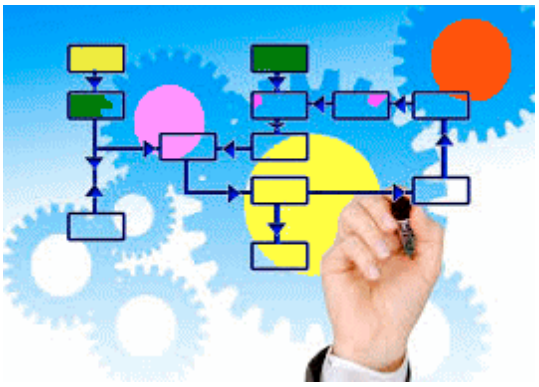


PLANIFICACIÓN DE PROYECTOS:
PERT - CPM – MCE – ZADERENKO - GANTT - ACKOFF–SASIENI - PROGRAMACIÓN LINEAL

PROCESO DE DECISION DE EMPRESA

La decisión en la empresa es un proceso que conduce, partiendo del futuro deseado de la misma, al análisis de los cursos de acción, a la elección entre los mismos, y finalmente a la acción. Las decisiones se pueden agrupar en "decisiones de planificación". La diferenciación surge en función de los sucesos o hechos con que se ha de enfrentar el proceso de decisión.

Los modelos de planificación se pueden plantear en forma de redes, para reflejar las alternativas de los cursos de acción. Estas redes pueden ser:

a) Totalmente deterministas y conocidas.
b) Parcialmente deterministas y conocidas.
c) No deterministas ni conocidas.

(a) En el primer tipo, la planificación puede caracterizarse por redes o secuencias de decisiones bien determinadas, siendo posible cuando cabe predecir, con casi plena certeza, todos los estadios del medio. Puede calcularse con exactitud el resultado correspondiente, en cualquier secuencia de decisión, y elegir la mejor entre ellas, es decir, el plan más adecuado entre todos los posibles.

Este modelo de planificación tiene dos fases básicas: la de diseño, y la de programación, control y distribución de recursos.
A este tipo de modelo se vincula la técnica de GANTT y el método PERT.

(b) En el segundo tipo de modelos de planificación no existe, a priori, un método que supere a todos los demás en la consecución de objetivos, por lo que no se cuenta con una estrategia óptima claramente definida. Entra en el contexto de la planificación, un elemento irreductible de riesgo. Aquí surge la necesidad de prever lo que ocurrirá en la consecución del futuro deseado, lo cual obligará a múltiples estrategias, que producirán múltiples redes potenciales de programación.

La obtención de información permitirá fijar el futuro deseado (objetivos) así como reducir las estrategias, en base a unas limitadas redes, sobre lo que pueda ocurrir, para preparar la acción ante las contingencias. Se precisa, ahora, del conocimiento de las técnicas clásicas de decisión, para la información o preparación de la acción.

(c) El tercero de los tipos de modelos de planificación representa una variante del modelo anterior, que surge ante situaciones de gran complejidad, de entorno incierto o inestable, que puede conducir a la desaparición de la empresa por el uso de un determinado planteamiento.

En este caso, es necesaria la subjetivización del proceso de decisión, en base a la función de utilidad, contrato de referencia, etc., referida a los efectos de los riesgos de pérdidas ante las decisiones. Ante esta planificación surge la investigación de los métodos de decisión en incertidumbre, parcial, total y no estructurada.

Ante la opción (a) se encuentran los árboles de decisión, las probabilidades subjetivas, revisadas, etc. a utilizar con diferentes métodos. Para la opción (b) los métodos tradicionales de decisión de incertidumbre total. Para la opción (c) y para el caso de entorno estable, la exigencia de una organización flexible y el desarrollo de los sistemas de control y de información.

Para fijar el método PERT dentro de los modelos de planificación, señalar que el proceso de decisión en la planificación implica:

(a) Un problema de análisis: El problema necesita ser formulado, los cursos de acción, delineados y comparados, y finalmente, escoger el curso de acción preferido.

(b) Un problema de programación: La estrategia elegida debe trasladarse a la acción, dentro de un programa compatible con los recursos materiales y organizacionales de la empresa.

La función de la programación se plantea con la finalidad de:

1. Evaluar los recursos en la planificación y las alternativas, más que prescribir cursos de acción.
2. Proveer al planificador de una sistemática y de unos poderosos medios de análisis, más que reducir sus posibilidades por el uso de automación.
3. Ayudar a la dirección a explotar políticas y objetivos con mayor profundidad.

Situado el método PERT en el proceso de decisión, como decisión de programación de proyectos en modelos de planificación, con redes totalmente determinadas y conocidas (es decir, elegido el programa o proyecto, en donde las característica del entorno se consideran predictibles).

ASPECTOS GENERALES DEL MÉTODO PERT DE EVALUACIÓN Y REVISIÓN DE PROYECTOS

La técnica PERT (Program Evaluation and Review Technique) nace en el año 1958 para paliar las dificultades de programación, coordinación y control que tenía la Marina de los Estados Unidos en el desarrollo del proyecto del submarino atómico Polaris. En este proyecto participan 250 contratistas directos y más de 9.000 subcontratistas. La aplicación del PERT ahorró, según el almirante Rayborn, dos años en su ejecución.

Esta técnica fue desarrollada por la Oficina de Evaluación de Programas, dependiente de la Oficina de Programas Especiales de la Marina de los Estados Unidos, junto con las empresas Booz, Alien y Hamilton, y Lockheed System División.

En el año 1957, la empresa norteamericana E. I. Dupont de Nemours junto con la Remington Rand Univac desarrollaron la técnica CPM (Critical Path Method) como método para la planificación y control del mantenimiento de equipos industriales.

Las técnicas PERT y CPM presentaban en sus versiones originales nítidas diferencias, pero con el tiempo algunos autores fueron fundiéndolas en un solo sistema, perdiéndose así la filosofía que caracterizaba a cada una de ellas. Posteriormente a la aparición del PERT y CPM se desarrollaron multitud de técnicas basadas en los principios en que éstas se apoyaban: La división del proyecto en distintas actividades y la interrelación de las mismas según la secuencia de su ejecución formando una malla.

La diferencia fundamental entre el PERT y CPM se centra en que mientras que el PERT estima la duración de las actividades en sentido probabilístico, lo que se lleva a cabo solamente para un nivel de coste, el CPM relaciona la duración y el coste, realizando la elección de la duración adecuada de forma que el coste total sea mínimo.

El método PERT, igual que su predecesor, el diagrama de Gantt, parte de la descomposición del proyecto en una serie de actividades u obras parciales, donde la actividad se entiende como la ejecución de una tarea, que exige para su realización la utilización de recursos (mano de obra, maquinaría, materiales, etc.)

Definido el concepto de actividad, se establece el concepto de suceso. Un suceso es un acontecimiento, un punto en el tiempo, una fecha en el calendario. El suceso no consume recursos, sólo indica el principio o el fin de una actividad o de un conjunto de actividades.

Para representar las diferentes actividades en que se descompone un proyecto, así como sus correspondientes sucesos, se utiliza una estructura de grafo. Los arcos del grafo representan las actividades, y los vértices, los sucesos. Hay que familiarizarse con la idea de que la longitud del arco no tiene por qué guardar relación con el tiempo previsto para ejecutar la actividad que representa.

Si las actividades son A, B, C, y D. Para poder iniciar las actividades B, C y D es necesario que se haya finalizado la actividad A. El vértice que representa el fin de la actividad A, a su vez, es el comienzo de la actividad B.

Una vez descompuesto el proyecto en actividades, la fase siguiente del método PERT consiste en establecer las prelaciones existentes entre las diferentes actividades. Estas prelaciones indican el orden en que deben ejecutarse dichas actividades. Por razones de tipo técnico, económico o jurídico, las diferentes actividades que constituyen un proyecto deben ejecutarse según un cierto orden.

El método PERT (Proyect Evaluation and Review Techniques) es un algoritmo basado en la teoría de redes diseñado para facilitar la planificación de proyectos.

El resultado final de la aplicación del algoritmo PERT será un cronograma para el proyecto, donde se podrá conocer la duración total del mismo y la clasificación de actividades según su criticidad.

El algoritmo PERT se desarrolla mediante intervalos probabilisticos, considerando tiempos optimistas, probables y pesimistas, lo que lo diferencia del método CPM (método de la ruta crítica) que supone tiempos determinísticos.

En sus inicios la técnica PERT se aplicó para evaluar la programación de proyectos de investigación y desarrollo, actualmente también se utiliza para controlar el avance de otros proyectos como: programas de construcción, preparación de presupuestos, campañas políticas, lanzamientos de nuevos productos, etc.

OBJETIVOS DE LA TÉCNICA PERT:

La aplicación de la técnica PERT proporciona a la dirección del proyecto la siguiente información:

- Duración media de las actividades.
- Duración media del proyecto.
- Probabilidad de adelantar o retrasar el proyecto con relación a la duración programada.
- Secuencia en que deben realizarse las actividades, lo que implica conocer qué actividades deben estar ejecutándose en un determinado momento.
- Actividades críticas, entendiendo como tales aquellas en las que un retraso en su desarrollo, con relación a lo programado, implica un retraso en la finalización del proyecto.
- Actividades no críticas y el tiempo en que las mismas pueden retrasar su ejecución sin perjudicar la duración prevista del proyecto.
- Situación de la ejecución del proyecto, en una fecha determinada, en relación a la programación realizada.
- Conocer con suficiente antelación el listado de las actividades a realizar en un próximo futuro, lo que permite definir el momento adecuado para la realización de compras, determinación de las previsiones de costes, establecimiento o modificación de controles, etc.

Todo ello puede permitir una dirección por excepción, lo que significa que la dirección sólo actuará cuando surjan desviaciones respecto del programa previsto. En el supuesto de desviaciones, la técnica permite calcular dónde se puede reforzar la marcha del proyecto para contrarrestar la demora.

Señalar, por su sencillez, el gráfico de GANTT, desarrollado a principios de este siglo por Henry GANTT, tiene una confección simple. Consta de una escala dividida en unidades de tiempo situadas en la horizontal de la parte alta del gráfico y un listado de actividades relacionadas de forma vertical situadas en la parte izquierda del gráfico. Una barra o línea es usada para expresar la duración de cada actividad en relación con la escala de tiempos. Se pueden utilizar líneas de diverso grosor o de distinto color para distinguir lo programado de lo realizado.

A diferencia de los métodos PERT y CPM, el método GANTT realiza la planificación y la programación al mismo tiempo. Es decir, la longitud de la barra que representa cada actividad indica las unidades de tiempo que consume la misma. Otra desventaja importante que tiene el método GANTT es no mostrar las interdependencias entre las actividades. No obstante, éste es un gráfico sencillo de realizar e idóneo complemento del PERT o CPM.

Actualmente, cualquier aplicación informática, dedicada al desarrollo de proyectos, permite, además de la obtención del PERT o CPM, la obtención del GANTT. Estas aplicaciones permiten también relacionar y efectuar simulaciones con las variables plazo de ejecución del proyecto y coste, según la asignación de recursos.

Señalar que en la consecución del objetivo de un proyecto influyen tres variables estrechamente relacionadas entre sí:

- Calidad o prestaciones del producto o servicio que se pretende obtener mediante la ejecución del proyecto.
- Plazo de ejecución.
- Coste del proyecto.

La alteración de una de estas tres variables suele suponer, al menos, la alteración de otra de ellas.

Las aplicaciones informáticas disponen normalmente de calendarios relativos a diversos años, en los que se marcan los domingos, festivos u otros días no laborales; ello permite obtener los diagramas e informes con fechas de calendario.

Ventajas PERT: $\begin{cases} \text{Método sencillo, idóneo para proyectos complejos.} \\ \text{Proporciona varios planes de ejecución.} \end{cases}$

Desventajas PERT: $\begin{cases} \text{Solo admite relaciones de tipo final/comienzo, con demora nula.} \\ \text{Es útil utilizar como complemento un método de representación gráfica.} \end{cases}$

PERT ESTADÍSTICO: DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD DEL GRAFO

La distribución de probabilidad del tiempo de duración de una actividad en el grafo PERT (Programa de Evaluación y Técnica de Revisión), universalmente aceptada; aunque señalaba Kenneth R. Maccrimmon en su crítica que esta aplicación se hizo sin ninguna consistencia, ya que se dice: "Como modelo de la distribución del tiempo de realización de una actividad, introduciremos la distribución Beta ..."

- La distribución Beta es una distribución de probabilidad continua con dos parámetros α y β cuya función de densidad para valores $0 < x < 1$ es:

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1} \cdot (1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)} \quad \text{con } \alpha > 0 \ , \ \beta > 0 \ , \ 0 < x < 1$$

Función Beta: $B(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx \qquad B(\alpha,\beta) = B(\beta,\alpha) \qquad B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\,.\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$

donde, la función Gamma: $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x}\,dx \qquad \alpha > 0 \ , \ \Gamma(\alpha) = (\alpha-1)!$

Media, varianza y moda de la distribción Beta:

$$\mu = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \quad , \quad \sigma^2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} \quad , \quad \text{moda} = \frac{\alpha-1}{\alpha+\beta-2} \qquad \alpha > 1 \ , \ \beta > 1$$

Un caso especial de la distribución Beta es una $B(1,1)$, cuando $\alpha = 1$ y $\beta = 1$, que coincide con la distribución uniforme en el intervalo U[0, 1].

Para estimar la media de la distribución Beta se usa una estimación de la moda de la distribución.

La razón es, es más probable adelantar un valor de la duración de una actividad que establecer la duración media de una actividad que se ha ensayado pocas o ninguna vez.

La media y la varianza de una distribución beta $B(\alpha,\beta)$ de parámetros a, b, α, β:

$$\mu = \frac{a(\beta+1) + b(\alpha+1)}{\alpha+\beta+2} \quad , \quad \sigma^2 = \left[\frac{b-a}{\alpha+\beta+2}\right]^2 \cdot \frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{\alpha+\beta+3}$$

Denotando por *m* el estimador de la moda: $m = \frac{a\beta + b\alpha}{\alpha+\beta}$

Se trata ahora de determinar la media de la distribución en función de la moda:

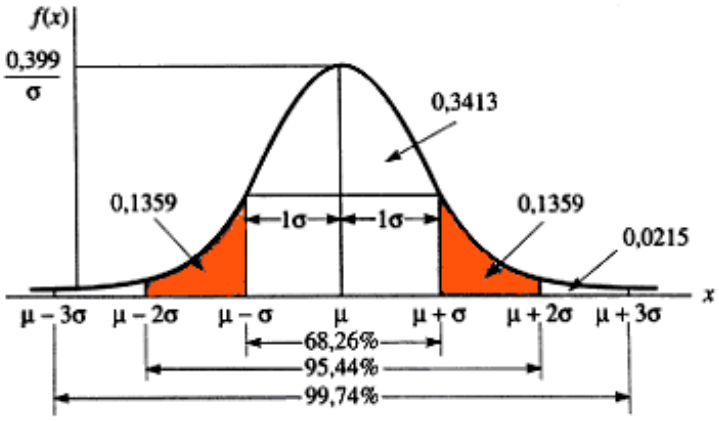
$$\mu = \frac{a\beta + a + b\alpha + b}{\alpha+\beta+2} = \frac{a\beta + b\alpha}{\alpha+\beta+2} + \frac{a}{\alpha+\beta+2} + \frac{b}{\alpha+\beta+2} =$$

$$= \frac{\beta+\alpha}{\alpha+\beta+2}\,m + \frac{a}{\alpha+\beta+2} + \frac{b}{\alpha+\beta+2} = \frac{1}{\alpha+\beta+2}\left[m(\beta+\alpha) + a + b\right]$$

La aproximación que se hace corrientemente es: $\mu \approx \frac{1}{6}(a + 4m + b)$

C.E. Clark justifica la aproximación $\mu \approx \frac{1}{6}(a+4m+b)$ de la siguiente forma:

Si se trunca la distribución normal en los puntos $\pm 2{,}66$, la desviación típica standard de dicha normal es $1/6$ de su recorrido, y esta distribución normal truncada es un modelo sencillo apropiado para determinar la desviación típica y el recorrido de una distribución.



Como Clark fue uno de los co-autores (junto a Malcolm, G. y Roseboom, JM) del trabajo Manual Project-Duration Estimation Technique for Teaching Scheduling Basics, en donde establecieron los fundamentales del PERT estadístico, su sugerencia ha sido aceptada universalmente.

Así, se suele adoptar la aproximación: $\mathrm{Var}(Y) = \frac{(b-a)^2}{36}$ o bien, $\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{36}$ en [0, 1]

Antes de aproximar $E(Y)$ como función de m, conviene comenzar aproximando $E(X)$ con su moda correspondiente: $m_x = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \rightarrow \beta = \frac{\alpha}{m_x} - \alpha = \frac{\alpha(1-m_x)}{m_x}$

Suponiendo que $\mathrm{Var}(X) = \frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{(\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+2)^2} = \frac{1}{36}$

Sustituyendo el valor de β en función de m_x, resulta:

$$E(X) = \frac{\alpha+1}{\alpha+\beta+2} = \frac{\alpha+1}{\alpha + \frac{\alpha(1-m_x)}{m_x} + 2} = \frac{m_x(\alpha+1)}{\alpha+2m_x}$$

Sustituyendo ahora en la ecuación de $\mathrm{Var}(X)$ el valor de β en función de m_x, se obtiene una ecuación entre α y m_x.

Eliminando ahora α y la última hallada, se obtiene la que verifican μ y m_x

Clark afirma que la determinación de la media por medio de la moda requiere gran cantidad de cálculos que incluyen la resolución de una ecuación cúbica. Por medio de una manipulación numérica empírica puede observarse, sin embargo, que los resultados se pueden aproximar mediante una fórmula relativamente sencilla.

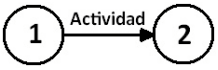
Esta manipulación consiste en hacer igual la media a una media ponderada de la moda y el semi-recorrido, siendo el peso asignado a la moda 2/3 del peso total.

En esta línea, $E(X) \approx \frac{2}{3}m_x + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{4m_x+1}{6}$

Se tiene entonces la aproximación: $\mu = E(Y) \approx \frac{a+4m+b}{6}$ $\quad \mathrm{Var}(Y) \approx \frac{(b-a)^2}{36}$

REGLAS DE LA ESTRUCTURA DE LA RED PERT

Cada actividad se debe repesentar sí y sólo sí por un ramal o arco.

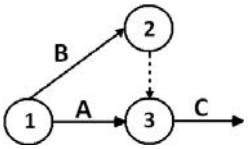


Los vértices del grafo, representados por circunferencias también llamados nodos, son los sucesos o eventos, puntos en el tiempo que marca la terminación de una o más actividades y el comienzo de otras u otras.

