30
Central 3			60		60
Central 4	$30+5=35$		10	$5-5=0$	45
Demanda	70	40	70	35	215

El circuito obtenido es cerrado. Si se seleccionan los valores 30 y 60 el circuito no estaría cerrado y las columnas y filas no quedarían balanceadas.

El coste mínimo de la nueva distribución:

	Ciudades				
	A	B	C	D	Oferta
Central 1	35 | 5	40 | 2		5 | 3	80
Central 2				30 | 1	30
Central 3			60 | 2		60
Central 4	35 | 4		10 | 6		45
Demanda	70	40	70	35	215

El coste de la nueva solución, se deberá restar 640 (coste final obtenido en la Segunda Iteración) al producto de 4 (coste de entrada más pequeño seleccionado anteriormente) por 5 (valor más pequeño de la tabla, seleccionado anteriormente para trazar el circuito).

El coste de la nueva solución es: $Z_3 = 640 - 4 \times 5 = 620$ euros.

Otra alternativa para calcularlo sería multiplicando todos los valores obtenidos en la tabla final de la iteración.

$$Z_3 = 35 \times 5 + 35 \times 4 + 40 \times 2 + 60 \times 2 + 10 \times 6 + 5 \times 3 + 30 \times 1 = 620 \text{ euros.}$$

El algoritmo del método MODI se va iterando hasta encontrar la solución óptima, cosa que no sucede cuando hay elementos negativos en la matriz de costes reducidos $(C_{ij} - Z_{ij})$.

Cuarta Iteración: Se calcula la matriz de costes reducidos $(C_{ij} - Z_{ij})$

Paso 1: Se considera la matriz Z_{ij} de los costes de la solución de la 3ª iteración:

Matriz de coste solución 3ª Iteración

5	2	z_{13}	3
z_{21}	z_{22}	z_{23}	1
z_{31}	z_{32}	2	z_{34}
4	z_{42}	6	6

Paso 2: Se calculan los números (u_i y v_j), de modo que la suma $u_i + v_j$ sea igual a los valores de la matriz Z_{ij} de los costes de la variable solución de la 3ª Iteración.

$u_i + v_j$	v_1	v_2	v_3	v_4
u_1	5	2		3
u_2				1
u_3			2	
u_4	4		6	6

En esta ocasión hay ocho ecuaciones y ocho incógnitas.

$$\text{Haciendo } v_1 = -5 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} u_1 + v_1 = 5 & \rightarrow \quad u_1 = 5 + 5 = 10 \\ u_1 + v_2 = 2 & \rightarrow \quad v_2 = 2 - 10 = -8 \\ u_1 + v_4 = 3 & \rightarrow \quad v_4 = 3 - 10 = -7 \\ u_2 + v_4 = 1 & \rightarrow \quad u_2 = 1 + 7 = 8 \\ u_3 + v_3 = 2 & \rightarrow \quad u_3 = 2 + 3 = 5 \\ u_4 + v_1 = 4 & \rightarrow \quad u_4 = 4 + 5 = 9 \\ u_4 + v_3 = 6 & \rightarrow \quad v_3 = 6 - 9 = -3 \end{cases}$$

Se completan las celdas vacías de la tabla anterior con la suma de los números u_i y v_j, resultando la matriz Z_{ij}

Nueva Matriz de coste solución 1ª iteración

$u_i + v_j$	-3	-6	-5	-5
8	5	2	7	3
6	3	0	5	1
7	0	-3	2	-2
11	4	1	6	6

Matriz coste variable solución: $Z_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 7 & 3 \\ 3 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & -2 \\ 4 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$

Matriz de costos reducidos: $C_{ij} - Z_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 7 & 3 \\ 3 & 6 & 6 & 1 \\ 6 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 6 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 2 & 7 & 3 \\ 3 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & -2 \\ 4 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

La solución es óptima cuando todos los elementos de la matriz $(C_{ij} - Z_{ij})$ no son negativos. El algoritmo Modi ha finalizado.

La solución óptima es: $Z_4 = 620$ euros

ASIGNACIÓN DE CENTRALES ELÉCTRICAS A LAS CIUDADES

Se inicia aplicando el método Húngaro con el objetivo de determinar la asignación de coste mínimo entre Centrales Eléctricas y Ciudades.

El algoritmo utiliza la propiedad de reducción de matrices, para reducir la matriz original de costo, hasta que los costos asociados C_{ij} con la asignación óptima, sean 0 y todos los otros costos sean no negativos.

En cada iteración del algoritmo, se reduce la matriz de tal manera que haya al menos un cero en cada fila y columna. Si el número mínimo de filas y/o columnas necesarios para cubrir todos los ceros es n, entonces existe una asignación óptima (no necesariamente única).

Cada iteración consta de los siguientes pasos:

Paso 1: En la matriz original de costo, identificar el mínimo de cada fila y restarlo de todos los elementos de la fila.
Paso 2: En la matriz que resulte del Paso 1, identificar el mínimo de cada columna, y restarlo de todos los elementos de la columna.
Paso 3: Identificar la solución óptima como la asignación factible asociada con los elementos cero de la matriz obtenida en el Paso 2.

Señalar que no hay que introducir Central Ficticia o Ciudad Ficitica para alcanzar el equilibrio entre Oferta y Demanda.

- Primera Iteración:

Se encuentra el menor número de cada fila.

Ciudades

	A	B	C	D	Oferta
Central 1	5	2	7	3	80
Central 2	3	6	6	1	30
Central 3	6	1	2	4	60
Central 4	4	3	6	6	45
Demanda	70	40	70	35	215

Se resta en cada fila de la matriz original el menor elemento encontrado en cada fila.

Ciudades

	A	B	C	D	Oferta
Central 1	5 – 2 = 3	2 – 2 = 0	7 – 2 = 5	3 – 2 = 1	80
Central 2	3 – 1 = 2	6 – 1 = 5	6 – 1 = 5	1 – 1 = 0	30
Central 3	6 – 1 = 5	1 – 1 = 0	2 – 1 = 1	4 – 1 = 3	60
Central 4	4 – 3 = 1	3 – 3 = 0	6 – 3 = 3	6 – 3 = 3	45
Demanda	70	40	70	35	215

Se repite en la nueva matriz el mismo proceso con las columnas.

Ciudades

	A	B	C	D	Oferta
Central 1	3	0	5	1	80
Central 2	2	5	5	0	30
Central 3	5	0	1	3	60
Central 4	1	0	3	3	45
Demanda	70	40	70	35	215

Se resta en cada columna de la nueva matriz el menor elemento encontrado en cada columna.

Ciudades

	A	B	C	D	Oferta
Central 1	3 – 1 = 2	0 – 0 = 0	5 – 1 = 4	1 – 0 = 1	80
Central 2	2 – 1 = 1	5 – 0 = 5	5 – 1 = 4	0 – 0 = 0	30
Central 3	5 – 1 = 4	0 – 0 = 0	1 – 1 = 0	3 – 0 = 0	60
Central 4	1 – 1 = 0	0 – 0 = 0	3 – 1 = 2	3 – 0 = 0	45
Demanda	70	40	70	35	215

Se traza la menor cantidad de combinaciones de líneas horizontales y líneas verticales a la matriz resultante, con el objetivo de cubrir todos los 0 de la matriz de costo reducido.

Ciudades

	A	B	C	D	Oferta
~~Central 1~~	~~2~~	~~0~~	~~4~~	~~1~~	~~80~~
~~Central 2~~	~~1~~	~~5~~	~~4~~	~~0~~	~~30~~
~~Central 3~~	~~4~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~60~~
~~Central 4~~	~~0~~	~~0~~	~~2~~	~~0~~	~~45~~
Demanda	70	40	70	35	215

El algoritmo finaliza porque el número de líneas trazadas es igual al grado de la matriz.

Asignación: En la matriz de costo reducido se inicia por la fila que tenga menos ceros y tachando los ceros de la fila y columna donde se realizó la asignación.

En este sentido:

Se asigna la Ciudad B a la Central 1 y se tachan los otros dos ceros que hay en la columna de la Ciudad B.

Ciudades

	A	B	C	D	Oferta
Central 1	2	0	4	1	80
Central 2	1	5	4	0	30
Central 3	4		0	0	60
Central 4	0	0	2	0	45
Demanda	70	40	70	35	215

Se asigna la Ciudad D a la Central 2 y se tachan los otros dos ceros que hay en la columna de la Ciudad D.

Ciudades

	A	B	C	D	Oferta
Central 1	2	0	4	1	80
Central 2	1	5	4	0	30
Central 3	4		0	0	60
Central 4	0	0	2	0	45
Demanda	70	40	70	35	215

Se asigna la ciudad C a la Central 3.