A estos nodos se incorporan números que indican las fechas en términos relativos. Las fechas en los nodos son:

- Número asignado a cada nodo o número de identificación de la actividad.
- T_1 = Ocurrencia temprana (Early), momento o punto en el tiempo donde se puede dar la actividad.
- T_2 = Ocurrencia tardía o más lejana (Last), momento o punto en el tiempo más tardío que puede ocurrir la actividad.
- H_t = Holgura total de que se dispone para la ocurrencia de una actividad.

Cada actividad debe estar identificada por dos nodos distintos. En el caso de existir actividades concurrentes (que se inicien al mismo tiempo, o bien que el inicio de una actividad dependa de la finalización de dos o más actividades distintas) se debe recurrir a actividades ficticias (representadas por arcos punteados que no consumen ni tiempo ni recursos).



Al no ser un procedimiento de tipo gráfico no es necesario representar los arcos con longitud proporcional a la duración de las actividades a que se asocian.

Existen dos tipos de actividades: Reales o Ficticias:

ACTIVIDADES REALES: Consume recursos, indicando una relación de precedencia. Se representa por una flecha de línea continua.

ACTIVIDADES FICTICIAS: No consume recursos pero si indica una relación de precedencia. Se representa por una línea discontinua.

Toda Red PERT/CPM tiene un nodo de inicio y un nodo de finalización.

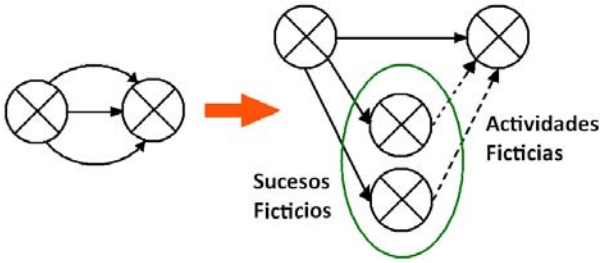
Un nodo marca dos eventos: finalización de una(s) actividad(es) y comienzo de la actividad(es) siguiente(s).

Ninguna actividad puede comenzar hasta que hayan terminado las que le preceden.

Una red no puede duplicar el número de identificación de los nodos, exceptuando casos especiales donde se manejen sub-proyectos.
El número de identifiación de un nodo sucesor no puede ser inferior al número de identificación del nodo predecesor. En consecuencia, la númeración de los nodos del proyecto se hacen de izquierda a derecha en orden ascendente.

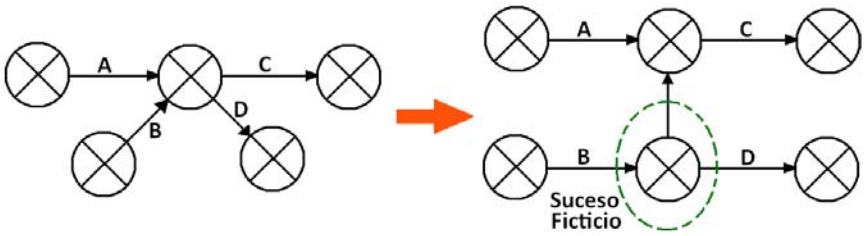
REGLAS DE CONSTRUCCIÓN DE LA RED PERT

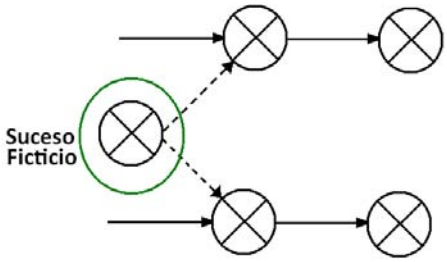
Cuando existe más de una actividad entre los mismos sucesos.



Cuando dos o más actividades tengan algunas precedentes comunes pero no todas:

A y B preceden a C
B precede a D





Restricciones de tipo potencial, se suponen para el que las fechas más temprana y más tardía coinciden y son iguales a la fecha mencionada que una actividad o más no pueden comenzar antes de una determinada fecha, lo que se indica con un suceso ficticio.

Este suceso ficticio se liga a las actividades correspondientes mediante actividades ficticias.

FASES PARA PLANIFICAR UN PROYECTO CON PERT

PASO 1: Identificar todas las actividades que intervienen en el proyecto, sus interrelaciones, sucesiones, reglas de precedencia.

Con la inclusión de cada actividad al proyecto se debe cuestionar respecto a que actividades preceden a esta y cuales siguen inmediatamente, además, deberán relacionarse los tiempos estimados para el desarrollo de cada actividad.

PASO 2: ASIGNACIÓN DE TIEMPOS A LAS ACTIVIDADES

En esta fase se produce la principal diferencia con el método CPM. La duración de una actividad no puede fijarse con exactitud. Depende de circunstancias aleatorias.

Este problema es abordado por el método PERT considerando tres estimaciones de tiempo para cada actividad:

- Tiempo optimista (a): Duración que ocurre cuando el desarrollo de la actividad transcurre de forma perfecta. En la práctica suele acudirse al tiempo récord de desarrollo de una actividad, es decir, el mínimo tiempo en que una actividad de esas características haya sido ejecutada.
- Tiempo más probable (m): Duración que ocurre cuando el desarrollo de la actividad transcurre de forma normal. En la práctica suele tomarse como el tiempo más frecuente de ejecución de una actividad de iguales características.
- Tiempo pesimista (b): Duración que ocurre cuando el desarrollo de la actividad transcurre de forma deficiente, o cuando se materializan los riesgos de ejecución de la actividad. Utilizando estas tres estimaciones, para determinar la ruta crítica del proyecto se acude al tiempo de duración promedio, también conocido como *tiempo esperado* o *tiempo Pert*.

Para una determinada actividad A será: $t_e(A) = \dfrac{a + 4m + b}{6}$

Además de calcular el tiempo estimado para una actividad, deberá calcularse la varianza de cada actividad. El cálculo de esta medida de dispersión se utiliza para determinar la *incertidumbre* de que finalize el proyecto de acuerdo con el programa.

En el algoritmo PERT el cálculo de la varianza de la actividad A viene dado por la expresión:

$$\sigma_A^2 = Var(A) = \frac{(b-a)^2}{36}$$

Determinado el tiempo esperado de todas las actividades, es posible realizar el cálculo de los tres indicadores básicos para cada actividad A_i

- Tiempo más temprano (Early) de un suceso T_1(i-ésimo nodo)

Para calcular este indicador debe recorrerse la red de izquierda a derecha, con las consideraciones:

$T_1(\text{primer nodo}) = 0$

$T_1(\text{nodo i-ésimo}) = T_1(\text{nodo anterior } i-1) + t_e(\text{actividad anterior})$

Si en un nodo finaliza más de una actividad se toma el tiempo de la actividad con mayor valor.

- Tiempo más tardío (Last) de un suceso T_2(i-ésimo nodo)

Para calcular este indicador debe recorrerse la red de izquierda a derecha, con las consideraciones:

$T_2(\text{primer nodo, de derecha a izquierda}) = T_1(\text{de este nodo})$

$T_2(\text{nodo i-ésimo}) = T_2(\text{nodo anterior } i-1) - t_e(\text{actividad anterior})$

Si en un nodo finaliza más de una actividad se toma el tiempo de la actividad con menor valor.

<u>CAMINO CRÍTICO</u>

Es el que determina la duración del proyecto y esta formado por el conjunto de actividades que determinan el camino más largo. Estas actividades tienen como característica que su holgura total es cero, se llaman actividades y sucesos críticos.

Considerando las actividades o sucesos $(1, 2, 3, \ldots, k)$, la longitud o duración del proyecto, de derecha a izquierda en el camino crítico, viene dada por la expresión: $t_e(b) = T_2(b) - T_2(a)$ en $[a-b]$

Duración del proyecto: $\mu_{PROYECTO} = t_e(1) + t_e(2) + t_e(3) + \cdots + t_e(k)$

Desviación estándar del proyecto: $\sigma^2_{PROYECTO} = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \ldots + \sigma_k^2$ $\quad \sigma_{PROYECTO} = \sqrt{\sigma^2_{PROYECTO}}$

Puede darse el caso en el que se encuentren más de una ruta crítica. En caso de que existiesen dos o más caminos críticos, se deberá utilizar la distribución con tiempos de finalización con mayor varianza.

La distribución del tiempo de finalización del proyecto, de acuerdo con el Teorema Central del Límite (TCL), sigue una distribución normal $N(\mu_{PROYECTO}, \sigma_{PROYECTO})$

Con la información obtenida se pueden efectuar cálculos probabilísticos de terminación del proyecto.

El camino crítico es el camino de longitud máxima que va desde el vértice inicio del proyecto al vértice fin del proyecto. En consecuencia, para calcular el camino crítico se pueden aplicar los algoritmos de teoría de grafos que permiten calcular el camino de máxima longitud.

Construida la red PERT cada actividad no crítica tiene asociada dos números entre paréntesis (margen libre, margen total), es decir, $(Ml = T_{1j} - T_{1i} - t_e\,,\ Mt = T_{2j} - T_{1i} - t_e)$.

Las actividades críticas (camino crítico) tienen margen total 0, con lo cual no se pueden retrasar.

Las actividades que se pueden retrasar sin que se vea afectada la duración de un proyecto serán aquellas cuya margen total sea igual o menor que el retraso indicado.

* Si la actividad B se retrasa 3 meses y su margen total es 3 meses, la finalización del proyecto no se ve modificado.
* Si la actividad C se retrasa 4 meses y su margen total es 3 meses, el proyecto se encuentra modificado en 1 mes.
* Si una actividad crítica se retrasa 3 meses, el proyecto se retrasa 3 meses. En esta línea, el camino crítico puede cambiar, hay que realizar nuevos cálculos y otro nuevo grafo de Pert.

MATRIZ DE ZADERENKO

Cuando el grafo PERT es muy grande (muchas actividades) el cálculo de los tiempos T_1 o Early y T_2 o Last puede ser muy engorroso.

Zaderenko (1968) propuso un método matricial de cálculo de tiempos T_1 y T_2 con aplicación para grafos grandes y pequeños.

Tiempo de Holgura $H = T_2 - T_1$

El tiempo de holgura es la diferencia entre el tiempo más tardío y el tiempo más temprano de un suceso. En unidades de tiempo corresponde al valor que puede tardar la ocurrencia de un suceso.

Las actividades críticas constituyen la ruta más larga que abarca el proyecto, esto es, la suma de las actividades críticas de una ruta crítica determinará la duración estimada del proyecto.

DIAGRAMA DE GANTT

El cronograma de barras o gráficos de Gantt es una herramienta gráfica cuyo objetivo es exponer el tiempo de dedicación previsto para diferentes tareas o actividades a lo largo de un tiempo total determinado.

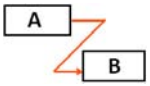
El diagrama permite seguir el curso de cada actividad, al porporcionar información del porcentaje ejecutado en cada una de ellas, así como el grado de adelanto o retraso con respecto al plazo previsto. A pesar de esto, no indica las relaciones existentes entre actividades.

El diagrama de Gantt consiste en una representación gráfica sobre dos ejes, en el vértical se disponen las actividades del proyecto y en el horizontal se representa el tiempo, con las siguientes características:

- Cada actividad se representa mediante un bloque rectangular cuya longitud indica su duración, la altura carece de significado.
- La posición de cada bloque en el diagrama indica los instantes de inicio y finalización de las actividades a que corresponden.
- Los bloques correspondientes a las actividades del camino crítico acostumbran a rellenarse en otro color diferente.

PASOS EN LA CONSTRUCCIÓN DIAGRAMA DE GANTT

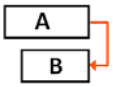
- Se dibujan los ejes horizontal y vertical.
- Se anotan los nombres de las actividades sobre el eje vertical.
- En primer lugar se dibujan los bloques correspondientes a las actividades que no tienen predecesoras, situandolas demanera qe el lado izquierdo de los bloques coincida eon el instante cero del proyecto (su inicio).
- A continuación, se dibujan los bloques correspondientes a las actividades que solo dependen de las actividades ya introducidas en el diagrama.



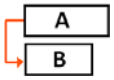
El proceso se repite hasta haber dibujado todas las actividades, con las consideraciones siguientes:

Dependencia final-inicio: Se representan alineando el final del bloque de la actividad predecesora con el inicio del bloque de la actividad dependiente.

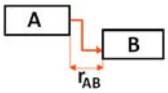
Dependencia final-final: Se representan alineando los finales de cada bloque de las actividades predecesora y dependiente.



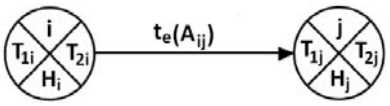
Dependencia inicio-inicio: Se representan alineando los inicios de los bloques de las actividades predecesora y dependiente.



Retardos: Los retardos se representan desplazando la actividad dependiente hacia la derecha en el caso de retardos positivos y hacia la izquierda cuando los retardos son negativos.

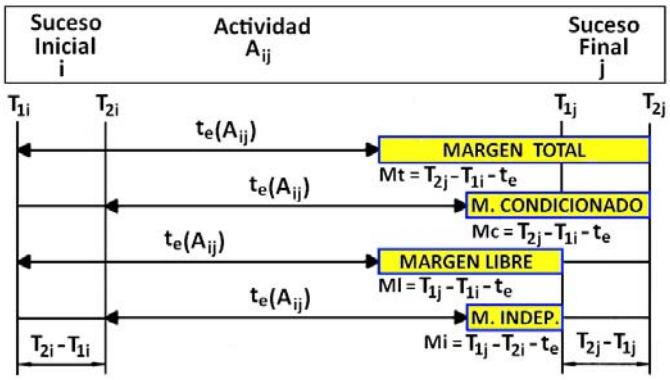


Construida la red PERT cada actividad no crítica tiene asociada dos números entre paréntesis (margen libre, margen total), es decir, $(Ml = T_{1j} - T_{1i} - t_e\,,\ Mt = T_{2j} - T_{1i} - t_e)$. Las actividades críticas no llevan nada porque sus márgenes son nulos.



Se denomina margen de una actividad al exceso de tiempo disponible para realizar dicha actividad con relación al tiempo previsto de ejecución para la misma.

En el gráfico de Gantt cada actividad lleva asociada una barra de longitud igual a su duración, representando al final de cada una de ellas dos barritas que representan el margen libre de la actividad $Ml = T_{1j} - T_{1i} - t_e$ (barrita superior) y el margen total de la actividad $Mt = T_{2j} - T_{1i} - t_e$ (barrita inferior). Las actividades críticas no tienen estas dos barritas.



MÉTODO CPM - RUTA CRÍTICA

El método CPM (Critical Path Method) es frecuentemente utilizado en el desarrollo y control de proyectos. El objetivo principal es determinar la duración de un proyecto, entendiendo éste como una secuencia de actividades relacionadas entre sí, donde cada una de las actividades tiene una duración estimada.

La realización de cualquier proyecto lleva dos costes: Los directos que provienen de factores directamente imputables a cada tarea (coste del equipo, materias primas, horas de máquina, horas de hombres, etc.), y los indirectos que son imputables mediante claves de distribución (gastos generales, multas, supervisión, etc.).

Las versiones originales de los métodos PERT Y CPM se diferencian en dos aspectos importanes:

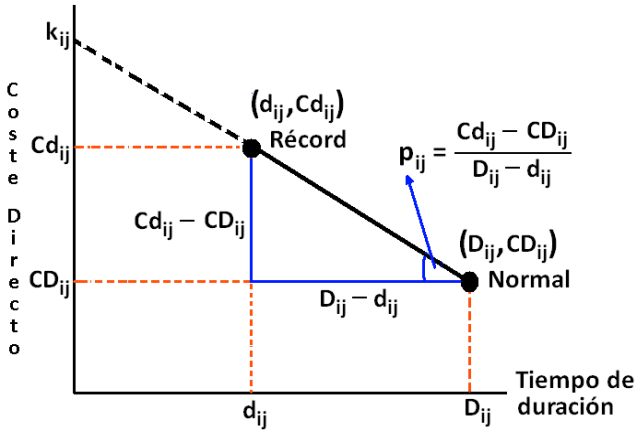
- El método PERT supone que los tiempos de ejecución son probabilísticos, mientras que el método CPM supone que las actividades son determinísticas.
- El método CPM asigna la misma importancia al tiempo y al coste.

ESTRUCTURA DEL PROBLEMA CPM

El objetivo fundamental de la técnica CPM es determinar el cambio entre tiempo y coste que debe emplearse en cada actividad, para cumplir con el tiempo de finalización del proyecto programado a un coste mínimo.

Los costes directos de una actividad suelen estar relacionados inversamente con su duración.

Cuando se reduce la duración de una actividad (i, j) a partir de un punto (D_{ij}, CD_{ij}) llega un momento en el que resulta imposible disminuirla por debajo de un cierto valor d_{ij} denominado duración récord.



El punto (d_{ij}, Cd_{ij}) poporciona el tiempo y el coste necesarios cuando se realiza la actividad de forma intensiva, es decir, se acelera completamente sin reparar en costes.

Al aumentar la actividad llega un momento D_{ij} en que los costes dejan de disminuir, esta duración se denomina normal.

El punto determinado (D_{ij}, CD_{ij}) porporciona el coste y tiempo necesarios cuando la actividad se realiza de forma normal, sin recurrir a costes adicionales (horas extra, materiales especiales, etc.) para acelerar la actividad.

Las variables de decisión: $x_{ij} \equiv$ tiempo de duración de la actividad (i, j)

Naturalmente, cuando es necesario acortar la duración de un proyecto, se desea hacerlo con el mínimo coste posible. Se hace necesario calcular las pendientes de coste de todas las actividades.

Las pendientes de coste representan el incremento de coste directo producido al reducir la duración del proyecto en una unidad de tiempo.

Incremento coste directo: $p_{ij} = \dfrac{Cd_{ij} - CD_{ij}}{D_{ij} - d_{ij}}$ pendiente coste actividad (i, j)

Para cada actividad (i, j) : $\begin{cases} CD_{ij} \equiv \text{Coste directo normal} & D_{ij} \equiv \text{Tiempo normal} \\ Cd_{ij} \equiv \text{Coste directo récord} & d_{ij} \equiv \text{Tiempo récord} \end{cases}$

FORMULACIÓN DEL PROBLEMA CPM MEDIANTE PROGRAMACIÓN LINEAL

Durante un tiempo máximo T de finalización del proyecto, se dben determinar las duraciones x_{ij} que minimizen el coste total.