Ciudades

	A	B	C	D	Oferta
Central 1	2	0	4	1	80
Central 2	1	5	4	0	30
Central 3	4		0	0	60
Central 4	0	0	2	0	45
Demanda	70	40	70	35	215

Se asigna la Ciudad A a la Central 4.

Ciudades

	A	B	C	D	Oferta
Central 1	2	0	4	1	80
Central 2	1	5	4	0	30
Central 3	4		0	0	60
Central 4	0	0	2	0	45
Demanda	70	40	70	35	215

La asignación óptima es:

	Ciudades				
	A	B	C	D	Oferta
Central 1		2			80
Central 2				1	30
Central 3			2		60
Central 4	4				45
Demanda	70	40	70	35	215

Por lo tanto, el costo mínimo de asignación de coste es: $Z_0 = 4 + 2 + 2 + 1 = 9$ euros

MÉTODO DEL SIMPLEX: COSTE MÍNIMO DE ELECTRICIDAD

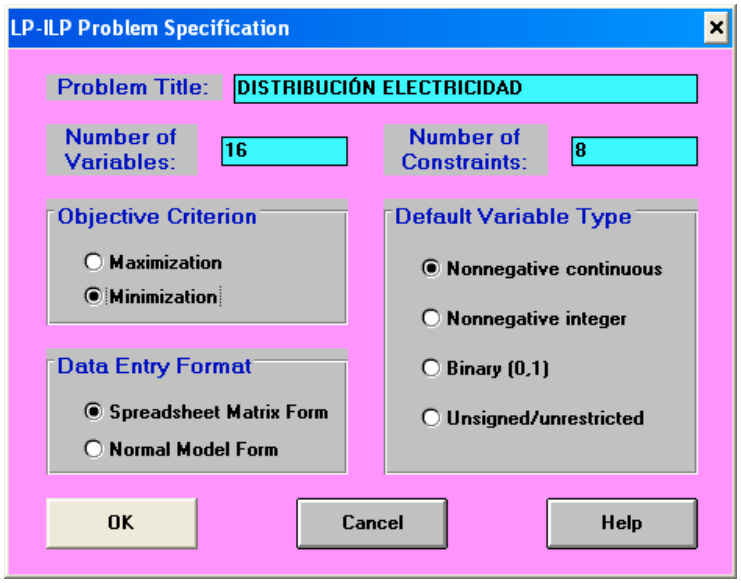
Coste mínimo de la distribución de energía de Centrales Eléctricas a Ciudades.

	Ciudad A	Ciudad B	Ciudad C	Ciudad D	Oferta
Central 1	$5x_{11}$	$2x_{12}$	$7x_{13}$	$3x_{14}$	80
Central 2	$3x_{21}$	$6x_{22}$	$6x_{23}$	$1x_{24}$	30
Central 3	$6x_{31}$	$1x_{32}$	$2x_{33}$	$4x_{34}$	60
Central 4	$4x_{41}$	$3x_{42}$	$6x_{43}$	$6x_{44}$	45
Demanda	70	40	70	35	215

$$z = 5x_{11} + 2x_{12} + 7x_{13} + 3x_{14} + 3x_{21} + 6x_{22} + 6x_{23} + x_{24} + 6x_{31} + x_{32} + 2x_{33} + 4x_{34} + 4x_{41} + 3x_{42} + 6x_{43} + 6x_{44}$$

restricciones:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 80 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 30 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 60 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 45 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 70 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 40 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 70 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 35 \end{cases}$$



Solve the Problem, una vez que se introduzcan los datos

Linear and Integer Programming

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

DISTRIBUCIÓN ELECTRICIDAD

	OBJ/Constraint/VariableType/Bound
Minimize	5X1+2X2+7X3+3X4+3X5+6X6+6X7+X8+6X9+X10+2X11+4X12+4X13+3X14+6X15+6X16
C1	X1+X2+X3+X4=80
C2	X5+X6+X7+X8=30
C3	X9+X10+X11+X12=60
C4	X13+X14+X15+X16=45
C5	X1+X5+X9+X13=70
C6	X2+X6+X10+X14=40
C7	X3+X7+X11+X15=70
C8	X4+X8+X12+X16=35
Integer:	
Binary:	
Unrestricted:	
X1	>=0, <=M
X2	>=0, <=M
X3	>=0, <=M
X4	>=0, <=M
X5	>=0, <=M
X6	>=0, <=M
X7	>=0, <=M
X8	>=0, <=M
X9	>=0, <=M
X10	>=0, <=M
X11	>=0, <=M
X12	>=0, <=M
X13	>=0, <=M
X14	>=0, <=M
X15	>=0, <=M
X16	>=0, <=M

Forma Matricial: Format / Switch to Matriz Form

Linear and Integer Programming

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

DISTRIBUCIÓN ELECTRICIDAD

Variable -->	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9	X10	X11	X12	X13	X14	X15	X16	irectio	R. H.
Minimize	2	7	3	3	6	6	1	6	1	2	4	4	3	6	6		
C1	1	1	1													=	80
C2				1	1	1	1									=	30
C3								1	1	1	1					=	60
C4												1	1	1	1	=	45
C5				1				1				1				=	70
C6	1				1				1				1			=	40
C7		1				1				1				1		=	70
C8			1				1				1				1	=	35
LowerBound	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
UpperBound	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M		
VariableType																	

Linear and Integer Programming

File Format Results Utilities Window Help

Combined Report for DISTRIBUCIÓN ELECTRICIDAD

	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
1	X1	25,0000	5,0000	125,0000	0	basic	5,0000	5,0000
2	X2	40,0000	2,0000	80,0000	0	basic	-M	4,0000
3	X3	10,0000	7,0000	70,0000	0	basic	3,0000	7,0000
4	X4	5,0000	3,0000	15,0000	0	basic	3,0000	7,0000
5	X5	0	3,0000	0	0	at bound	3,0000	M
6	X6	0	6,0000	0	6,0000	at bound	0	M
7	X7	0	6,0000	0	1,0000	at bound	5,0000	M
8	X8	30,0000	1,0000	30,0000	0	basic	-M	1,0000
9	X9	0	6,0000	0	6,0000	at bound	0	M
10	X10	0	1,0000	0	4,0000	at bound	-3,0000	M
11	X11	60,0000	2,0000	120,0000	0	basic	-M	6,0000
12	X12	0	4,0000	0	6,0000	at bound	-2,0000	M
13	X13	45,0000	4,0000	180,0000	0	basic	-M	4,0000
14	X14	0	3,0000	0	2,0000	at bound	1,0000	M
15	X15	0	6,0000	0	0	at bound	6,0000	M
16	X16	0	6,0000	0	4,0000	at bound	2,0000	M
	Objective	Function	(Min.) =	620,0000	(Note:	Alternate	Solution	Exists!!)

	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
1	C1	80,0000	=	80,0000	0	0	80,0000	M
2	C2	30,0000	=	30,0000	0	-2,0000	30,0000	35,0000
3	C3	60,0000	=	60,0000	0	-5,0000	60,0000	70,0000
4	C4	45,0000	=	45,0000	0	-1,0000	45,0000	70,0000
5	C5	70,0000	=	70,0000	0	5,0000	45,0000	70,0000
6	C6	40,0000	=	40,0000	0	2,0000	0	40,0000
7	C7	70,0000	=	70,0000	0	7,0000	60,0000	70,0000
8	C8	35,0000	=	35,0000	0	3,0000	30,0000	35,0000

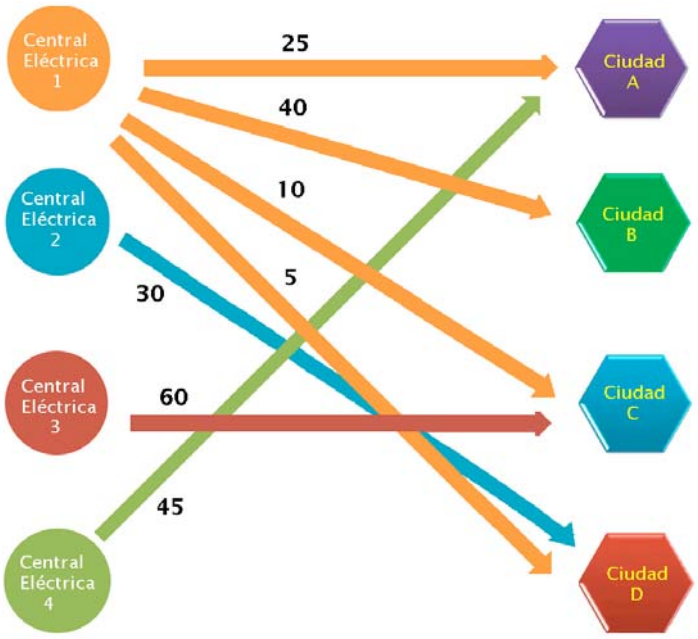
Interpretación del resultado:

$x_{ij} \equiv x_{origen\ destino}$: $x_{11} = 25$ $x_{12} = 40$ $x_{13} = 10$ $x_{14} = 5$ $x_{24} = 30$ $x_{33} = 60$ $x_{41} = 45$

	Ciudad A	Ciudad B	Ciudad C	Ciudad D	Oferta
Central 1	$5\,(x_{11} = 25)$	$2\,(x_{12} = 40)$	$7\,(x_{13} = 10)$	$3\,(x_{14} = 5)$	80
Central 2				$1\,(x_{24} = 30)$	30
Central 3			$2\,(x_{33} = 60)$		60
Central 4	$4\,(x_{41} = 45)$				45
Demanda	70	40	70	35	215

Función objetivo:

$$z = 5x_{11} + 2x_{12} + 7x_{13} + 3x_{14} + x_{24} + 2x_{33} + 4x_{41} =$$
$$= 5 \times 25 + 2 \times 40 + 7 \times 10 + 3 \times 5 + 30 + 2 \times 60 + 4 \times 45 = 620$$

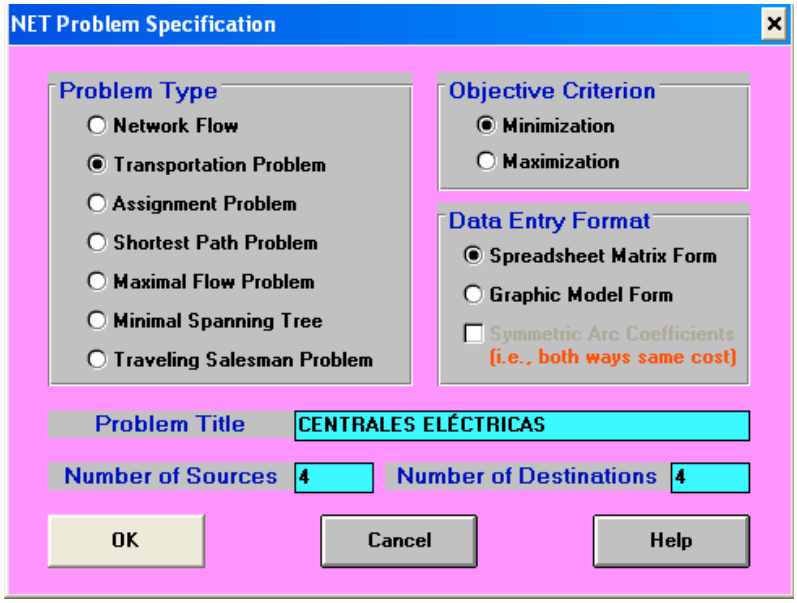


PROBLEMA TRANSPORTE: MÉTODOS HEURÍSTICOS

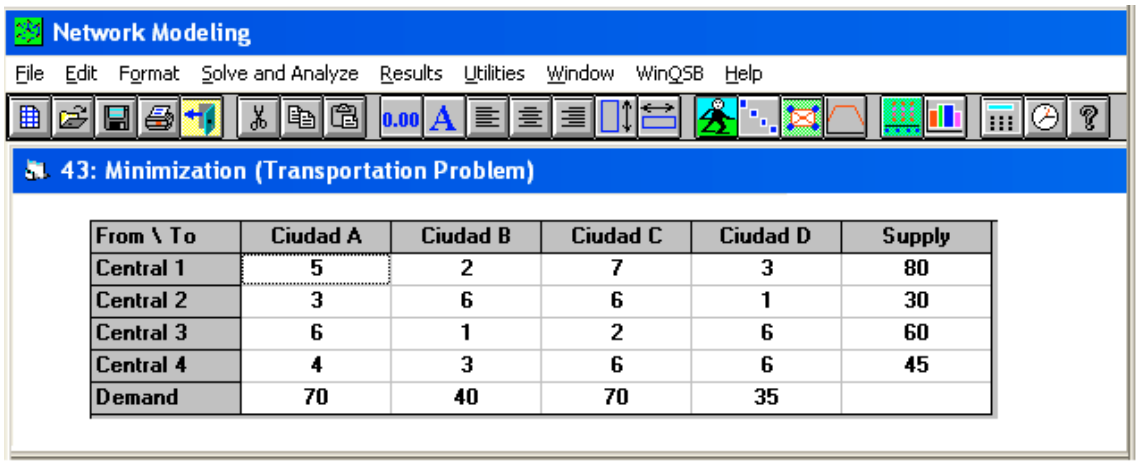
La tabla adjunta refleja el costo asociado al envío de suministro eléctrico por cada millón de Kw entre cada central y cada ciudad. Se requiere calcular el mínimo coste.

	Ciudad A	Ciudad B	Ciudad C	Ciudad D	Oferta
Central 1	5	2	7	3	80
Central 2	3	6	6	1	30
Central 3	6	1	2	4	60
Central 4	4	3	6	6	45
Demanda	70	40	70	35	

Para acceder a Transporte Asignación se ejecuta el módulo Network Modeling (NET) de Winqsb. Aparece la siguiente ventana:



Se introducen los datos y se personaliza con Edit / Node Names



From \ To	Ciudad A	Ciudad B	Ciudad C	Ciudad D	Supply
Central 1	5	2	7	3	80
Central 2	3	6	6	1	30
Central 3	6	1	2	6	60
Central 4	4	3	6	6	45
Demand	70	40	70	35	

Solve the Problem: Muestra el resultado óptimo

Solve and Display Steps-Network: Resuelve el problema mostrando las distintas redes o grafos hasta obtener la solución óptima.

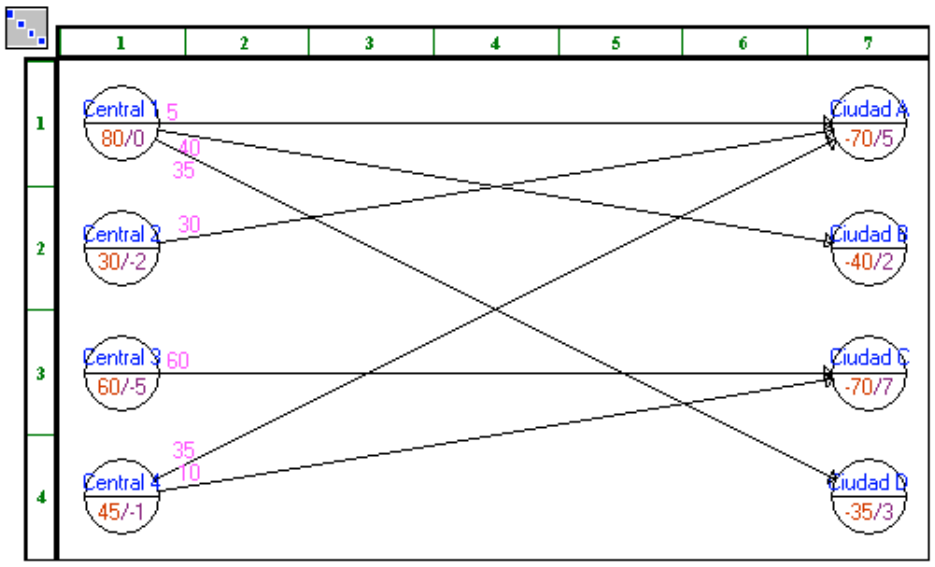
Network Modeling

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

43: Minimization (Transportation Problem)