Para tener en cuenta la finalización del proyecto se necesita una variable para cada suceso:

$y_i \equiv$ Tiempo más temprano (desconocido) del suceso i-ésimo.

Designando por k_{ij} la ordenada en el origen de la actividad (i, j), el coste directo total del proyecto será: $CD\,(T) = \sum_{i,j} (k_{ij} - p_{ij} . x_{ij})$

El problema queda reducido a: $\text{Max } z = \sum_{i,j} - p_{ij} . x_{ij}$

Sujeto a las restricciones: $\begin{cases} x_{ij} \geq d_{ij} \\ x_{ij} \leq D_{ij} \\ y_i + x_{ij} - y_j \leq 0 \\ y_n \leq T \\ x_{ij} \geq 0 \quad y_i \geq 0 \end{cases}$

Una vez obtenida la solución para diversos valores de T, será preciso combinar los resultados obtenidos, con los costes indirectos para determinar el valor óptimo de T.

PROYECTOS M.C.E.

La programación de proyectos a coste mínimo (M.C.E.) surge como prolongación del Método del Camino Crítico (C.P.M.) al analizar la relación que existe entre la duración de una actividad y el coste necesario para realizarla.

El método M.C.E. estudia las diferentes actividades en que se desarrolla un proyecto, considerando para cada una de ellas un intervalo de tiempo comprendido entre un tiempo normal y un tiempo tope (récord). Cada uno de estos tiempos se refiere a un nivel de utilización de recursos.

Puesto que cada actividad tiene una duración entre el tiempo normal y el tiempo tope, la duración total del proyecto también estará comprendida en un intervalo (tiempo máximo y tiempo mínimo).

A diferencia del método PERT, se considera que la duración de cada actividad no es una cantidad fija, que sólo puede variar por circunstancias aleatorias, sino que, por el contrario, la duración de cada actividad varía de acuerdo con el nivel de utilización de recursos. En consecuencia, a cada nivel de recursos le corresponde una duración determinada para cada actividad.

La resolución del método M.C.E. da lugar a un problema de programación lineal paramétrica. Debido a lo complicado que puede resultar éste proceso operativo, se utiliza algún algoritmo específico (algoritmo de Ackoff y Sasieni).

ALGORITMO DE ACKOFF – SASIENI: MICROCOMPUTADORAS

PASO 1: Construir una matriz cuyas filas representen las diferentes rutas existentes de comienzo a fin del proyecto y, por columnas las diferentes actividades que componen el proyecto.
Cada elemento (i, j) de la matriz, representará la pendiente de coste de la actividad que ocupa la columna j-ésima siempre y cuando pertenezca a la ruta de la fila i-ésima; en otro caso se deja en blanco.
Se requiere que la matriz tenga tantas columnas como pendientes de coste posea.

PASO 2: Se amplía la matriz obtenida con una columna cuyos elementos representen las duraciones de las respectivas rutas, y una fila cuyos elementos indiquen la diferencia entre las duraciones normal y récord de cada actividad (acortamiento posible).

PASO 3: Se selecciona la actividad de menor pendiente en cada de las rutas críticas del proyecto (caso de existir varias) y se determina el tiempo de acortamiento.

Para ello se calcula el mínimo de las cantidades:

- Acortamiento máximo de las actividades sin que cambie su pendiente.
- Diferencia entre la duración de la ruta crítica y del primer subcrítico.

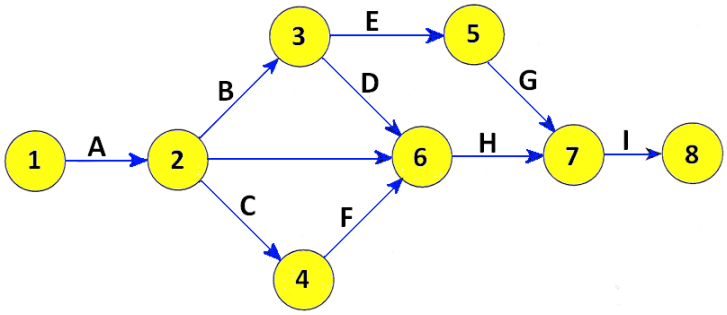
PASO 4: Una vez calculado el tiempo de acortamiento, se determina el incremento en el coste directo y el coste indirecto para la duración resultante. Se calcula el coste total y se amplia la matriz con una nueva columna, que represente las nuevas duraciones de las rutas y una fila para mostrar los nuevos acortamientos posibles.
El algoritmo continúa hasta encontrar una ruta crítica irreducible.

Una cadena de tiendas desea adquirir un ordenador que permita llevar la contabilidad y realizar el control de inventarios. Una firma informática presenta un proyecto en días con el correspondiente grafo al Jefe de Markenting de las tiendas.

Actividad	Tiempo optimista (a)	Tiempo más probable (m)	Tiempo pesimista (b)
(A) Selección del modelo	4	6	8
(B) Sistema de entrada/salida	5	7	15
(C) Diseño del sistema	4	8	12
(D) Montaje	15	20	25
(E) Programas	10	18	26
(F) Rutinas de entrada/salida	8	9	16
(G) Bases de datos	4	8	12
(H) Instalación	1	2	3
(I) Test	6	7	8

(a) Calcular el camino crítico y duración esperada del proyecto
(b) Determinar la probabilidad de finalizar el proyecto a los sumo en 55 días

Red del proyecto:



Se calcula el tiempo esperado y varianza de cada actividad en cada intervalo $[a, b]$:

$$t_e(A) = \frac{a+4m+b}{6} = \frac{4+4 \times 6+8}{6} = 6 \qquad \sigma_A^2 = Var(A) = \frac{(8-4)^2}{36} = 0,44$$

$$t_e(B) = \frac{a+4m+b}{6} = \frac{5+4 \times 7+15}{6} = 8 \qquad \sigma_B^2 = Var(B) = \frac{(15-5)^2}{36} = 2,78$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$t_e(F) = \frac{a+4m+b}{6} = \frac{8+4 \times 9+16}{6} = 10 \qquad \sigma_F^2 = Var(F) = \frac{(16-8)^2}{36} = 1,78$$

Actividad	Tiempo optimista (a)	Tiempo más probable (m)	Tiempo pesimista (b)	Tiempo esperado (t_e)	Varianza (Var)
A	4	6	8	6	0,44
B	5	7	15	8	2,78
C	4	8	12	8	1,78
D	15	20	25	20	2,78
E	10	18	26	18	7,11
F	8	9	16	10	1,78
G	4	8	12	8	1,78
H	1	2	3	2	0,11
I	6	7	8	7	0,11

Se determinan los tiempos más tempranos y tardíos de cada suceso, así como la holgura total de cada actividad.

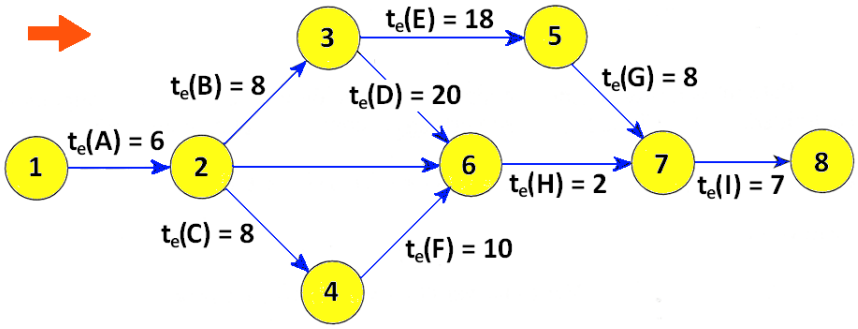
- Tiempo más temprano de un suceso T_1(i-ésimo nodo)

Para calcular este indicador debe recorrerse la red de izquierda a derecha, con las siguientes consideraciones:

$T_1(\text{primer nodo}) = 0$

$T_1(\text{nodo i-ésimo}) = T_1(\text{nodo anterior } i-1) + t_e(\text{actividad anterior})$

Si en un nodo finaliza más de una actividad, se toma el tiempo de la actividad con mayor valor.



$T_1(1) = 0 \quad T_1(2) = T_1(1) + t_e(A) = 0 + 6 = 6$

$T_1(3) = T_1(2) + t_e(B) = 6 + 8 = 14$

$T_1(4) = T_1(2) + t_e(C) = 6 + 8 = 14$

$T_1(6) = T_1(3) + t_e(D) = 14 + 20 = 34 \quad T_1(6) = T_1(4) + t_e(F) = 14 + 10 = 34 \quad \max T_1(6) = 34$

$T_1(5) = T_1(3) + t_e(E) = 14 + 18 = 32$

$T_1(7) = T_1(6) + t_e(H) = 34 + 2 = 36 \quad T_1(7) = T_1(5) + t_e(G) = 32 + 8 = 40$

$T_1(8) = T_1(7) + t_e(I) = 40 + 7 = 47$

Para el cálculo de T_1 en todo nodo, si concurre la finalización de dos o más actividades, se debe tomar el mayor valor.

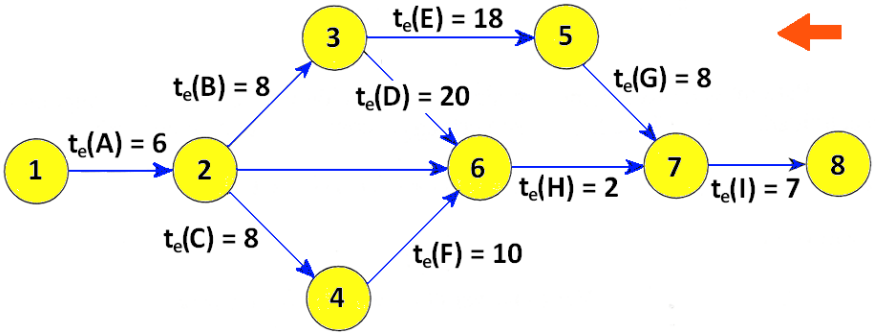
- Tiempo más tardío de realización de un suceso T_2 (i-ésimo nodo)

Para calcular este indicador debe recorrerse la red de derecha a izquierda, con las siguientes consideraciones:

T_2 (primer nodo, de derecha a izquierda) = T_1 (de este nodo)

T_2 (nodo i-ésimo) = T_2 (nodo anterior i – 1) – t_e (actividad anterior)

Si en un nodo finaliza más de una actividad, se toma el tiempo de la actividad con menor valor.



$T_2(8) = T_1(8) = 47$

$T_2(7) = T_2(8) - t_e(I) = 47 - 7 = 40$

$T_2(6) = T_2(7) - t_e(H) = 40 - 2 = 38$

$T_2(5) = T_2(7) - t_e(G) = 40 - 8 = 32$

$T_2(4) = T_2(6) - t_e(F) = 38 - 10 = 28$

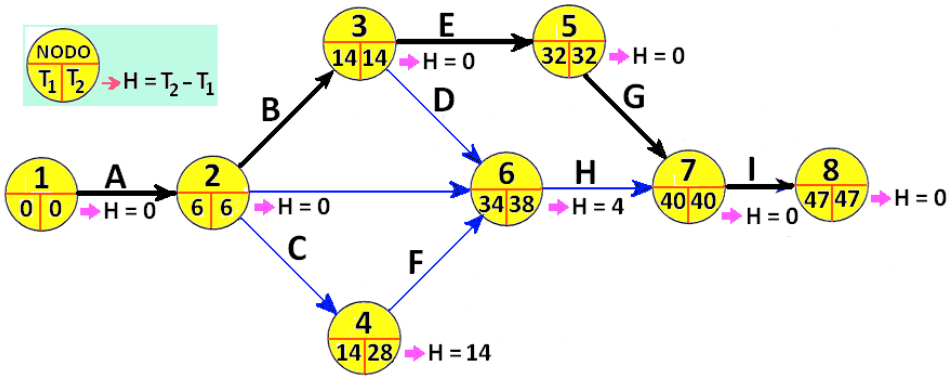
$T_2(3) = T_2(5) - t_e(E) = 32 - 18 = 14$ $\quad T_2(3) = T_2(6) - t_e(D) = 38 - 20 = 18$ $\quad \min T_2(3) = 14$

$T_2(2) = T_2(3) - t_e(B) = 14 - 8 = 6$ $\quad T_2(2) = T_2(4) - t_e(C) = 28 - 8 = 20$ $\quad \min T_2(2) = 6$

$T_2(1) = T_2(2) - t_e(A) = 6 - 6 = 0$

- Tiempo de Holgura $H = T_2 - T_1$

El tiempo de holgura es la diferencia entre el tiempo más tardío y el tiempo más temprano de un suceso. En unidades de tiempo corresponde al valor que puede tardar la ocurrencia de un suceso.



La ruta crítica corresponde a los sucesos con holgura cero, es decir, la ruta crítica está formada por la ocurrencia de sucesos en los que no puede retrarse un día respecto al cronograma establecido, en otro caso se retrasaría la finalización del proyecto.

La ruta crítica es 1 - 2 - 3 - 5 - 7 - 8, formada por las actividades A, B, E, G, I con holgura total cero.

Considerando las actividades que comprende la ruta crítica:

Duración del proyecto: $\mu_{PROYECTO} = t_e(2) + t_e(3) + t_e(5) + t_e(7) + t_e(8) = 6 + 8 + 18 + 8 + 7 = 47$ días

Varianza y desviación estándar del proyecto, respectivamente:

$$\sigma^2_{PROYECTO} = \sigma^2_2 + \sigma^2_3 + \sigma^2_5 + \sigma^2_7 + \sigma^2_8 = 0,44 + 2,78 + 7,11 + 1,78 + 0,11 = 12,22 \text{ días}^2$$

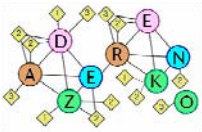
$$\sigma_{PROYECTO} = \sqrt{12,22} = 3,496 \text{ días}$$

En caso de que existiesen dos o más caminos críticos, se deberá utilizar la distribución con tiempos de finalización con mayor varianza.

La distribución del tiempo de finalización del proyecto, de acuerdo con el Teorema Central del Límite (TCL), sigue una distribución normal $N(47, 3,496)$

$$P(X \leq 55) = P\left[\frac{X-47}{3,496} \leq \frac{55-47}{3,496}\right] = P(z \leq 2,29) = 0,9889$$

Se termina el proyecto en 55 días como mucho en un 98,89% de los casos.



Un grupo empresarial se encarga de levantar un complejo de chalets adosados. El proyecto se compone de las siguientes actividades expresadas en semanas:

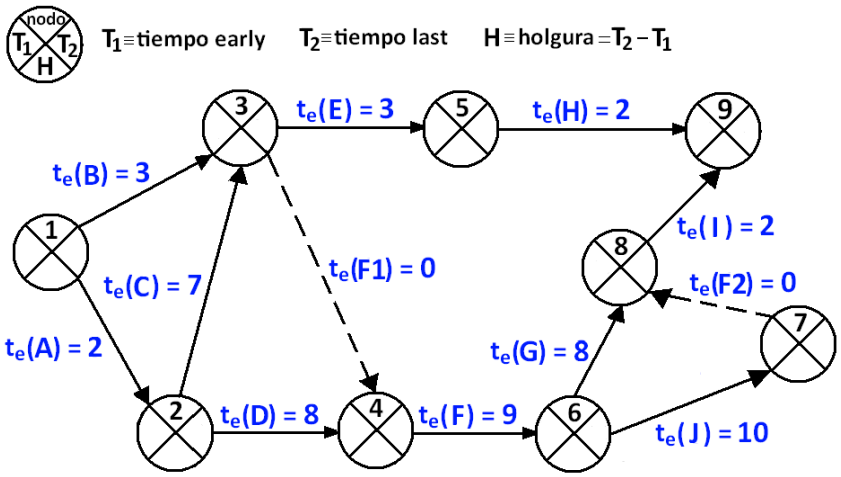
Actividad	Actividad Precedente	Actividad Siguiente	Tiempo optimista (a)	Tiempo más probable (m)	Tiempo pesimista (b)
A	----	C , D	1	2	3
B	----	E , F	1	2	9
C	A	E , F	4	7	10
D	A	F	2	8	14
E	B , C	H	1	2	9
F	B , C , D	G , J	5	8	17
G	F	I	4	7	16
H	E	----	0	2	4
I	G , J	----	2	2	2
J	F	I	7	9	17

Calcular la matriz de Zaderenko

Se calcula el tiempo esperado (tiempo Pert) de cada actividad $t_e(A) = \frac{a+4m+b}{6}$ en cada intervalo.

$$t_e(A) = \frac{a+4m+b}{6} = \frac{1+4 \times 2+3}{6} = 2 \qquad t_e(B) = \frac{a+4m+b}{6} = \frac{1+4 \times 2+9}{6} = 3$$

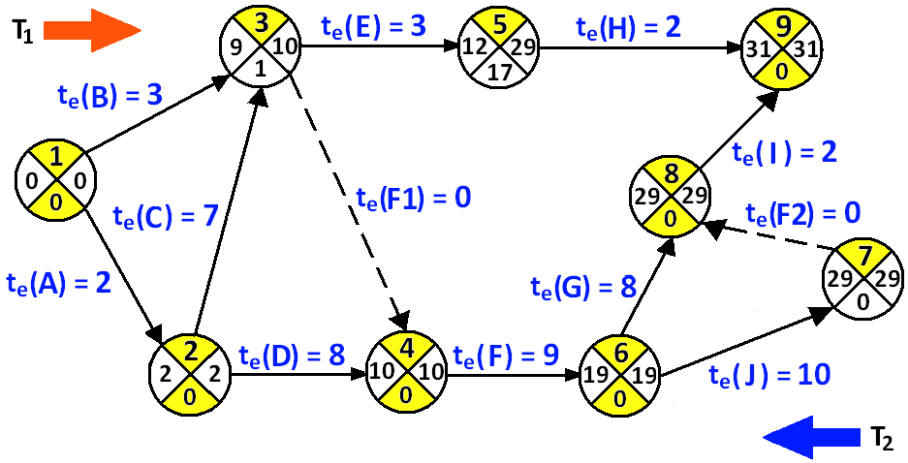
$$t_e(C) = \frac{a+4m+b}{6} = \frac{4+4 \times 7+10}{6} = 7 \qquad \cdots \qquad t_e(J) = \frac{a+4m+b}{6} = \frac{7+4 \times 9+17}{6} = 10$$



La matriz de Zaderenko se elabora con las duraciones de las actividades. Comienza rellenado la columna de las actividades T_1 (Tiempo más temprano de un suceso, Early) , de derecha a izquierda.

Después, se rellena la fila T_2 (Tiempo más tardío de realización de un suceso, Last) , de izquierda a derecha.