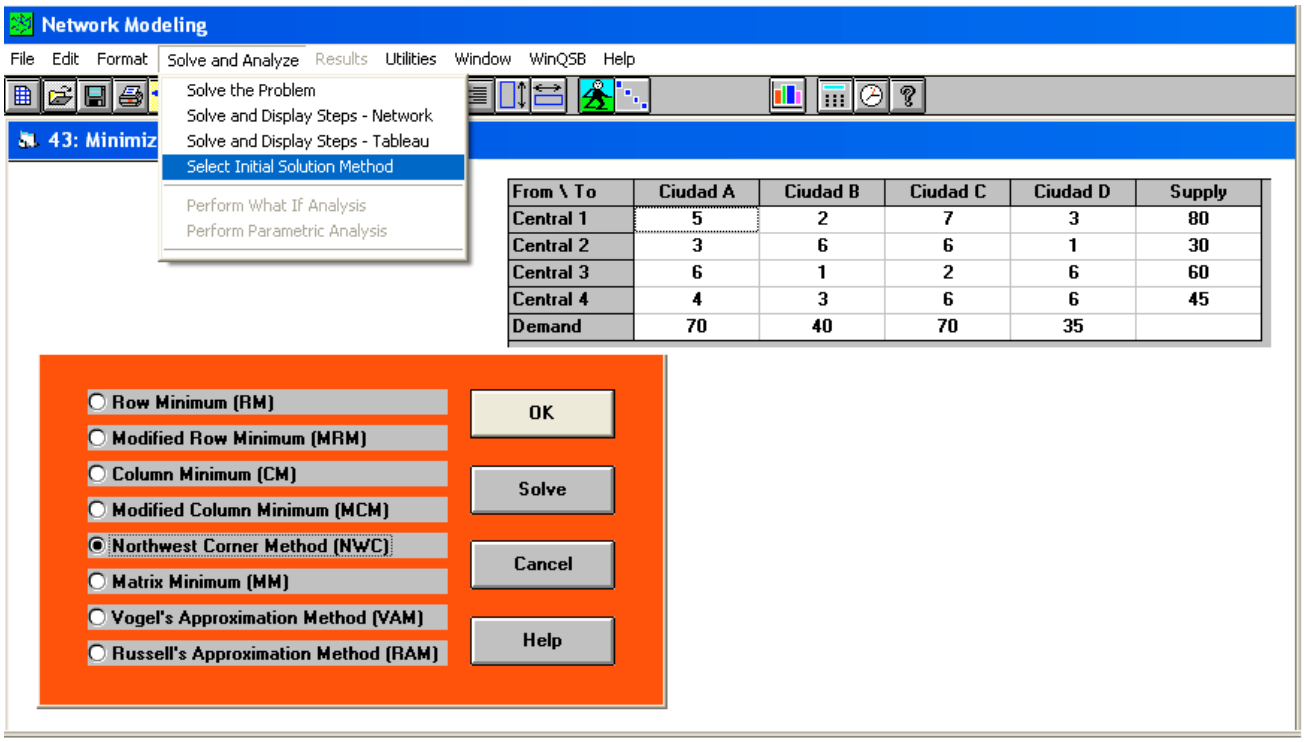
From \ To	Ciudad A	Ciudad B	Ciudad C	Ciudad D	Supply
Central 1	5	2	7	3	80
Central 2	3	6	6	1	30
Central 3	6	1	2	6	60
Central 4	4	3	6	6	45
Demand	70	40	70	35	

	From	To	Shipment	Unit Cost	Total Cost	Reduced Cost
1	Central 1	Ciudad A	5	5	25	0
2	Central 1	Ciudad B	40	2	80	0
3	Central 1	Ciudad D	35	3	105	0
4	Central 2	Ciudad A	30	3	90	0
5	Central 3	Ciudad C	60	2	120	0
6	Central 4	Ciudad A	35	4	140	0
7	Central 4	Ciudad C	10	6	60	0
	Total	Objective	Function	Value =	620	

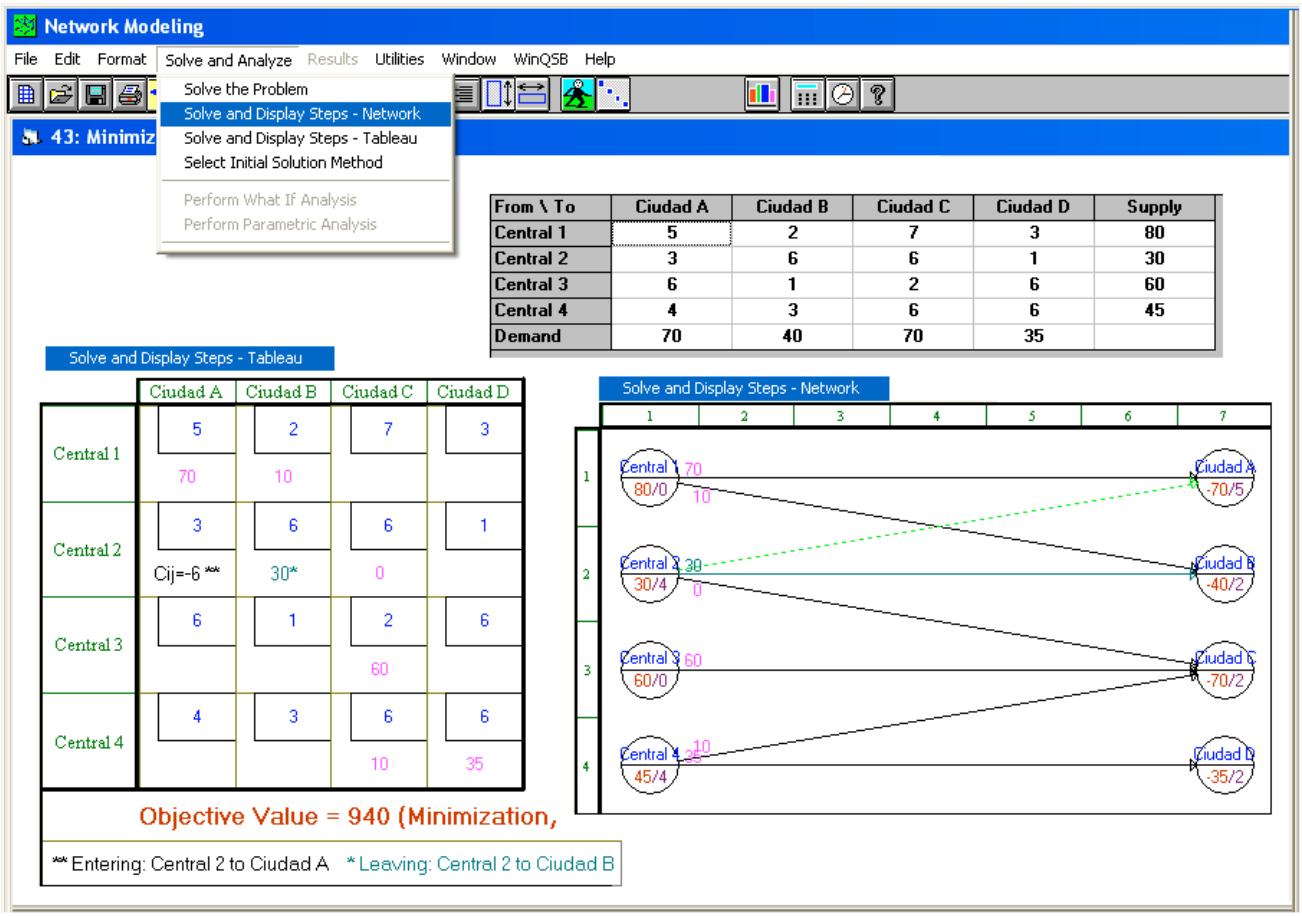


Con el icono Solve the Problem se obtiene la solución óptima del modelo de transporte.
Sin embargo, también se obtienen los resultados que ofrecen los métodos heurísticos como: Método de la Esquina Noroeste (NWC), Método del Mínimo Coste (MM) y Método de Aproximación de Vogel (VAM).

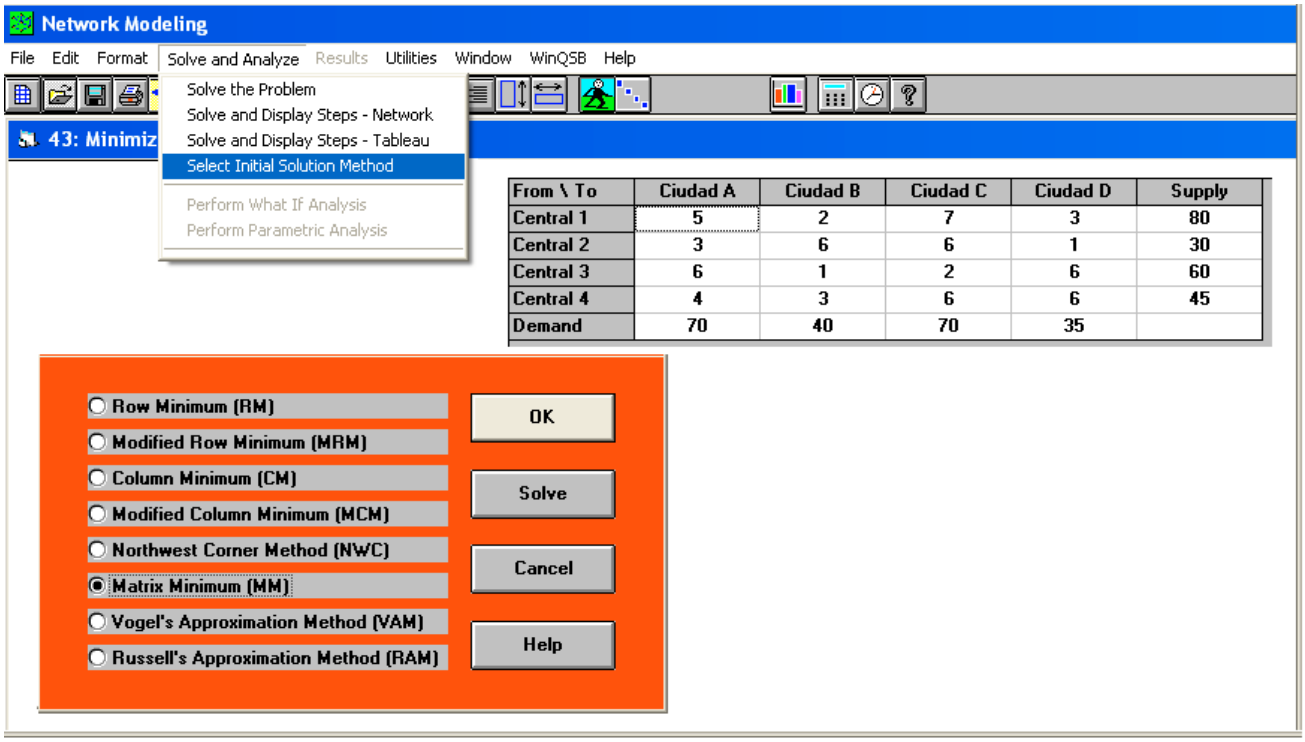
A métodos heurísticos se accede con la pestaña:
Solve and Analyze / Select Initial Soluction Method



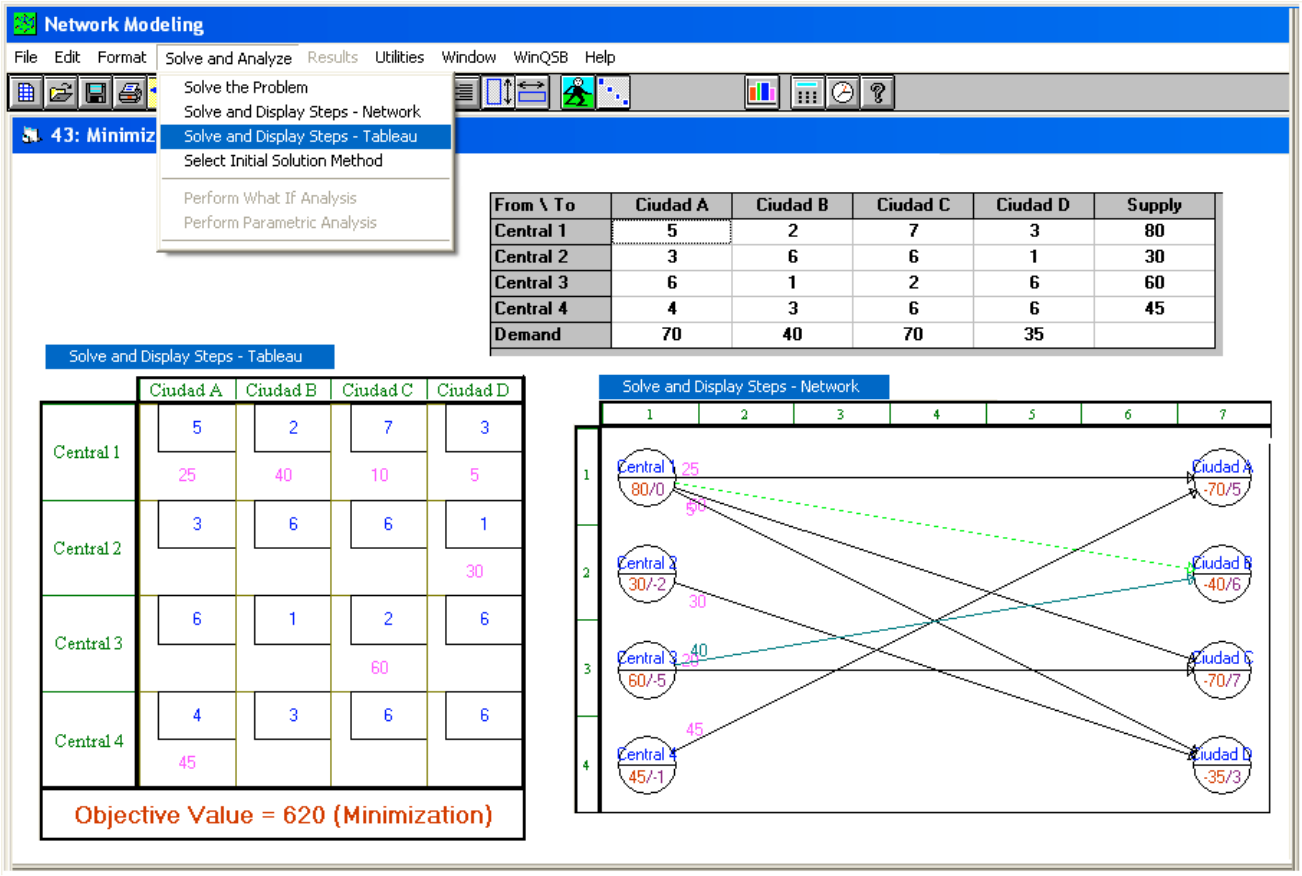
Seleccionado el método de la Esquina Noroeste (NWC) se procede a ejecutar la opción
Solve and Analyze / Solve and Display Steps–Tableu
Para visualizar la asignación: Solve and Analyze / Solve and Display -Network



MÉTODO MM: Solve and Analyze / Select Initial Soluction Method

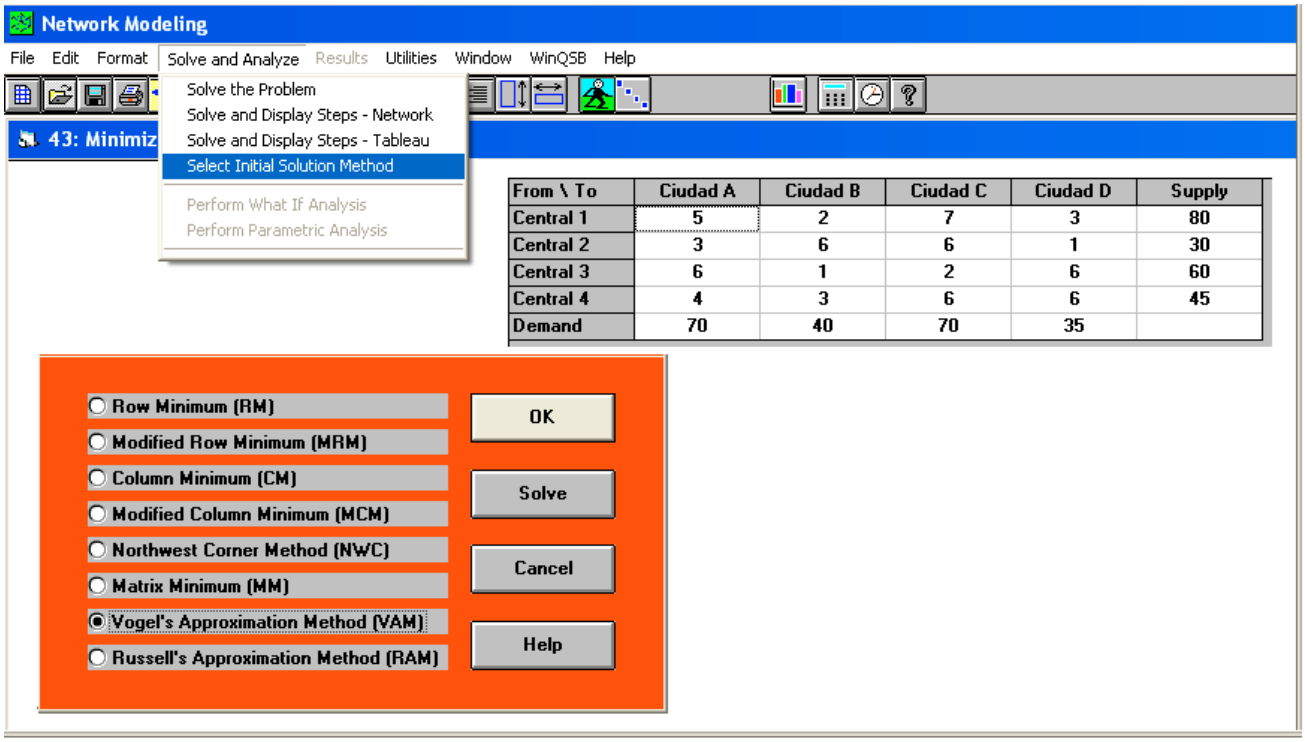


Seleccionado el método de Mínimo Costo (MM) se procede a ejecutar la opción
Solve and Analyze / Solve and Display Steps–Tableu
Para visualizar la asignación: Solve and Analyze / Solve and Display -Network