MATRIZ DE ZADERENKO: Comienza rellenado la columna de las actividades T_1 (Tiempo más temprano de un suceso, Early).



PRIMERA ACTIVIDAD: El primer tiempo T_1 es cero.

SEGUNDA ACTIVIDAD: Para calcular el segundo elemento T_1 se elige la columna (2) del elemento que se esta calculando y para cada celda con valor se realiza el cálculo:
T_1 + duración de la actividad $= 0 + 2 = 2$

	T_1	t_e	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	0	1	*	2	3						
$0+2=2$	2	2		*	7	8					
		3			*	0	3				
		4				*		9			
		5					*				2
		6						*	10	8	
		7							*	0	
		8								*	2
		9									*
		T_2									

TERCERA ACTIVIDAD: Para calcular el tercer elemento T_1 se elige la columna (3) del elemento que se calcula, observando las celdas que tienen valor se tienen dos tiempos, y se realiza el cálculo:
T_1 + duración de la actividad $= 0 + 3 = 3$
T_1 + duración de la actividad $= 2 + 7 = 9$
Se introduce el tiempo mayor que es 9

	T_1	t_e	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	0	1	*	2	3						
$0+2=2$	2	2		*	7	8					
$0+3=3$ $2+7=9$	9	3			*	0	3				
		4				*		9			
		5					*				2
		6						*	10	8	
		7							*	0	
		8								*	2
		9									*
		T_2									

CUARTA ACTIVIDAD: Para calcular el cuarto elemento de T_1 se elige la columna (4) del elemento que se calcula, hay dos celdas que tienen valor, se introduce el mayor tiempo: T_1 + duración de la actividad $=2+8=10$

	T_1	t_e	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	0	1	*	2	3						
$0+2=2$	2	2		*	7	8					
$0+3=3$ $2+7=9$	9	3			*	0	3				
$2+8=10$ $9+0=9$	10	4				*		9			
		5					*				2
		6						*	10	8	
		7							*	0	
		8								*	2
		9									*
		T_2									

QUINTA ACTIVIDAD: Para calcular el quinto elemento de T_1 se elige la columna (5) del elemento que se calcula, hay una celda que tiene valor, se realiza el cálculo:
T_1 + duración de la actividad $=9+3=12$

	T_1	t_e	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	0	1	*	2	3						
$0+2=2$	2	2		*	7	8					
$0+3=3$ $2+7=9$	9	3			*	0	3				
$2+8=10$ $9+0=9$	10	4				*		9			
$9+3=12$	12	5					*				2
		6						*	10	8	
		7							*	0	
		8								*	2
		9									*
		T_2									

SEXTA ACTIVIDAD: Para calcular el sexto elemento de T_1 se elige la columna (6) del elemento que se calcula, hay solo una celda tiene valor, se realiza el cálculo:
T_1 + duración de la actividad $=10+9=19$

	T_1	t_e	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	0	1	*	2	3						
$0+2=2$	2	2		*	7	8					
$0+3=3$ $2+7=9$	9	3			*	0	3				
$2+8=10$ $9+0=9$	10	4				*		9			
$9+3=12$	12	5					*				2
$10+9=19$	19	6						*	10	8	
		7							*	0	
		8								*	2
		9									*
		T_2									

SÉPTIMA ACTIVIDAD: Para calcular el séptimo elemento de T_1 se elige la columna (7) del elemento que se calcula, hay una celda que tiene valor, se realiza el cálculo:
T_1 + duración de la actividad $=19+10=29$

	T_1	t_e	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	0	1	*	2	3						
$0+2=2$	2	2		*	7	8					
$0+3=3$ $2+7=9$	9	3			*	0	3				
$2+8=10$ $9+0=9$	10	4				*		9			
$9+3=12$	12	5					*				2
$10+9=19$	19	6						*	10	8	
$19+10=29$	29	7							*	0	
		8								*	2
		9									*
		T_2									

OCTAVA ACTIVIDAD: Para calcular el séptimo elemento de T_1 se elige la columna (8) del elemento que se calcula, hay dos celdas que tienen valor, se introduce el mayor tiempo:
T_1 + duración de la actividad $=29+0=29$

	T_1	t_e	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	0	1	*	2	3						
$0+2=2$	2	2		*	7	8					
$0+3=3$ $2+7=9$	9	3			*	0	3				
$2+8=10$ $9+0=9$	10	4				*		9			
$9+3=12$	12	5					*				2
$10+9=19$	19	6						*	10	8	
$19+10=29$	29	7							*	0	
$19+8=27$ $29+0=29$	29	8								*	2
		9									*
		T_2									

NOVENA ACTIVIDAD: Para calcular el séptimo elemento de T_1 se elige la columna (9) del elemento que se calcula, hay dos celdas que tienen valor, se introduce el mayor tiempo:
T_1 + duración de la actividad $=29+2=31$

	T_1	t_e	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	0	1	*	2	3						
$0+2=2$	2	2		*	7	8					
$0+3=3$ $2+7=9$	9	3			*	0	3				
$2+8=10$ $9+0=9$	10	4				*		9			
$9+3=12$	12	5					*				2
$10+9=19$	19	6						*	10	8	
$19+10=29$	29	7							*	0	
$19+8=27$ $29+0=29$	29	8								*	2
$12+2=14$ $29+2=31$	31	9									*
		T_2									

- Se completa la matriz de Zaderenko calculando T_2 (Tiempo más tardío de realización de un suceso, Last) de izquierda a derecha. Se elige el menor valor.

FILA 9: Se copia el último tiempo T_1

	T_1	t_e	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$1\rightarrow$	0	1	*	2	3						
$2\rightarrow$	2	2		*	7	8					
$3\rightarrow$	9	3			*	0	3				
$4\rightarrow$	10	4				*		9			
$5\rightarrow$	12	5					*				2
$6\rightarrow$	19	6						*	10	8	
$7\rightarrow$	29	7							*	0	
$8\rightarrow$	29	8								*	2
$9\rightarrow$	31	9									*
		T_2									31

FILA 8: La actividad 9 tiene el valor 2, siendo: $31-2=29$

	T_1	t_e	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1→	0	1	*	2	3						
2→	2	2		*	7	8					
3→	9	3			*	0	3				
4→	10	4				*		9			
5→	12	5					*				2
6→	19	6						*	10	8	
7→	29	7							*	0	
8→	29	8								*	2
9→	31	9									*
		T_2								29	31

FILA 7: La actividad 8 tiene el valor 0, siendo: $29 - 0 = 29$

	T_1	t_e	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1→	0	1	*	2	3						
2→	2	2		*	7	8					
3→	9	3			*	0	3				
4→	10	4				*		9			
5→	12	5					*				2
6→	19	6						*	10	8	
7→	29	7							*	0	
8→	29	8								*	2
9→	31	9									*
		T_2							29	29	31

FILA 6: Hay dos actividades (actividad 8 y actividad 7), se elige la menor.
Menor $(29 - 8 = 21 \;,\; 29 - 10 = 19) \rightarrow 19$

	T_1	t_e	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1→	0	1	*	2	3						
2→	2	2		*	7	8					
3→	9	3			*	0	3				
4→	10	4				*		9			
5→	12	5					*				2
6→	19	6						*	10	8	
7→	29	7							*	0	
8→	29	8								*	2
9→	31	9									*
		T_2						19	29	29	31

FILA 5: La actividad 9 tiene el valor 2, siendo: $31 - 2 = 29$

	T_1	t_e	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1→	0	1	*	2	3						
2→	2	2		*	7	8					
3→	9	3			*	0	3				
4→	10	4				*		9			
5→	12	5					*				2
6→	19	6						*	10	8	
7→	29	7							*	0	
8→	29	8								*	2
9→	31	9									*
		T_2					29	19	29	29	31

FILA 4: La actividad 6 tiene el valor 9, siendo: $19 - 9 = 10$

	T_1	t_e	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1→	0	1	*	2	3						
2→	2	2		*	7	8					
3→	9	3			*	0	3				
4→	10	4				*		9			
5→	12	5					*				2
6→	19	6						*	10	8	
7→	29	7							*	0	
8→	29	8								*	2
9→	31	9									*
		T_2				10	29	19	29	29	31

FILA 3: Hay dos actividades (actividad 5 y actividad 6), se elige la menor.
Menor $(29-3=26\ ,\ \ 10-0=10)\ \rightarrow\ 10$

	T_1	t_e	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1→	0	1	*	2	3						
2→	2	2		*	7	8					
3→	9	3			*	0	3				
4→	10	4				*		9			
5→	12	5					*				2
6→	19	6						*	10	8	
7→	29	7							*	0	
8→	29	8								*	2
9→	31	9									*
		T_2			10	10	29	19	29	29	31

FILA 2: Hay dos actividades (actividad 3 y actividad 4), se elige la menor.
Menor $(10-8=2\ ,\ \ 10-7=3)\ \rightarrow\ 2$

	T_1	t_e	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1→	0	1	*	2	3						
2→	2	2		*	7	8					
3→	9	3			*	0	3				
4→	10	4				*		9			
5→	12	5					*				2
6→	19	6						*	10	8	
7→	29	7							*	0	
8→	29	8								*	2
9→	31	9									*
		T_2		2	10	10	29	19	29	29	31

FILA 1: Hay dos actividades (actividad 2 y actividad 3), se elige la menor.
Menor $(10-3=7\ ,\quad 2-2=0)\ \rightarrow\ 0$

	T_1	t_e	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1→	0	1	*	2	3						
2→	2	2		*	7	8					
3→	9	3			*	0	3				
4→	10	4				*		9			
5→	12	5					*				2
6→	19	6						*	10	8	
7→	29	7							*	0	
8→	29	8								*	2
9→	31	9									*
		T_2	0	2	10	10	29	19	29	29	31

Una compañía se encarga de la construcción de dos tipos de invernaderos (de malla o de plástico y de plancha). Habiendo definido las actividades en semanas, se tiene:

Actividad	Tiempo optimista (a)	Tiempo más probable (m)	Tiempo pesimista (b)	Actividad Precedente
A	1	2	9	-----
B	4	7	10	-----
C	2	8	14	B
D	1	2	9	A , B
E	4	7	16	C
F	5	8	17	C
G	0	3	6	D
H	2	2	2	E , F

(a) Calcular el camino crítico y duración esperada del proyecto. Determinar la probabilidad de finalizar el proyecto a lo sumo en 29 semanas.

(b) Matriz de Zaderenko.

(a) Se calcula el tiempo esperado y varianza de cada actividad en cada intervalo $[a, b]$:

$$t_e(A) = \frac{a+4m+b}{6} = \frac{1+4 \times 2+9}{6} = 3 \qquad \sigma_A^2 = Var(A) = \frac{(9-1)^2}{36} = 1{,}78$$

$$t_e(C) = \frac{a+4m+b}{6} = \frac{2+4 \times 8+14}{6} = 8 \qquad \sigma_C^2 = Var(C) = \frac{(14-2)^2}{36} = 4$$

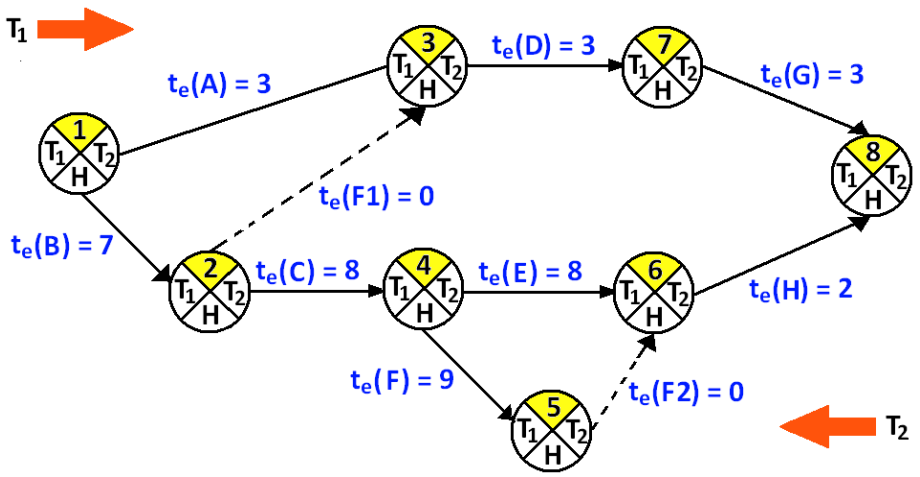
$$t_e(C) = \frac{a+4m+b}{6} = \frac{2+4 \times 8+14}{6} = 8 \qquad \sigma_C^2 = Var(C) = \frac{(14-2)^2}{36} = 4$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$t_e(H) = \frac{a+4m+b}{6} = \frac{2+4 \times 2+2}{6} = 2 \qquad \sigma_H^2 = Var(H) = \frac{(2-2)^2}{36} = 0$$

Actividad	Tiempo optimista (a)	Tiempo más probable (m)	Tiempo pesimista (b)	Tiempo esperado (t_e)	Varianza (Var)
A	1	2	9	3	1,78
B	4	7	10	7	1
C	2	8	14	8	4
D	1	2	9	3	1,78
E	4	7	16	8	4
F	5	8	17	9	4
G	0	3	6	3	1
H	2	2	2	2	0

A partir del cuadro de prelaciones y del tiempo esperado (tiempo Pert) se puede construir la red PERT, colocando sobre cada arco una letra que designa la actividad correspondiente, así como el tiempo esperado t_e asociado a cada una de las actividades.



En la red se procede al cálculo de los tiempos más temprano (T_1, Early) y más tardío (T_2, Last) de la realización de un suceso.

- Tiempo más temprano (Early) de un suceso T_1 (i-ésimo nodo) . Para calcular este indicador debe recorrerse la red de izquierda a derecha.

$T_1(1) = 0 \quad T_1(2) = T_1(1) + t_e(B) = 0 + 7 = 7$

$T_1(3) = T_1(1) + t_e(A) = 0 + 3 = 3 \quad T_1(3) = T_1(2) + t_e(F1) = 7 + 0 = 7 \quad \max T_1(3) = 7$

$T_1(4) = T_1(2) + t_e(C) = 7 + 8 = 15$

$T_1(5) = T_1(4) + t_e(F) = 15 + 9 = 24$

$T_1(6) = T_1(4) + t_e(E) = 15 + 8 = 23 \quad T_1(6) = T_1(4) + t_e(F) = 15 + 8 = 24 \quad \max T_1(6) = 24$

$T_1(7) = T_1(3) + t_e(D) = 7 + 3 = 10$

$T_1(8) = T_1(7) + t_e(G) = 10 + 3 = 13 \quad T_1(8) = T_1(6) + t_e(H) = 24 + 2 = 26 \quad \max T_1(8) = 26$

- Tiempo más tardío (Last) de realización de un suceso T_2 (i-ésimo nodo) . Para calcular este indicador debe recorrerse la red de derecha a izquierda.

$T_2(8) = T_1(8) = 26$

$T_2(7) = T_2(8) - t_e(G) = 26 - 3 = 23$

$T_2(6) = T_2(8) - t_e(H) = 26 - 2 = 24$

$T_2(5) = T_2(6) - t_e(F2) = 24 - 0 = 24$

$T_2(4) = T_2(5) - t_e(F) = 24 - 9 = 15 \quad T_2(4) = T_2(6) - t_e(E) = 24 - 8 = 16 \quad \min T_2(4) = 15$

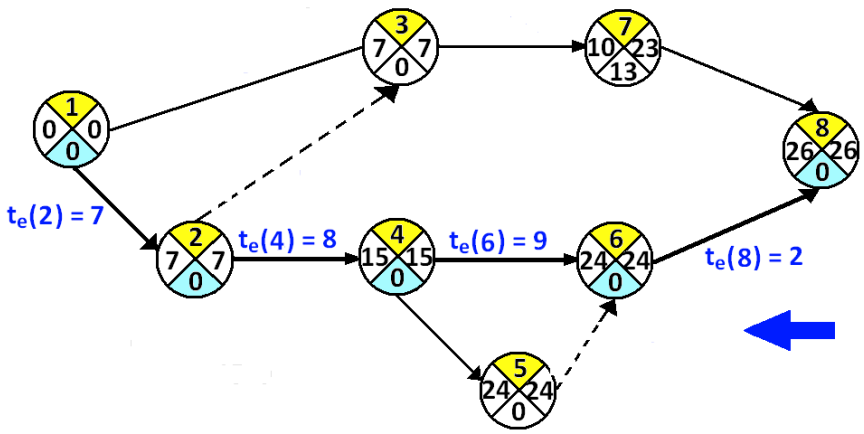
$T_2(2) = T_2(4) - t_e(C) = 15 - 8 = 7$

$T_2(3) = T_2(7) - t_e(D) = 23 - 3 = 20 \quad T_2(3) = T_2(2) - t_e(F1) = 7 - 0 = 7 \quad \min T_2(3) = 7$

$T_2(1) = T_2(2) - t_e(B) = 7 - 7 = 0 \quad T_2(1) = T_2(3) - t_e(A) = 7 - 3 = 4 \quad \min T_2(1) = 0$

- Tiempo de Holgura $H = T_2 - T_1$

El tiempo de holgura es la diferencia entre el tiempo más tardío y el tiempo más temprano de un suceso. En unidades de tiempo corresponde al valor que puede tardar la ocurrencia de un suceso.



- CAMINO CRÍTICO: 1 - 2 - 4 - 6 - 8 formado por las actividades B, C, E, H

La longitud o duración del proyecto, de derecha a izquierda, en el camino crítico:
$t_e(b) = T_2(b) - T_2(a)$ en $[a - b]$

Duración del proyecto: $\mu_{PROYECTO} = t_e(2) + t_e(4) + t_e(6) + t_e(8) = 7 + 8 + 9 + 2 = 26$ semanas

Varianza y desviación estándar del proyecto, respectivamente:

$\sigma^2_{PROYECTO} = \sigma^2_2 + \sigma^2_4 + \sigma^2_6 + \sigma^2_8 = 1 + 4 + 4 + 0 = 9$ semanas^2

$\sigma_{PROYECTO} = \sqrt{9} = 3$ semanas

La distribución del tiempo de finalización del proyecto, de acuerdo con el Teorema Central del Límite (TCL), sigue una distribución normal N(26, 3)

$$P(X \le 29) = P\left[\frac{X-26}{3} \le \frac{29-26}{3}\right] = P(z \le 1) = 0{,}8413$$

Se termina el proyecto en 29 semanas como mucho en un 84,13% de los casos.

(b) Matriz de Zaderenko

- Se rellena la matriz con las duraciones de las actividades y se comienza rellenado la columna de las actividades T_1 (Tiempo más temprano de un suceso, Early).