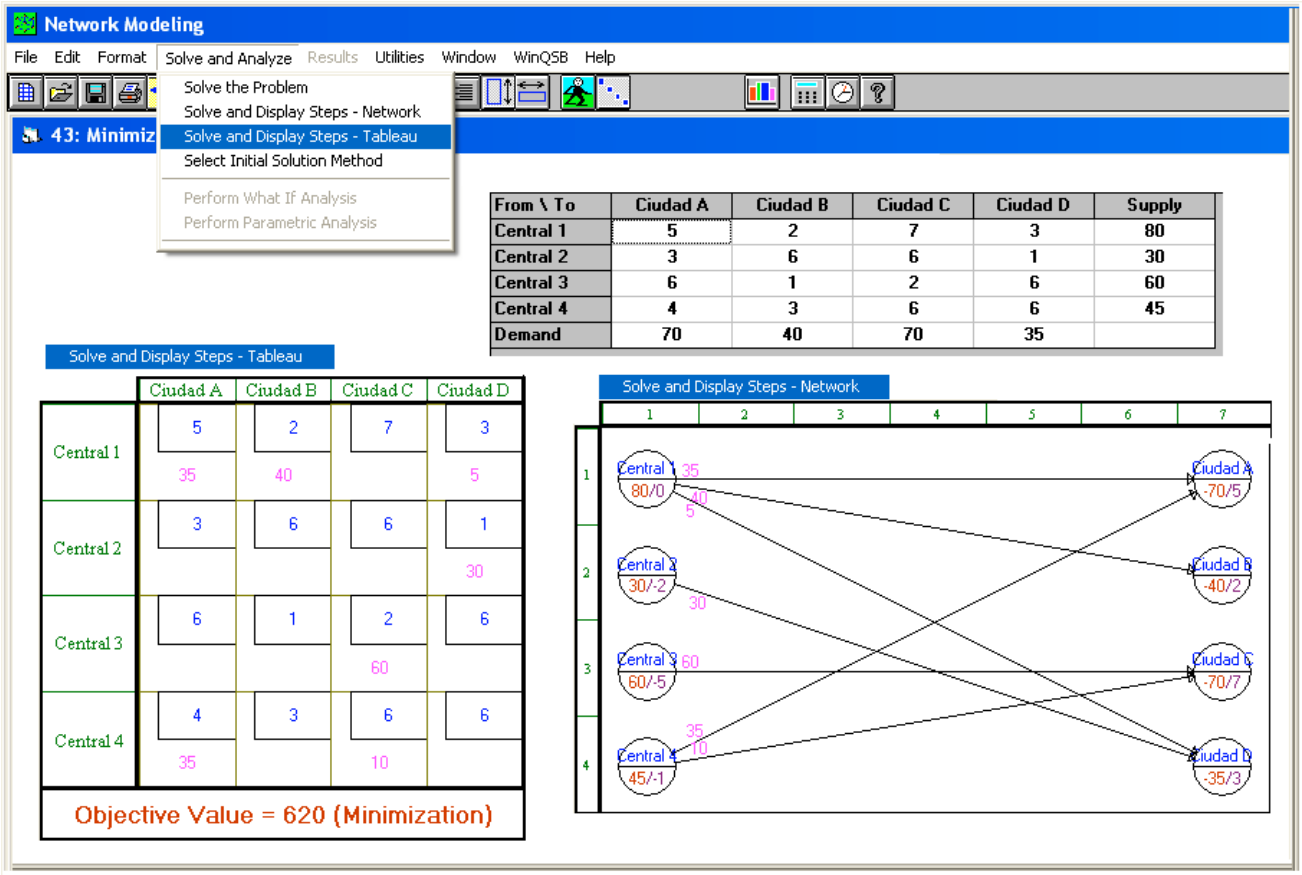
From \ To	Ciudad A	Ciudad B	Ciudad C	Ciudad D	Supply
Central 1	5	2	7	3	80
Central 2	3	6	6	1	30
Central 3	6	1	2	6	60
Central 4	4	3	6	6	45
Demand	70	40	70	35	

MÉTODO VAM: Solve and Analyze / Select Initial Soluction Method



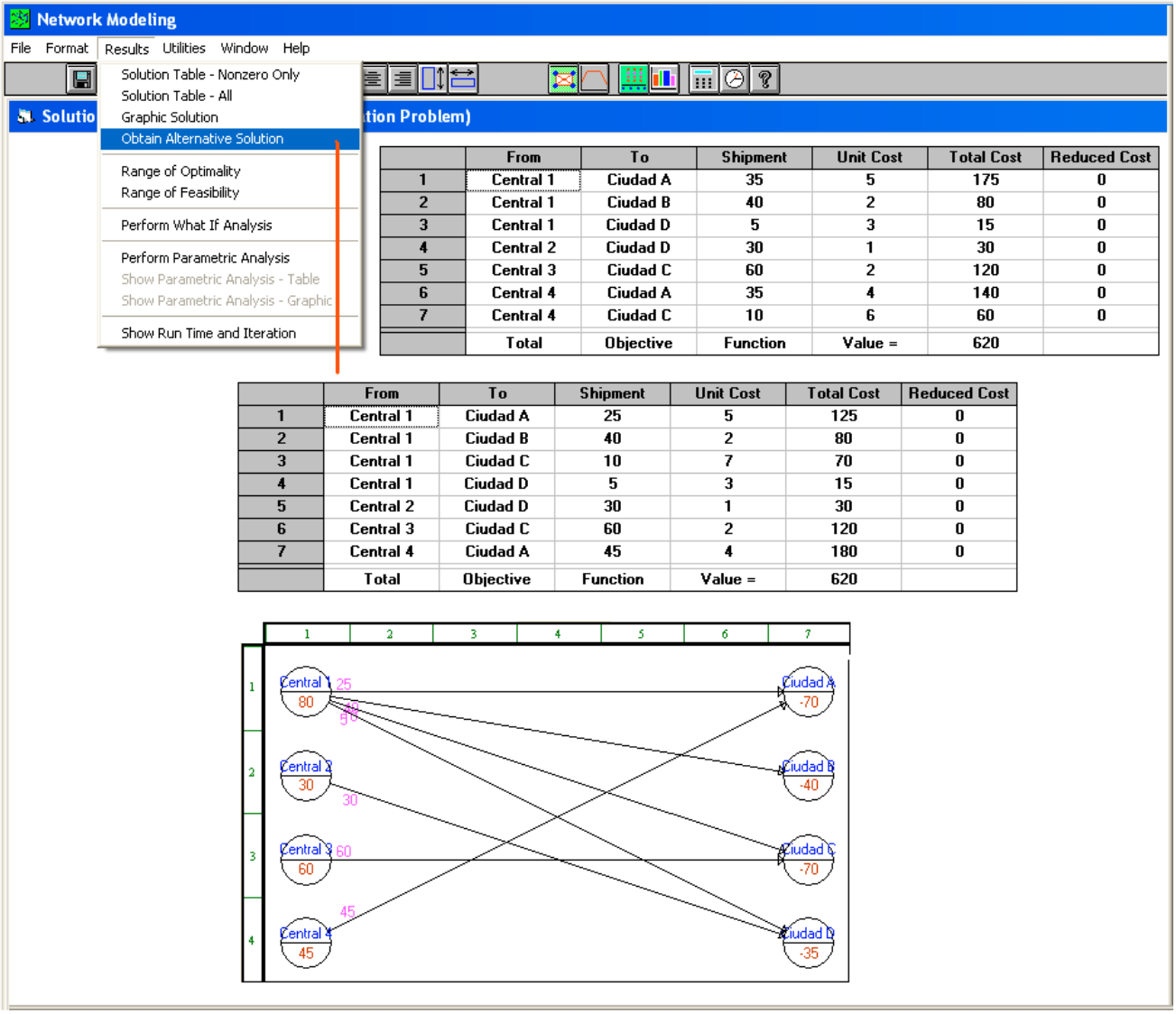
From \ To	Ciudad A	Ciudad B	Ciudad C	Ciudad D	Supply
Central 1	5	2	7	3	80
Central 2	3	6	6	1	30
Central 3	6	1	2	6	60
Central 4	4	3	6	6	45
Demand	70	40	70	35	

Seleccionado el método de aproximación de Vogel (VAM) se procede a ejecutar la opción
Solve and Analyze / Solve and Display Steps–Tableu
Para visualizar la asignación: Solve and Analyze / Solve and Display -Network



From \ To	Ciudad A	Ciudad B	Ciudad C	Ciudad D	Supply
Central 1	5	2	7	3	80
Central 2	3	6	6	1	30
Central 3	6	1	2	6	60
Central 4	4	3	6	6	45
Demand	70	40	70	35	

Al aplicar el método de aproximación Vogel (VAM) se puede obtener una solución alternativa. Obtenido el resultado óptimo (Solve the Problem) se accede a la pestaña Results / Obtain Alternative Solution

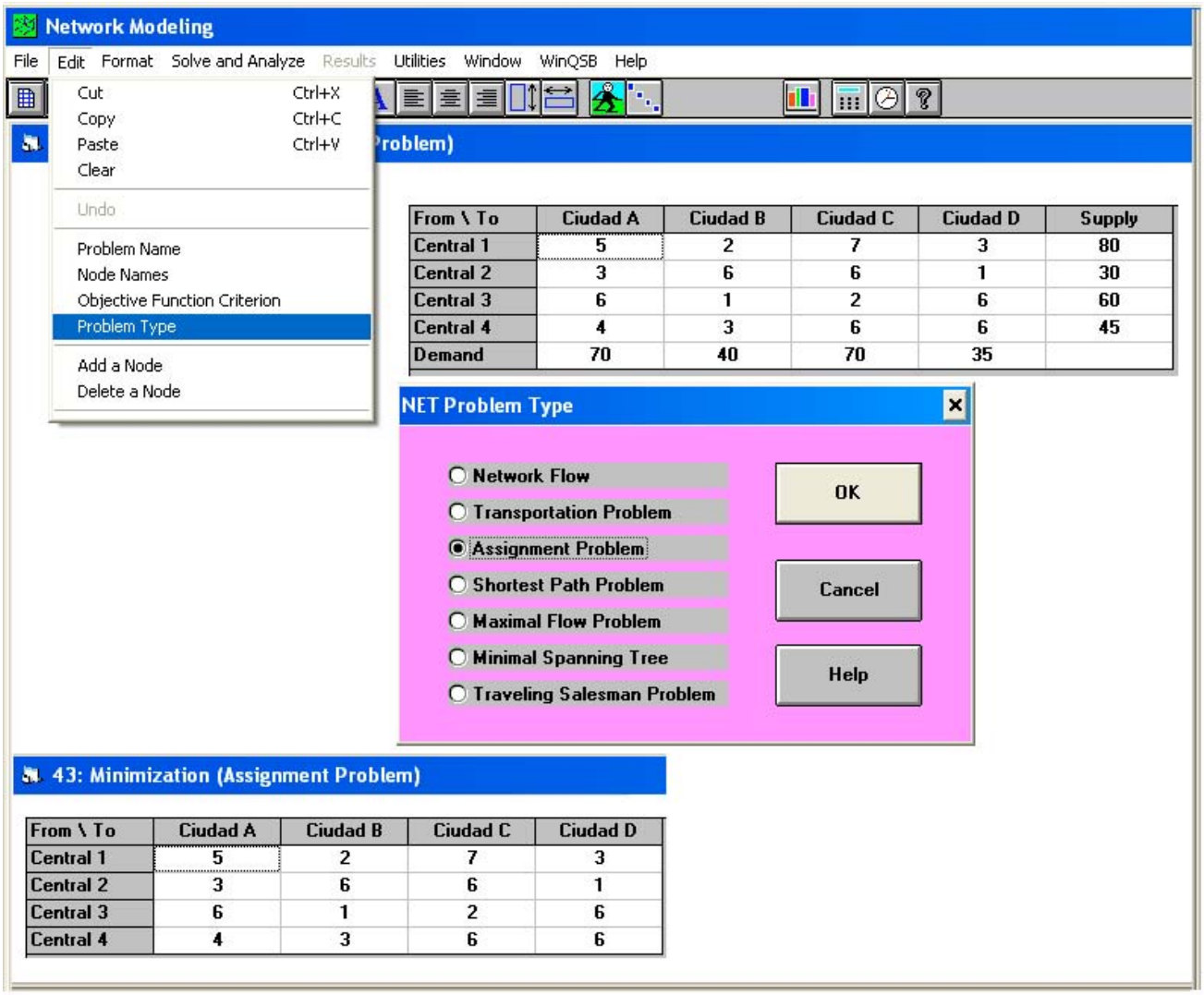


	From	To	Shipment	Unit Cost	Total Cost	Reduced Cost
1	Central 1	Ciudad A	35	5	175	0
2	Central 1	Ciudad B	40	2	80	0
3	Central 1	Ciudad D	5	3	15	0
4	Central 2	Ciudad D	30	1	30	0
5	Central 3	Ciudad C	60	2	120	0
6	Central 4	Ciudad A	35	4	140	0
7	Central 4	Ciudad C	10	6	60	0
	Total	Objective	Function	Value =	620	

	From	To	Shipment	Unit Cost	Total Cost	Reduced Cost
1	Central 1	Ciudad A	25	5	125	0
2	Central 1	Ciudad B	40	2	80	0
3	Central 1	Ciudad C	10	7	70	0
4	Central 1	Ciudad D	5	3	15	0
5	Central 2	Ciudad D	30	1	30	0
6	Central 3	Ciudad C	60	2	120	0
7	Central 4	Ciudad A	45	4	180	0
	Total	Objective	Function	Value =	620	

PROBLEMA DE ASIGNACIÓN

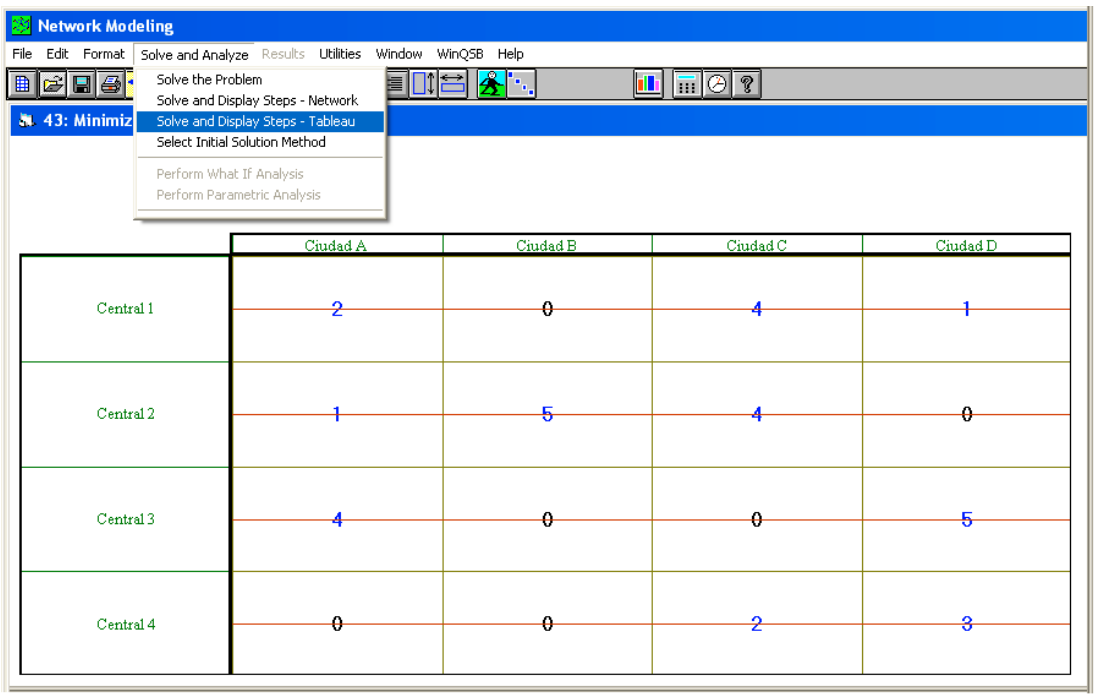
Para cambiar el tipo de problema: Edit / Problem Type / Assignment Problem