  PRIMERA ACTIVIDAD: El primer tiempo T_1 es cero.

  SEGUNDA ACTIVIDAD: Para calcular el segundo elemento T_1 se elige la columna del elemento que se esta calculando (2) y para cada celda con valor se realiza el cálculo:
  T_1 + duración de la actividad $= 0 + 7 = 7$

T_1	t_e	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	*	7	3					
7	2		*	0	8				
	3			*				3	
	4				*	9	8		
	5					*	0		
	6						*		2
	7							*	3
	8								*
	T_2								

TERCERA ACTIVIDAD: Para calcular el tercer elemento T_1 se elige la columna del elemento que se esta calculando (3), observando las celdas que tienen valor se tienen dos tiempos, y se realiza el cálculo:

T_1 + duración de la actividad $= 0 + 3 = 3$

T_1 + duración de la actividad $= 0 + 7 = 7$

Se introduce el tiempo mayor que es 7

T_1	t_e	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	*	7	3					
7	2		*	0	8				
7	3			*				3	
	4				*	9	8		
	5					*	0		
	6						*		2
	7							*	3
	8								*
	T_2								

CUARTA ACTIVIDAD: Para calcular el cuarto elemento de T_1 se elige la columna del elemento que se esta calculando (4), hay una celda que tiene valor, se realiza el cálculo:

T_1 + duración de la actividad $= 7 + 8 = 15$

T_1	t_e	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	*	7	3					
7	2		*	0	8				
7	3			*				3	
15	4				*	9	8		
	5					*	0		
	6						*		2
	7							*	3
	8								*
	T_2								

QUINTA ACTIVIDAD: Para calcular el quinto elemento de T_1 se elige la columna del elemento que se esta calculando (5), hay una celda que tiene valor, se realiza el cálculo:
T_1 + duración de la actividad $= 15 + 9 = 24$

T_1	t_e	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	*	7	3					
7	2		*	0	8				
7	3			*				3	
15	4				*	9	8		
24	5					*	0		
	6						*		2
	7							*	3
	8								*
	T_2								

SEXTA ACTIVIDAD: Para calcular el sexto elemento de T_1 se elige la columna del elemento que se esta calculando (6), hay dos celdas que tiene valor, se realiza el cálculo:
T_1 + duración de la actividad $= 15 + 8 = 23$
T_1 + duración de la actividad $= 24 + 0 = 24$
Se introduce el mayor valor que es 24

T_1	t_e	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	*	7	3					
7	2		*	0	8				
7	3			*				3	
15	4				*	9	8		
24	5					*	0		
24	6						*		2
	7							*	3
	8								*
	T_2								

SÉPTIMA ACTIVIDAD: Para calcular el séptimo elemento de T_1 se elige la columna del elemento que se esta calculando (7), hay una celda que tiene valor, se realiza el cálculo:
T_1 + duración de la actividad $= 7 + 3 = 10$

T_1	t_e	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	*	7	3					
7	2		*	0	8				
7	3			*				3	
15	4				*	9	8		
24	5					*	0		
24	6						*		2
10	7							*	3
	8								*
	T_2								

OCTAVA ACTIVIDAD: Para calcular el octavo elemento de T_1 se elige la columna del elemento que se esta calculando (8), hay dos celdas que tiene valor, se realiza el cálculo:

T_1 + duración de la actividad $= 24 + 2 = 26$

T_1 + duración de la actividad $= 10 + 3 = 13$

Se introduce el mayor valor 26

T_1	t_e	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	*	7	3					
7	2		*	0	8				
7	3			*				3	
15	4				*	9	8		
24	5					*	0		
24	6						*		2
10	7							*	3
26	8								*
	T_2								

- Se completa la matriz de Zaderenko calculando T_2 (Tiempo más tardío de realización de un suceso, Last) de izquierda a derecha.

FILA 8: Se copia el último tiempo T_1

Fila	T_1	t_e	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	1	*	7	3					
2	7	2		*	0	8				
3	7	3			*				3	
4	15	4				*	9	8		
5	24	5					*	0		
6	24	6						*		2
7	10	7							*	3
8 →	26	8								*
		T_2								26

FILA 7: Se resta a la actividad anterior el menor tiempo de la columna:

T_2 − menor tiempo de la columna $= 26 - 3 = 23$

Fila	T_1	t_e	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	1	*	7	3					
2	7	2		*	0	8				
3	7	3			*				3	
4	15	4				*	9	8		
5	24	5					*	0		
6	24	6						*		2
7 →	10	7							*	3
8	26	8								*
		T_2							23	26

FILA 6: Se resta a la actividad anterior el menor tiempo de la columna:
T_2 – menor tiempo de la columna $= 26 - 2 = 24$

Fila	T_1	t_e	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	1	*	7	3					
2	7	2		*	0	8				
3	7	3			*				3	
4	15	4				*	9	8		
5	24	5					*	0		
6 →	24	6						*		2
7	10	7							*	3
8	26	8								*
		T_2						24	23	26

FILA 5: Se resta a la actividad anterior el menor tiempo de la columna:
T_2 – menor tiempo de la columna $= 24 - 0 = 24$

Fila	T_1	t_e	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	1	*	7	3					
2	7	2		*	0	8				
3	7	3			*				3	
4	15	4				*	9	8		
5 →	24	5					*	0		
6	24	6						*		2
7	10	7							*	3
8	26	8								*
		T_2					24	24	23	26

FILA 4: Se resta a la actividad anterior el menor tiempo de la columna:
T_2 – menor tiempo de la columna $= 24 - 9 = 15$

Fila	T_1	t_e	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	1	*	7	3					
2	7	2		*	0	8				
3	7	3			*				3	
4 →	15	4				*	9	8		
5	24	5					*	0		
6	24	6						*		2
7	10	7							*	3
8	26	8								*
		T_2				15	24	24	23	26

FILA 3: Se resta a la actividad anterior el menor tiempo de la columna:
T_2 – menor tiempo de la columna $= 15 - 8 = 7$

Fila	T_1	t_e	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	1	*	7	3					
2	7	2		*	0	8				
3 →	7	3			*				3	
4	15	4				*	9	8		
5	24	5					*	0		
6	24	6						*		2
7	10	7							*	3
8	26	8								*
		T_2			7	15	24	24	23	26

FILA 2: Se resta a la actividad anterior el menor tiempo de la columna:
T_2 – menor tiempo de la columna $= 7 - 0 = 7$

Fila	T_1	t_e	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	1	*	7	3					
2 →	7	2		*	0	8				
3	7	3			*				3	
4	15	4				*	9	8		
5	24	5					*	0		
6	24	6						*		2
7	10	7							*	3
8	26	8								*
		T_2		7	7	15	24	24	23	26

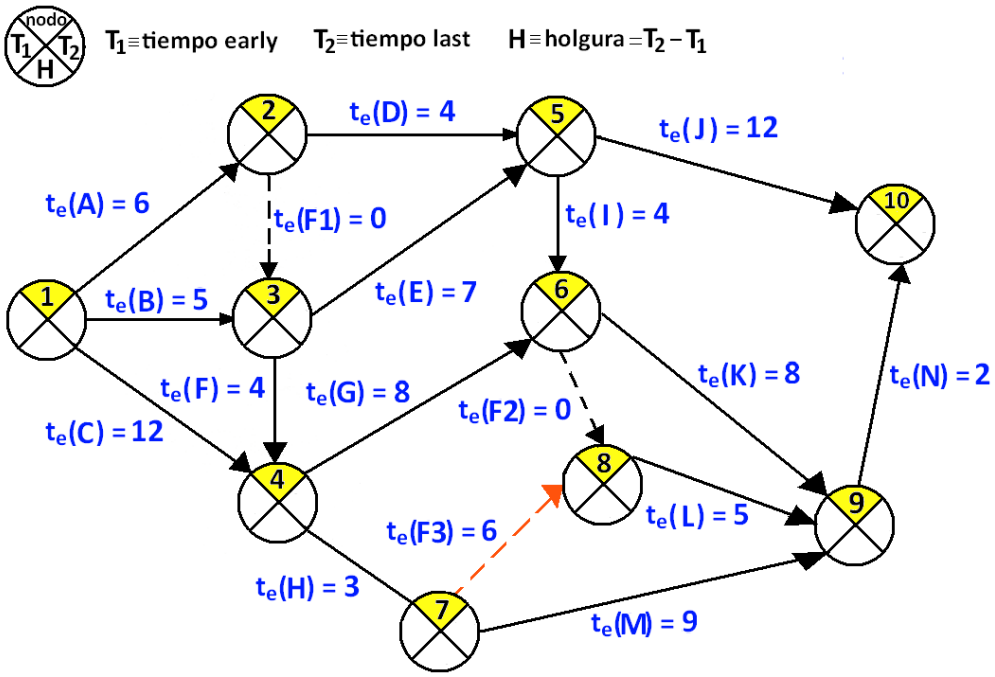
FILA 1: Se resta a la actividad anterior el menor tiempo de la columna:
T_2 – menor tiempo de la columna $= 7 - 7 = 0$

Fila	T_1	t_e	1	2	3	4	5	6	7	8
1 →	0	1	*	7	3					
2	7	2		*	0	8				
3	7	3			*				3	
4	15	4				*	9	8		
5	24	5					*	0		
6	24	6						*		2
7	10	7							*	3
8	26	8								*
		T_2	0	7	7	15	24	24	23	26

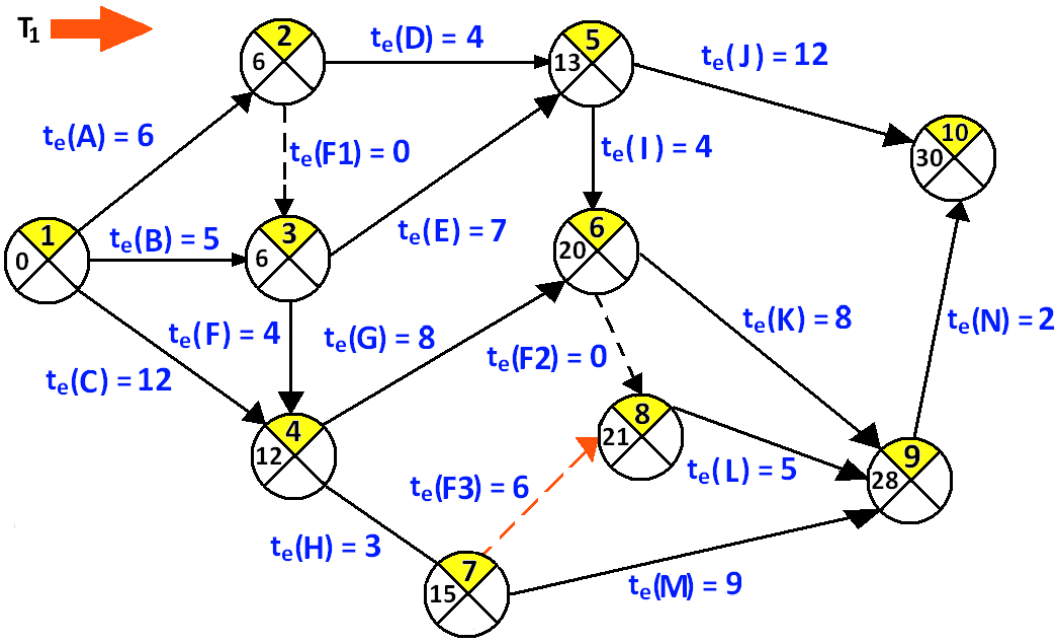
Dibujar la red PERT y el diagrama de Gantt asociado a las actividades de un aeropuerto que se describen en la tabla adjunta. Por razones técnicas, entre el final de H y el comienzo de L deben de transcurrir al menos 6 unidades de tiempo.

Actividad	Actividades siguientes inmediatas	Tiempo Pert
A	D, E, F	6
B	E, F	5
C	G, H	12
D	I, J	4
E	I, J	7
F	G, H	4
G	K, L	8
H	M	3
I	K, L	4
J		12
K	N	8
L	N	5
M	N	9
N		2

Para representar la red del proyecto es necesario introducir tres actividades ficticias, una de ellas, $t_e(F3) = 6$, con tiempo asociado para representar la ligadura entre H y L

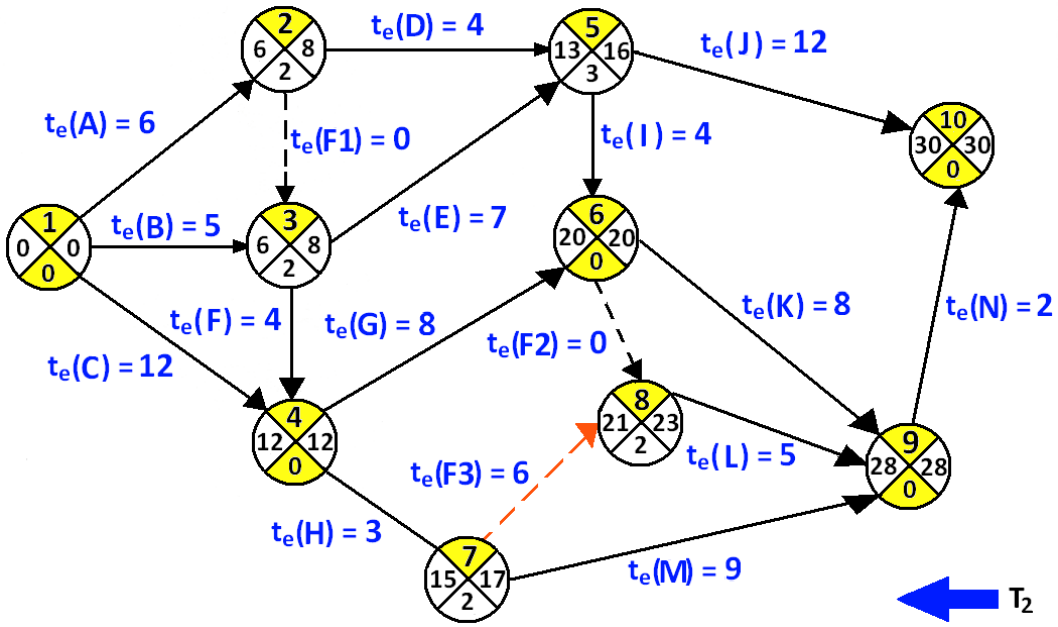


Se completa la red Pert introduciendo las actividades T_1 (tiempo más temprano de un suceso, Early), de derecha a izquierda. Si en un nodo finaliza más de una actividad se toma el tiempo Pert de la actividad con mayor valor.



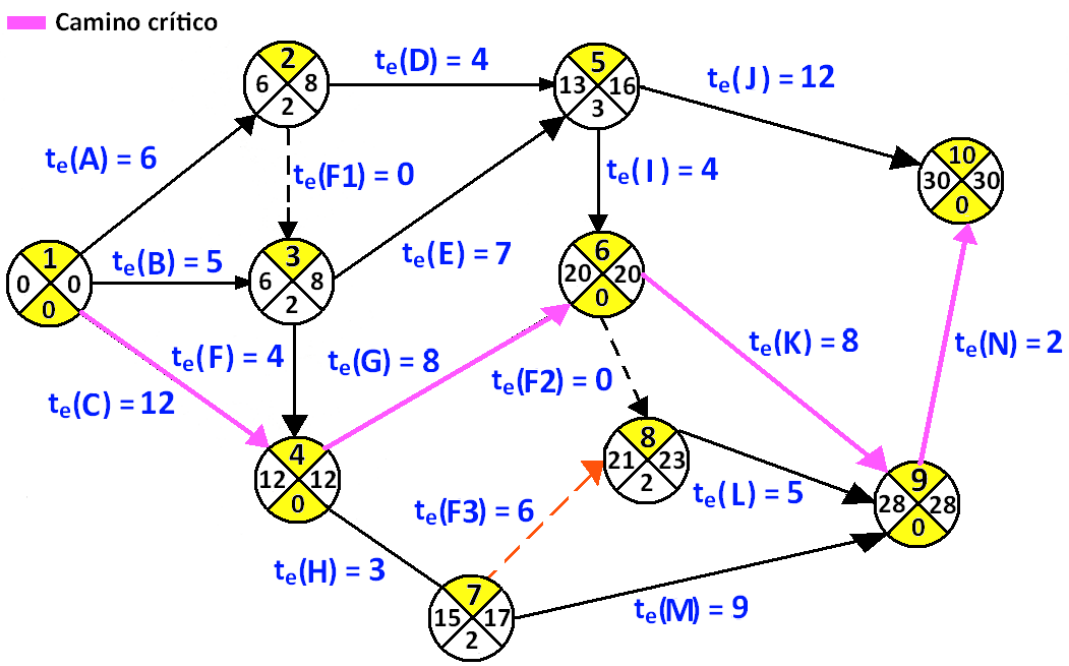
En distintos nodos (3, 5, 6, 8, 9 y 10) finalizaban más de una actividad, tomando el tiempo Pert (tiempo esperado) con mayor valor.

Después se introducen las actividades T_2 (tiempo más tardío de realización de un suceso, Last), comenzando de izquierda a derecha. Si en un nodo finaliza más de una actividad se toma el tiempo Pert de la actividad con menor valor.



El tiempo de Holgura $H = T_2 - T_1$ es la diferencia entre el tiempo más tardío y el tiempo más temprano de un suceso. En unidades de tiempo corresponde al valor que puede tardar la ocurrencia de un suceso.

El camino crítico corresponde a los sucesos con holgura cero. En el caso de que existiesen dos o más caminos críticos se deberá tomar la distribución con tiempos de finalización con mayor varianza.



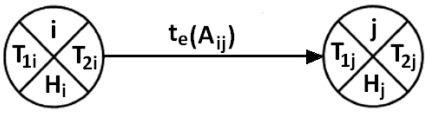
El camino crítico es 1 - 4 - 6 - 9 - 10 construido con las actividades C, G, K, N.

La longitud o duración del proyecto, de derecha a izquierda en el camino crítico,
$t_e(b) = T_2(b) - T_2(a)$ en $[a - b]$

$$\mu_{PROYECTO} = t_e(C) + t_e(G) + t_e(K) + t_e(N) = 12 + 8 + 8 + 2 = 30$$

DIAGRAMA DE GANTT: En cada actividad no crítica de la red PERT aparecen dos números entre paréntesis (Ml ≡ Margen libre, Mt ≡ Margen total).
Las actividades críticas no tienen márgenes.

Se denomina margen de una actividad al exceso de tiempo disponible para realizar dicha actividad con relación al tiempo previsto de ejecución para la misma.

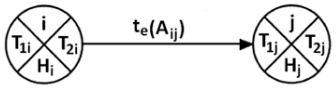


$$Ml = T_{1j} - T_{1i} - t_e \ , \quad Mt = T_{2j} - T_{1i} - t_e$$

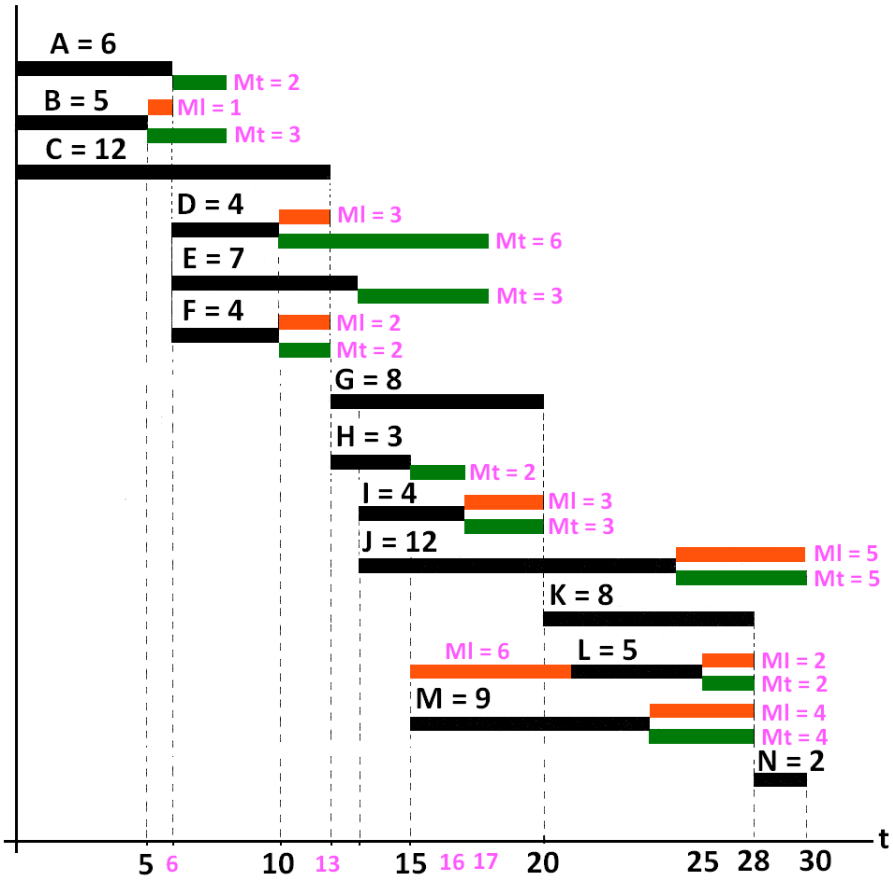
El gráfico de Gantt presenta cada actividad lleva asociada una barra de longitud igual a su duración, representando al final de cada una de ellas dos barritas que representan el margen libre de la actividad (barrita superior) y el margen total de la actividad (barrita inferior). Las actividades críticas no tienen estas dos barritas.

DIAGRAMA DE GANTT

MÁRGENES LIBRE Y TOTAL DE CADA ACTIVIDAD NO CRÍTICA
LAS ACTIVIDADES CRÍTICAS NO TIENEN MARGEN



$$(Ml, Mt) \equiv \begin{cases} Ml = T_{1j} - T_{1i} - t_e \\ Mt = T_{2j} - T_{1i} - t_e \end{cases}$$



En el cuadro adjunto se detalla la salida en meses de un nuevo producto al mercado, así como las relaciones de precedencia inmediata.

Actividades	Descripción de la tarea	Tiempo optimista (a)	Tiempo más probable (m)	Tiempo pesimista (b)
A	Estudio de mercado	4	7	10
B	Puesta a punto del producto	4	4	4
C	Estudio de la red de distribución	2	3	4
D	Estudios financieros	3	4	5
E	Publicidad	2	3	4
F	Producción	7	8	9
G	Lanzamiento	1	2	3

La interrelación entre las distintas actividades que integran el proyecto según el orden lógico de actuación es como sigue:

La actividad A precede a las actividades B y C.
Las actividades B y C preceden a la actividad D.
La actividad D precede a las actividades E y F.
Las actividades E y F preceden a la actividad G.

a) Con la información facilitada anteriormente, la gerencia de la empresa desea conocer:

Grafo PERT completo con tiempos early, last y holgura de los sucesos.

Camino crítico. ¿Cuál es la actividad más precisa?

Probabilidad de terminar el proyecto en veinticuatro meses. Determinar los plazos de ejecución del proyecto que tiene una probabilidad del 90% de cumplirse.

A los seis meses de comenzar el proyecto se realiza un control y se observa que:

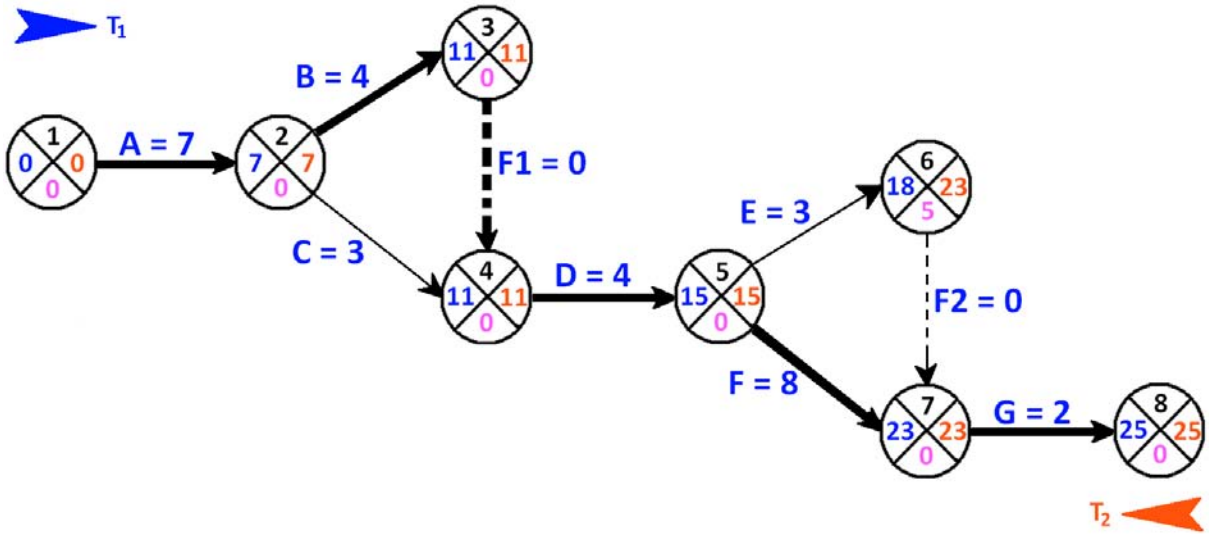
- La actividad A está terminada
- Falta un mes para terminar la tarea B
- Faltan dos meses para terminar la tarea C
- El resto de actividades no han comenzado aún

b) Según estos datos indicar si el proyecto sufre algún retraso o cambios en el camino crítico

a) Se calcula el tiempo esperado (tiempo Pert) de cada actividad $t_e(A) = \frac{a+4m+b}{6}$ y su varianza $\sigma^2_{t_e} = \frac{(b-a)^2}{36}$ en cada intervalo $[a, b]$

Actividades	Tiempo optimista (a)	Tiempo más probable (m)	Tiempo pesimista (b)	Tiempo Pert (t_e)	Varianza ($\sigma^2_{actividad}$)
A	4	7	10	7	1
B	4	4	4	4	0
C	2	3	4	3	4/36
D	3	4	5	4	4/36
E	2	3	4	3	4/36
F	7	8	9	8	4/36
G	1	2	3	2	4/36

Se representa el grafo de la red con los tiempos Early, Last y Holgura.



El camino crítico es el que presenta mayor duración entre los nodos inicial y final, que coincide con la duración mínima del proyecto, formado por las actividades en las que el tiempo Early y Last son iguales (situaciones críticas, con holgura cero), aquellas que no admiten retraso en su ejecución ya que esto implicaría un retraso general del proyecto.

El camino crítico es el formado por los nodos $(1-2-3-4-5-7-8)$ de longitud 25 meses, parte del proyecto que hay que vigilar con mayor atención puesto que es la parte donde pueden aparecer problemas de retraso en la realización del proyecto planificado.

Señalar que cuando existen dos o más caminos críticos se debe utilizar la distribución con tiempos de finalización con mayor varianza.

Por otra parte, la actividad más precisa es aquella que tiene menor varianza. En este caso, no es preciso realizar ningún cálculo dado que la actividad B (puesta a punto del producto) tiene las tres estimaciones (tiempo optimista, normal y pesimista) con el mismo valor, luego su varianza será cero.

En el camino crítico $(1-2-3-4-5-7-8)$ se calcula la duración del proyecto y el error que se comete (desviación típica del proyecto):

$$\mu_{Proyecto} = t_e(A)+t_e(B)+t_e(D)+t_e(F)+t_e(G) = 7+4+4+8+2 = 25 \text{ meses}$$

$$\sigma^2_{Proyecto} = \sigma^2_A+\sigma^2_B+\sigma^2_D+\sigma^2_F+\sigma^2_G = 1+0+\frac{4}{36}+\frac{4}{36}+\frac{4}{36} = \frac{48}{36} = 1{,}33 \text{ meses}^2$$

$\sigma_{Proyecto} = \sqrt{1{,}33} = 1{,}15$ meses

La distribución del tiempo de finalización del proyecto, de acuerdo con el Teorema Central del Límite (TCL), sigue una distribución normal $N(25,\ 1{,}15)$

La probabilidad de finalizar el proyecto en 24 meses será:

$$P(X \le 24) = P\left[\frac{X-25}{1{,}15} \le \frac{24-25}{1{,}15}\right] = P(z \le -0{,}87) = P(z \ge 0{,}87) = 0{,}1922 \ \ (19{,}22\%)$$

Los plazos de ejecución que tienen un 90% de probabilidad de cumplirse son:

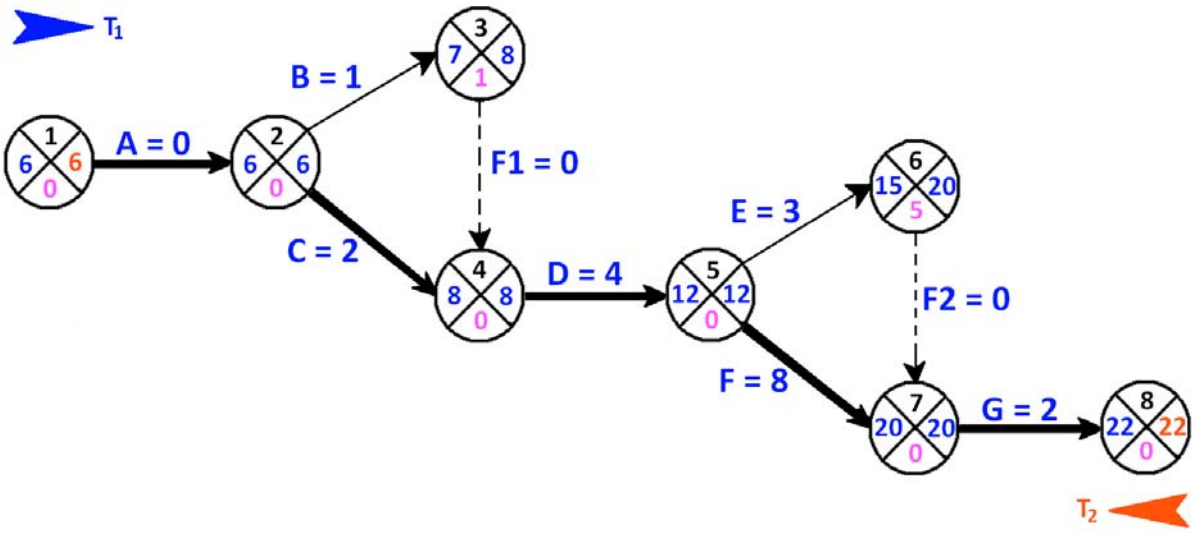
$$P(X \le k) = P\left[\frac{X-25}{1{,}15} \le \frac{k-25}{1{,}15}\right] = P\left[z \le \frac{k-25}{1{,}15}\right] = 0{,}9 \quad \Leftrightarrow \quad P\left[z \ge \frac{k-25}{1{,}15}\right] = 0{,}1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{k-25}{1{,}15} = 1{,}28 \quad \rightarrow \quad k = 25 + 1{,}15 \times 1{,}28 = 26{,}472$$

El plazo de ejecución se encuentra entre 26 y 27 meses

NOTA: Adviértase que no se podría determinar estas dos cuestiones (probabilidad de finalizar un proyecto y plazos de ejecución) si no dispusiera de los tiempos optimista, normales y pesimistas de las actividades críticas, esto es porque no se podría calcular la distribución del proyecto $N(\mu, \sigma)$

b) Se tiene que dibujar nuevamente la red PERT con los meses que faltan para terminar las actividades y determinar nuevamente los tiempos tempranos y tardíos de cada suceso.



El camino crítico es $(1-2-4-5-7-8)$ con una duración de 22 meses.

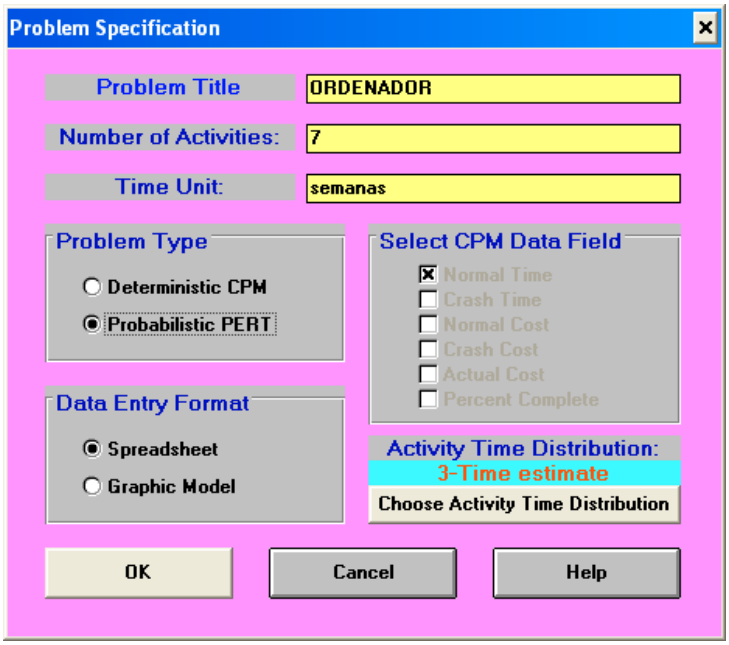
GESTIÓN DE PROYECTOS: REDES PERT – GANTT

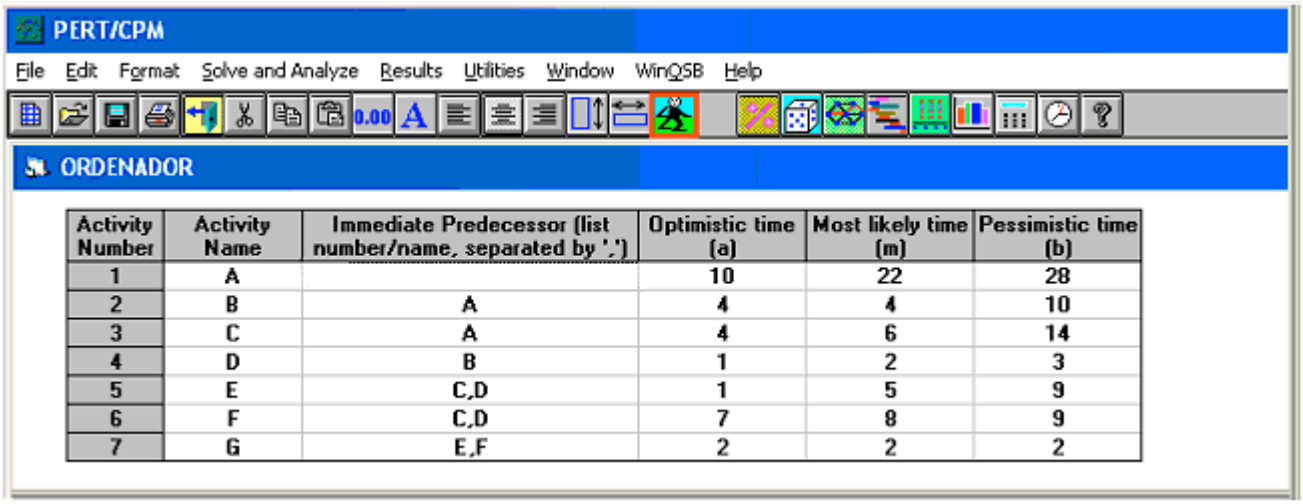
Un proyecto para diseñar un ordenador consiste en 7 actividades etiquetadas (A, B, . . . , G), la duración (en semanas) y las precedencias se dan adjuntan en la siguiente tabla:

Actividad	Asignación	Predecesores	Tiempos esperados (semanas)		
			Optimista	Más probable	Pesimista
Diseño	A	----	10	22	28
Fabricar prototipo	B	A	4	4	10
Evaluar equipo	C	A	4	6	14
Probar prototipo	D	B	1	2	3
Informe equipo	E	C, D	1	5	9
Informe métodos	F	C, D	7	8	9
Informe final	G	E, F	2	2	2