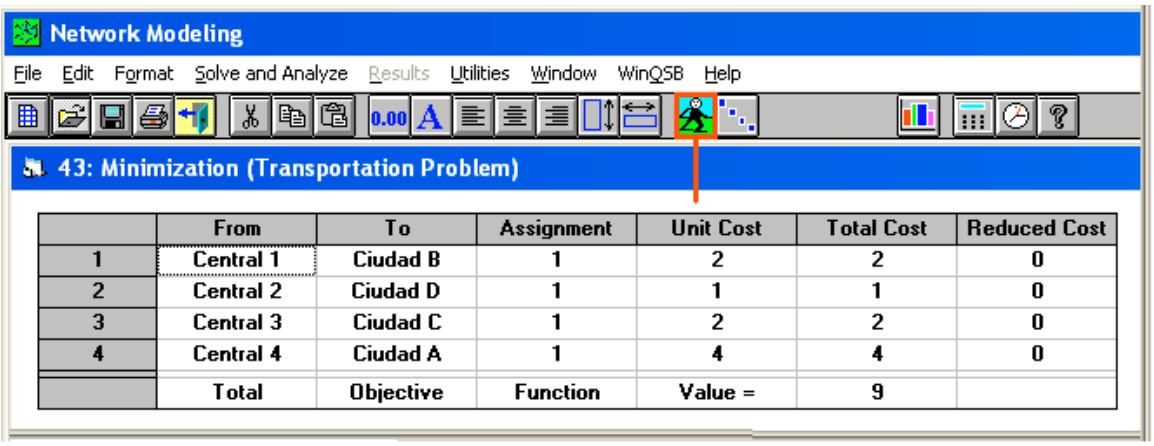


From \ To	Ciudad A	Ciudad B	Ciudad C	Ciudad D	Supply
Central 1	5	2	7	3	80
Central 2	3	6	6	1	30
Central 3	6	1	2	6	60
Central 4	4	3	6	6	45
Demand	70	40	70	35	

From \ To	Ciudad A	Ciudad B	Ciudad C	Ciudad D
Central 1	5	2	7	3
Central 2	3	6	6	1
Central 3	6	1	2	6
Central 4	4	3	6	6

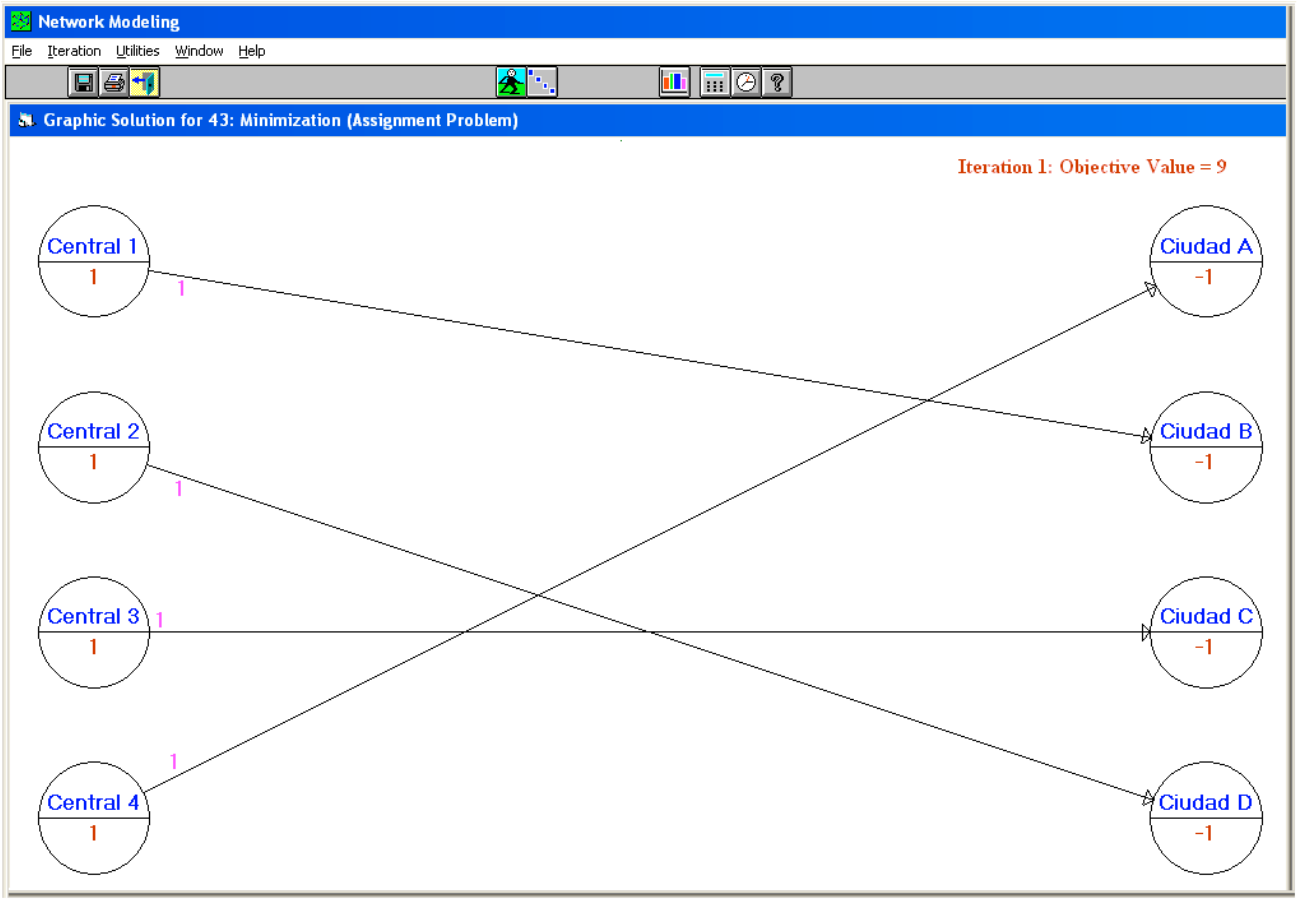
La asignación óptima por el método Húngaro: Solve and Analyze / Solve and Display Steps





	From	To	Assignment	Unit Cost	Total Cost	Reduced Cost
1	Central 1	Ciudad B	1	2	2	0
2	Central 2	Ciudad D	1	1	1	0
3	Central 3	Ciudad C	1	2	2	0
4	Central 4	Ciudad A	1	4	4	0
	Total	Objective	Function	Value =	9	

La resolución gráfica con la asignación óptima: Results / Graphic Solution


Network Modeling
File Iteration Utilities Window Help
Graphic Solution for 43: Minimization (Assignment Problem)
Iteration 1: Objective Value = 9
Central 1
1
Central 2
1
Central 3
1
Central 4
1
Ciudad A
-1
Ciudad B
-1
Ciudad C
-1
Ciudad D
-1
1
1
1
1

Tratamiento de Datos
Anova de un Factor con Medidas repetidas.
Análisis de la Varianza con varios factores.
Análisis Multivariable

El Análisis de la varianza con varios factores presenta una media teórica definida por tres términos.
Análisis de la Varianza con varios factores

ANÁLISIS VARIANZA

En cualquier experimento se pueden distinguir dos fases. Una primera, que consiste en la observación y análisis de los hechos que acontecen, y otra segunda, que interpreta y obtiene conclusiones.
La Estadística Descriptiva se encarga de dar una descripción numérica, ordenar y simplificar la información recogida en la primera fase.
La Estadística Teórica, con la información obtenida en el muestreo de la primera fase, pretende generalizar o predecir los resultados para toda la población.

Análisis Multivariante
El Análisis de Componentes Principales es una técnica de reducción de la dimensionalidad.
Actualmente es el método más utilizado en la investigación social y comercial.
AF
ACP
El Análisis de Componentes Principales (ACP) tiene como objetivo simplificar la estructura de los datos transformando las variables en análisis en el menor número posible de factores comunes o componentes principales que sean combinaciones lineales de las variables.

El índice de Gini verifica:
Principio del Anonimato
Principio de la Renta Relativa
Principio de Dalton
Principio de la Población
La curva de Lorenz es la representación de la concentración de recursos entre individuos.
Desigualdad
Gini
Lorenz
Igualdad
Población
El índice de Gini expresa el grado de concentración de los recursos.
$I_G = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n-1} q_i}{\sum_{i=1}^{n-1} p_i}$
El cambio de escala no afecta al índice
El cambio de origen afecta al índice

Análisis Multivariante
INVESTIGACIÓN en Cómic
Análisis Factorial
Componentes Principales (ACP)
Análisis Cluster
SPSS