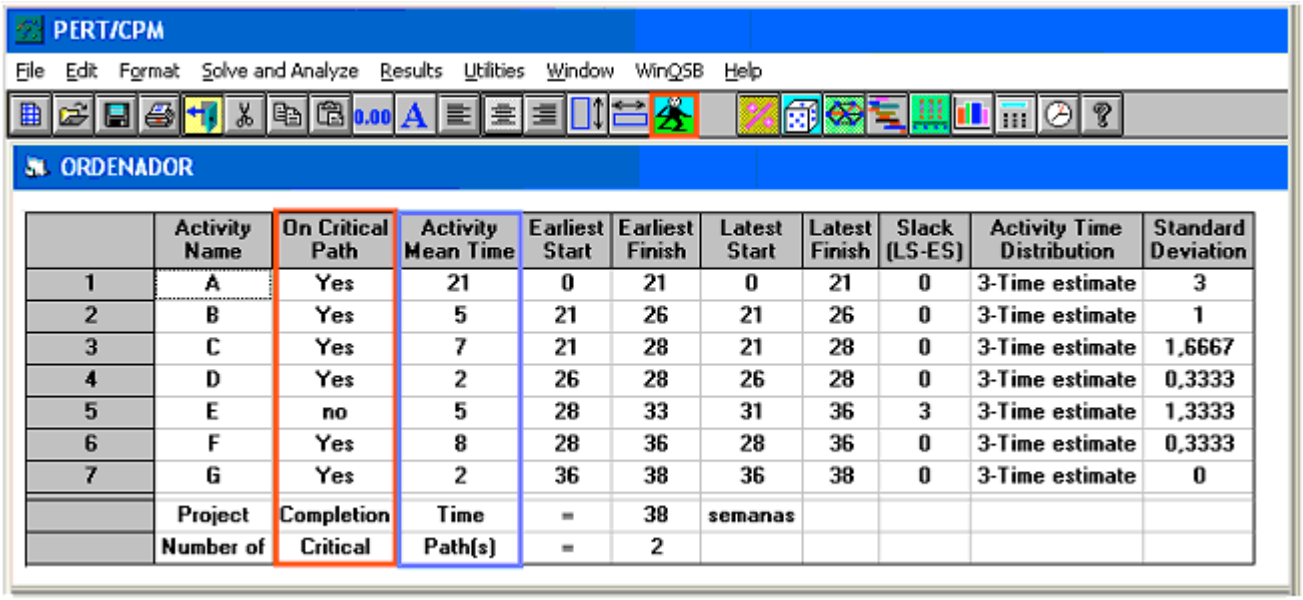
a) Calcular la ruta crítica y las actividades críticas.
b) Desarrollar el diagrama de Gantt.
c) Probabilidad de completar el proyecto a lo sumo en 35 semanas.

a)





Activity Number	Activity Name	Immediate Predecessor (list number/name, separated by ',')	Optimistic time (a)	Most likely time (m)	Pessimistic time (b)
1	A		10	22	28
2	B	A	4	4	10
3	C	A	4	6	14
4	D	B	1	2	3
5	E	C,D	1	5	9
6	F	C,D	7	8	9
7	G	E,F	2	2	2



	Activity Name	On Critical Path	Activity Mean Time	Earliest Start	Earliest Finish	Latest Start	Latest Finish	Slack (LS-ES)	Activity Time Distribution	Standard Deviation
1	A	Yes	21	0	21	0	21	0	3-Time estimate	3
2	B	Yes	5	21	26	21	26	0	3-Time estimate	1
3	C	Yes	7	21	28	21	28	0	3-Time estimate	1,6667
4	D	Yes	2	26	28	26	28	0	3-Time estimate	0,3333
5	E	no	5	28	33	31	36	3	3-Time estimate	1,3333
6	F	Yes	8	28	36	28	36	0	3-Time estimate	0,3333
7	G	Yes	2	36	38	36	38	0	3-Time estimate	0
	Project	Completion	Time	=	38	semanas				
	Number of	Critical	Path(s)	=	2					

On Critical Path: YES si pertenece a alguna ruta crítica

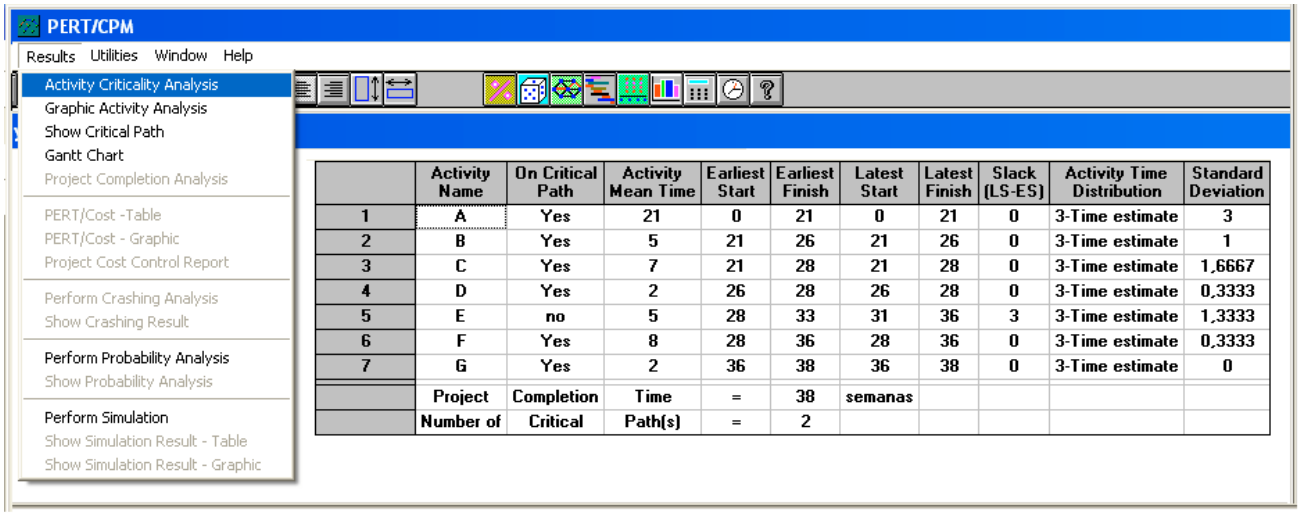
Activity Mean Time: Tiempo Pert

3-time estímate: Tiempo Pert utilizando los tiempos optimista, más probable y pesimista.

Project Completion Time: Tiempo de terminación del proyecto en 38 semanas

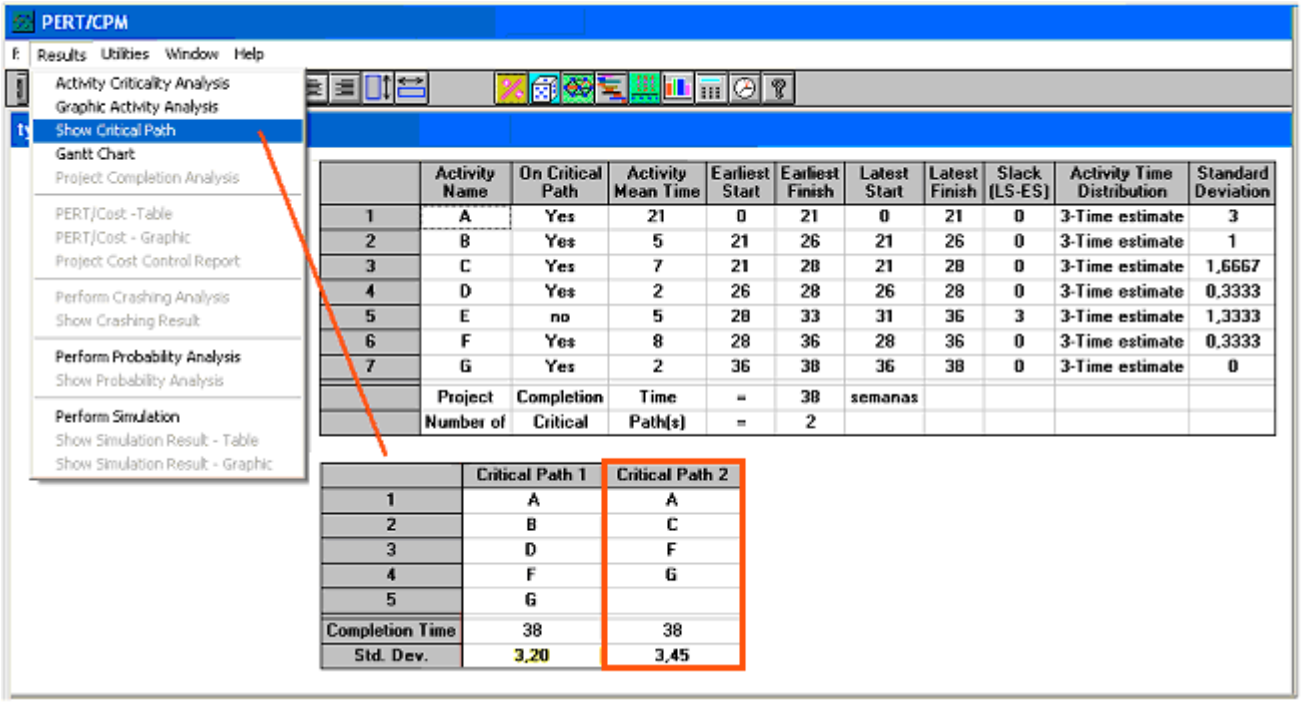
Number of Critical Path(s): 2 rutas críticas

Otra forma de acceder al resultado: Results / Activity Criticaly Analysis



	Activity Name	On Critical Path	Activity Mean Time	Earliest Start	Earliest Finish	Latest Start	Latest Finish	Slack (LS-ES)	Activity Time Distribution	Standard Deviation
1	A	Yes	21	0	21	0	21	0	3-Time estimate	3
2	B	Yes	5	21	26	21	26	0	3-Time estimate	1
3	C	Yes	7	21	28	21	28	0	3-Time estimate	1,6667
4	D	Yes	2	26	28	26	28	0	3-Time estimate	0,3333
5	E	no	5	28	33	31	36	3	3-Time estimate	1,3333
6	F	Yes	8	28	36	28	36	0	3-Time estimate	0,3333
7	G	Yes	2	36	38	36	38	0	3-Time estimate	0
	Project	Completion	Time	=	38	semanas				
	Number of	Critical	Path(s)	=	2					

Rutas críticas: Results / Show Critical Path

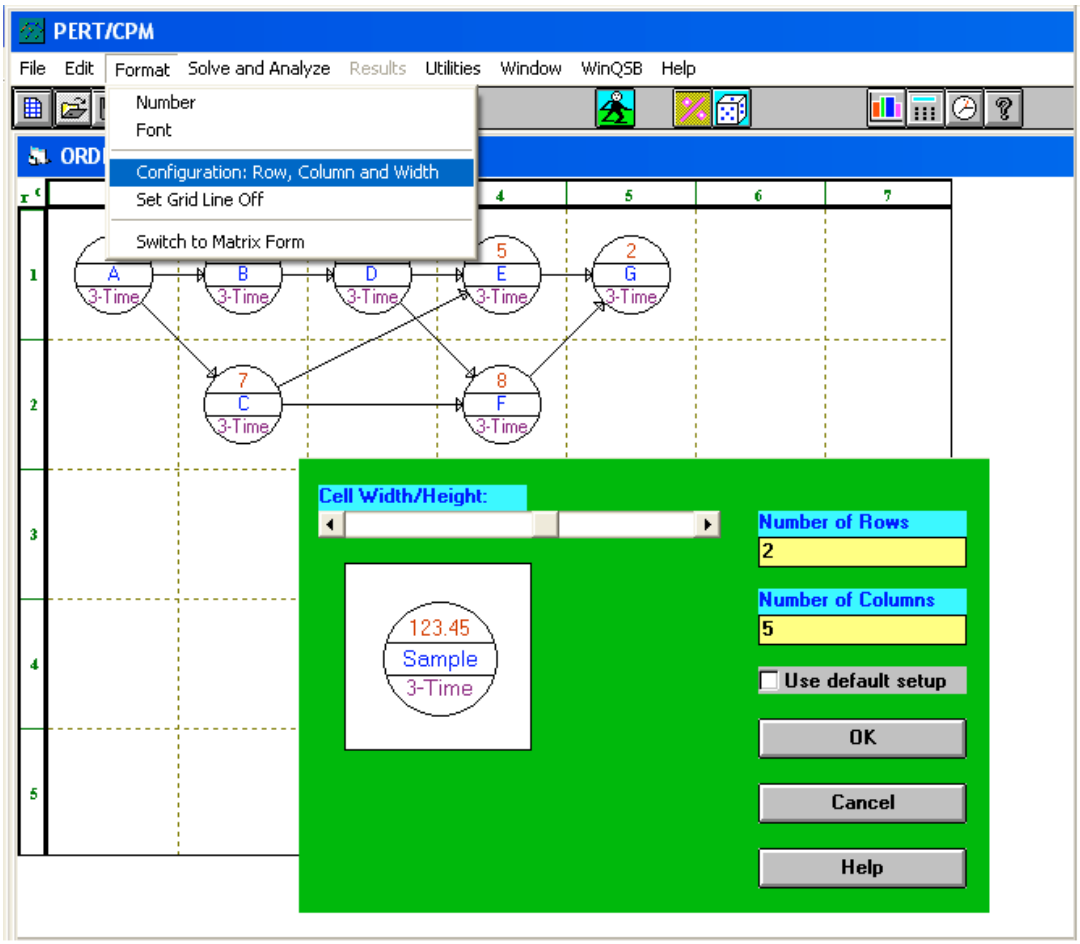


	Activity Name	On Critical Path	Activity Mean Time	Earliest Start	Earliest Finish	Latest Start	Latest Finish	Slack (LS-ES)	Activity Time Distribution	Standard Deviation
1	A	Yes	21	0	21	0	21	0	3-Time estimate	3
2	B	Yes	5	21	26	21	26	0	3-Time estimate	1
3	C	Yes	7	21	28	21	28	0	3-Time estimate	1,6667
4	D	Yes	2	26	28	26	28	0	3-Time estimate	0,3333
5	E	no	5	28	33	31	36	3	3-Time estimate	1,3333
6	F	Yes	8	28	36	28	36	0	3-Time estimate	0,3333
7	G	Yes	2	36	38	36	38	0	3-Time estimate	0
	Project	Completion	Time	=	38	semanas				
	Number of	Critical	Path(s)	=	2					

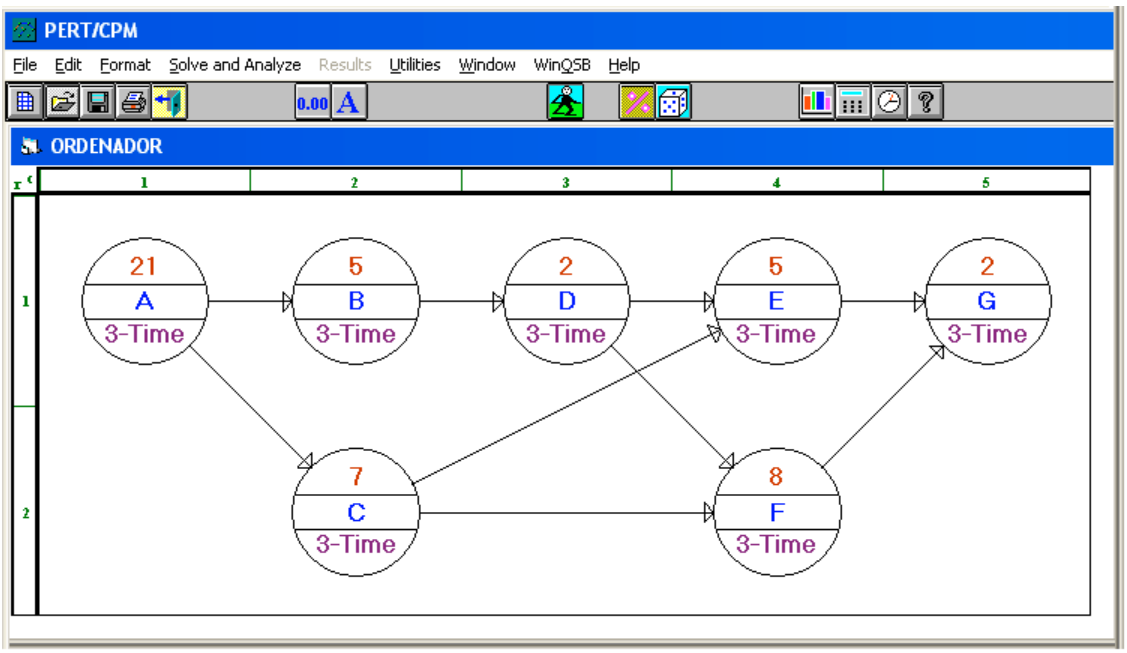
	Critical Path 1	Critical Path 2
1	A	A
2	B	C
3	D	F
4	F	G
5	G	
Completion Time	38	38
Std. Dev.	3,20	3,45

Se elige la ruta crítica (A – C – F – G) que presenta mayor desviación típica

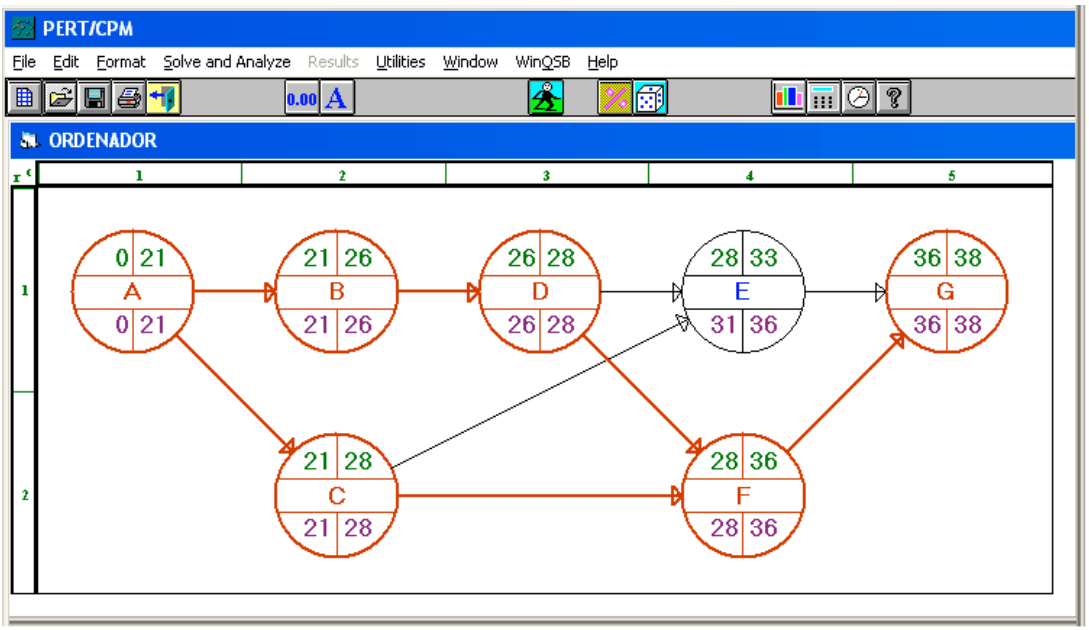
Gráfico: Desde la entrada de datos – Format / Switch Graphic Model



Personalizar Gráfico: Format / Configuration Row, Colum and width

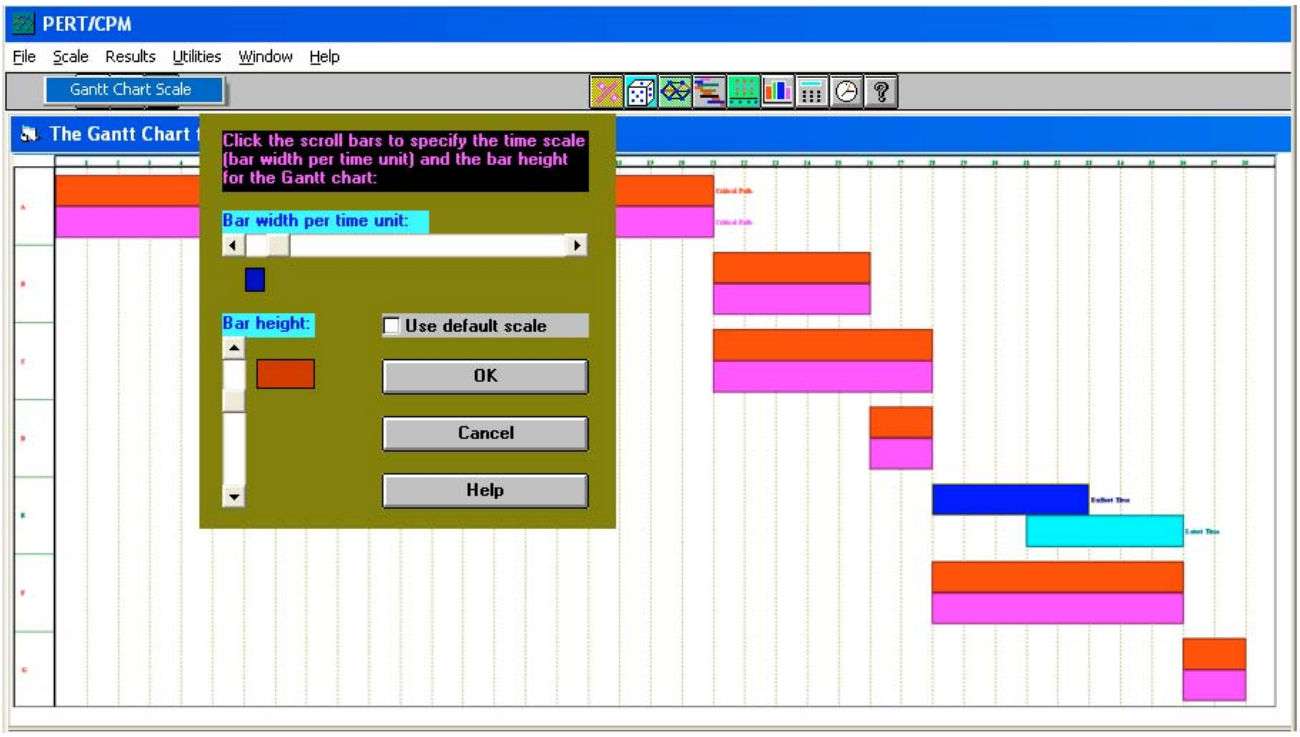


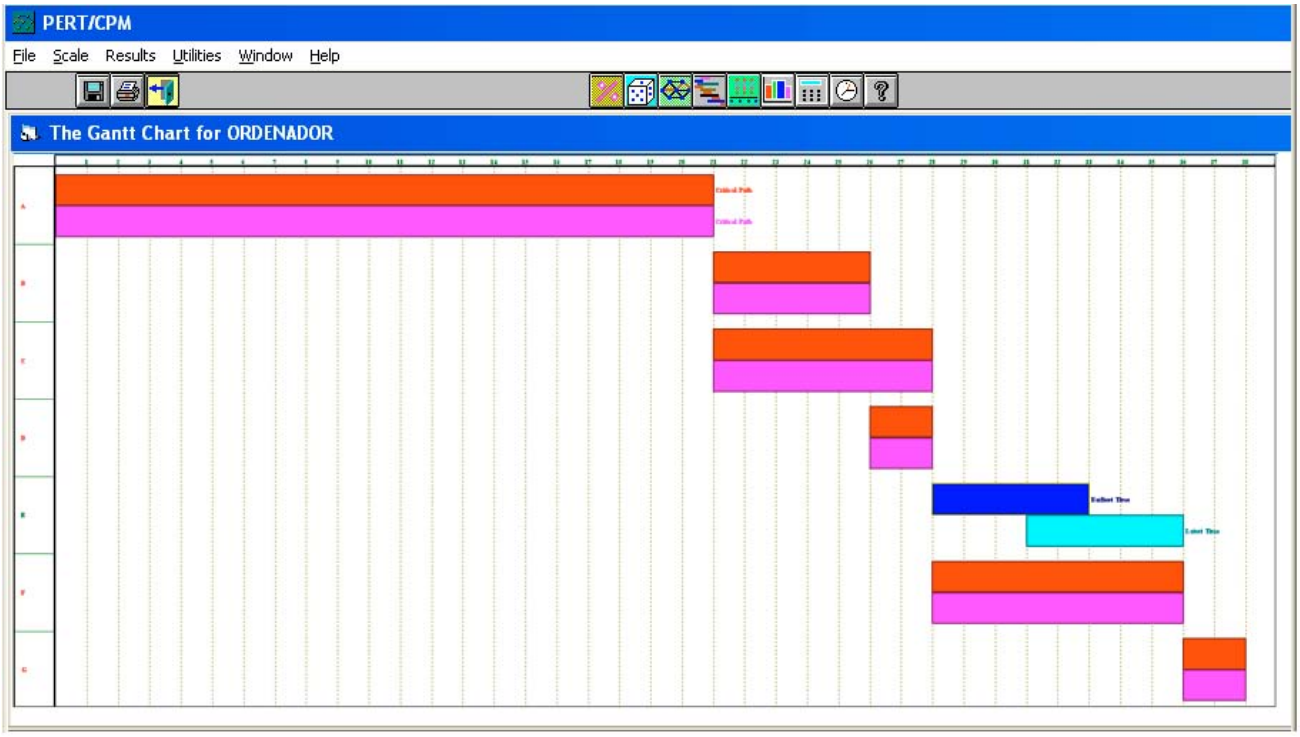
Rutas críticas: Results / Graphic Activity Analysis



b) Diagrama de Gantt: Results / Gantt Chart

La primera pantalla resulta ilegible, se personaliza Scale / Gantt Chart Scale

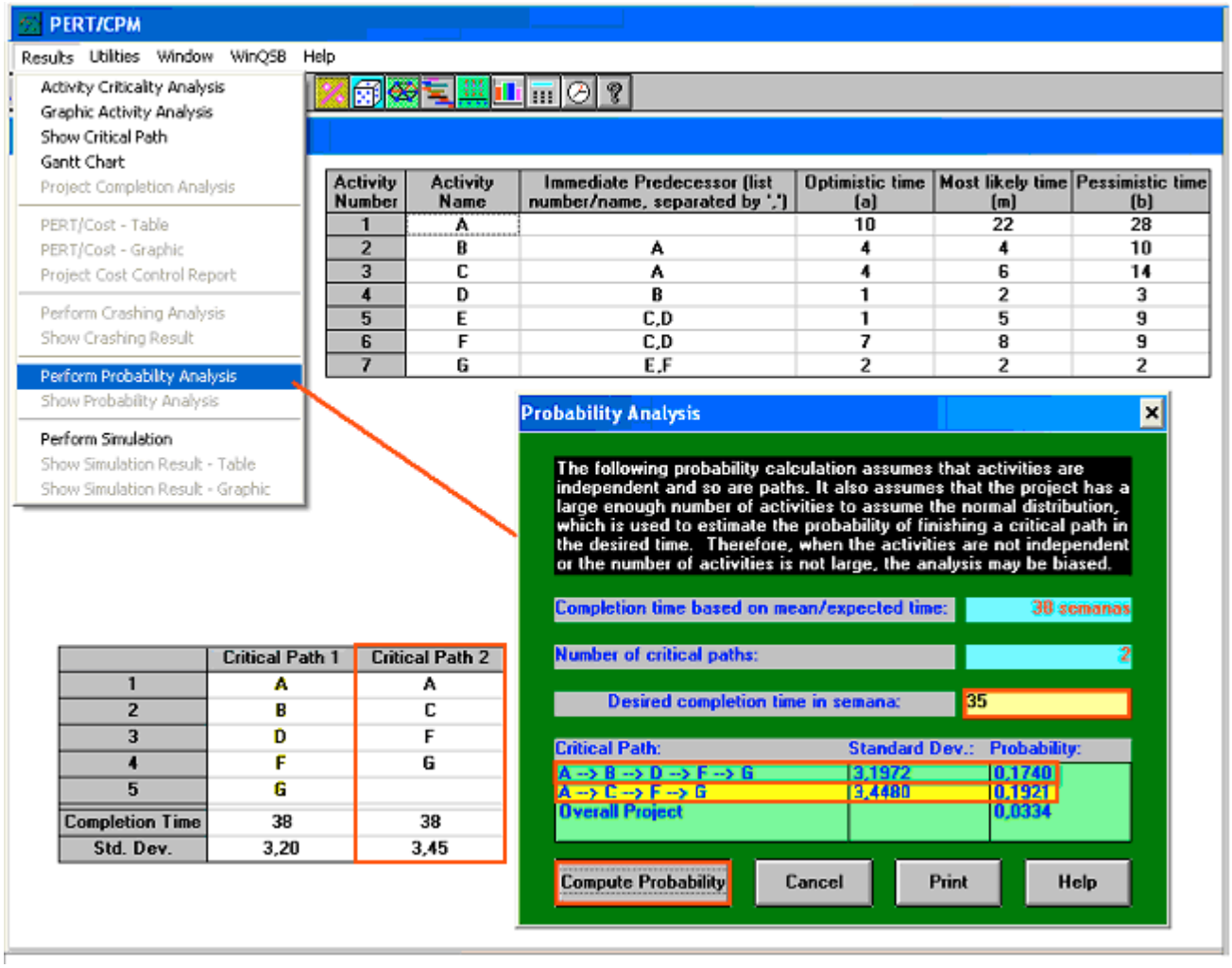




Las actividades críticas aparecen en rojo y rosado con la primera y segunda programación de Gantt, la actividad E que no es crítica tiene dos posibles programaciones: azul y celeste.
Se puede personalizar color y otros aspectos.

c) Probabilidad de completar el proyecto a lo sumo en 35 semanas.

Results / Perform Probability Analysis



Activity Number	Activity Name	Immediate Predecessor (list number/name, separated by ',')	Optimistic time (a)	Most likely time (m)	Pessimistic time (b)
1	A		10	22	28
2	B	A	4	4	10
3	C	A	4	6	14
4	D	B	1	2	3
5	E	C,D	1	5	9
6	F	C,D	7	8	9
7	G	E,F	2	2	2

	Critical Path 1	Critical Path 2
1	A	A
2	B	C
3	D	F
4	F	G
5	G	
Completion Time	38	38
Std. Dev.	3,20	3,45

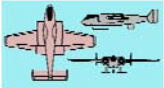
Se elige la segunda ruta crítica $(A-C-F-G)$ con mayor desviación típica $\sigma_{A-C-F-G} = 3{,}45$

La distribución del tiempo de finalización del proyecto, según el Teorema Central del Límite, sigue una distribución normal $N(38, 3{,}45)$

$$P(X \le 35) = P\left(z \le \frac{35-38}{3{,}45}\right) = P(z \le -0{,}869) = 0{,}1921\ (19{,}21\%)$$

La primera ruta críticca $(A-B-D-F-G)$ sigue una distribución normal $N(38, 3{,}20)$:

$$P(X \le 35) = P(z \le -0{,}9375) = P(z \ge 0{,}9375) = 0{,}1740\ (17{,}40\%)$$



Un proyecto aeronáutico consiste en 17 actividades etiquetadas (A, B, . . . , Q), con duración en días. Las precedencias se adjuntan en la siguiente tabla:

Actividades	Precedentes	Tiempo optimista (a)	Tiempo más probable (m)	Tiempo pesimista (b)
A	------	1	1	1
B	------	1	2	3
C	------	2	3	4
D	A	2	4	6
E	A	1	3	5
F	C	1	2	3
G	C	0	1	2
H	D	5	7	9
I	D	6	8	10
J	B, E, F	5	7	15
K	B, E, F	6	7	8
L	G	3	5	7
M	H	1	1	1
N	I, J	1	2	3
0	K, L	2	3	4
P	M, N	3	4	5
Q	O, P	1	2	3

Se desea conocer:

a) El menor número de días en las que se puede terminar el proyecto.

b) ¿Qué actividades se pueden retrasar dos días sin que se vea afectada la duración del proyecto?

c) ¿Cómo afectaría el proyecto se la actividad J se retrasa dos días?

d) ¿Cómo se ve afectada la duración total del proyecto si la actividad M se retrasa 4 días y la actividad J se retrasa un día?

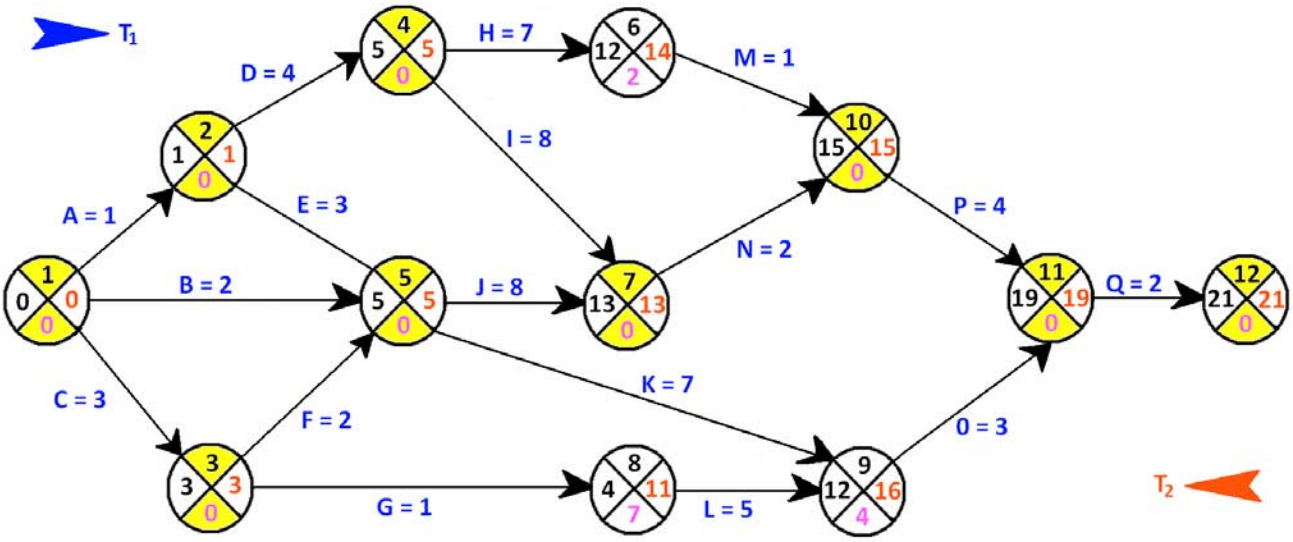
e) ¿Cuál es la probabilidad de terminar el proyecto antes de 20 días?

f) ¿Qué plazos de ejecución tienen un 90% de probabilidad de cumplirse?

a) Para conocer el menor número de semanas que puede durar el proyecto hay que calcular el camino crítico. Se calcula el tiempo esperado (tiempo Pert) de cada actividad $t_e(A) = \frac{a+4m+b}{6}$ y su varianza $\sigma^2_{t_e} = \frac{(b-a)^2}{36}$ en cada intervalo $[a, b]$

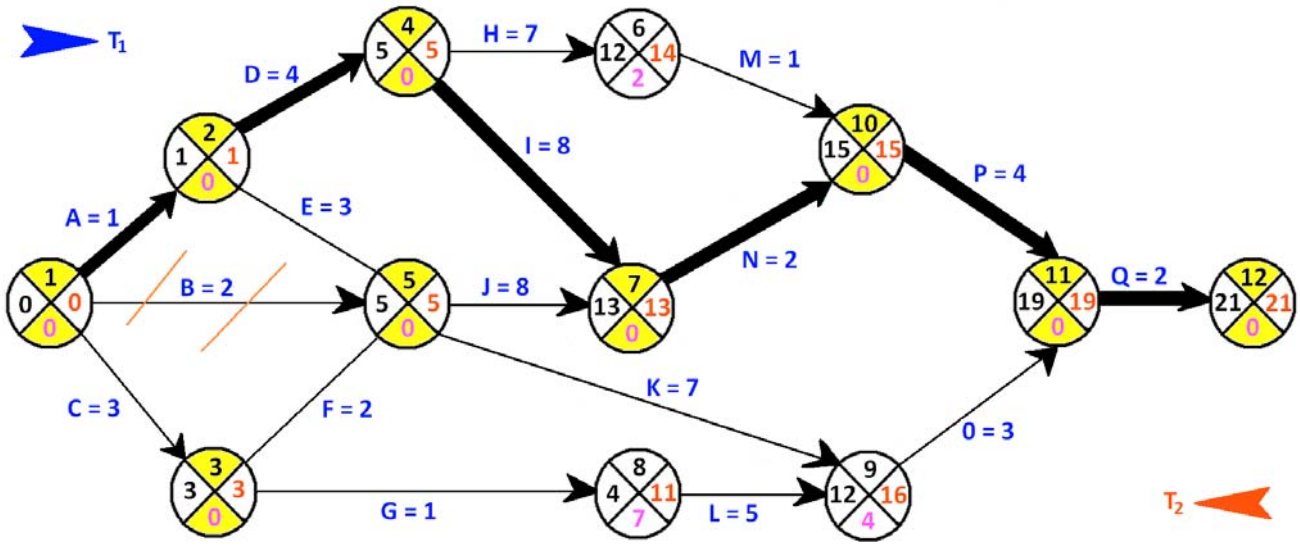
Actividad	Tiempo optimista (a)	Tiempo más probable (m)	Tiempo pesimista (b)	Tiempo Pert (t_e)	Varianza ($\sigma^2_{actividad}$)
A	1	1	1	1	0
B	1	2	3	2	4/36
C	2	3	4	3	4/36
D	2	4	6	4	16/36
E	1	3	5	3	16/36
F	1	2	3	2	4/36
G	0	1	2	1	4/36
H	5	7	9	7	16/36
I	6	8	10	8	16/36
J	5	7	15	8	100/36
K	6	7	8	7	4/36
L	3	5	7	5	16/36
M	1	1	1	1	0
N	1	2	3	2	4/36
0	2	3	4	3	4/36
P	3	4	5	4	4/36
Q	1	2	3	2	4/36

El grafo Pert determinando los tiempos más tempranos (Early) y tardíos (Last) y holgura de cada actividad:

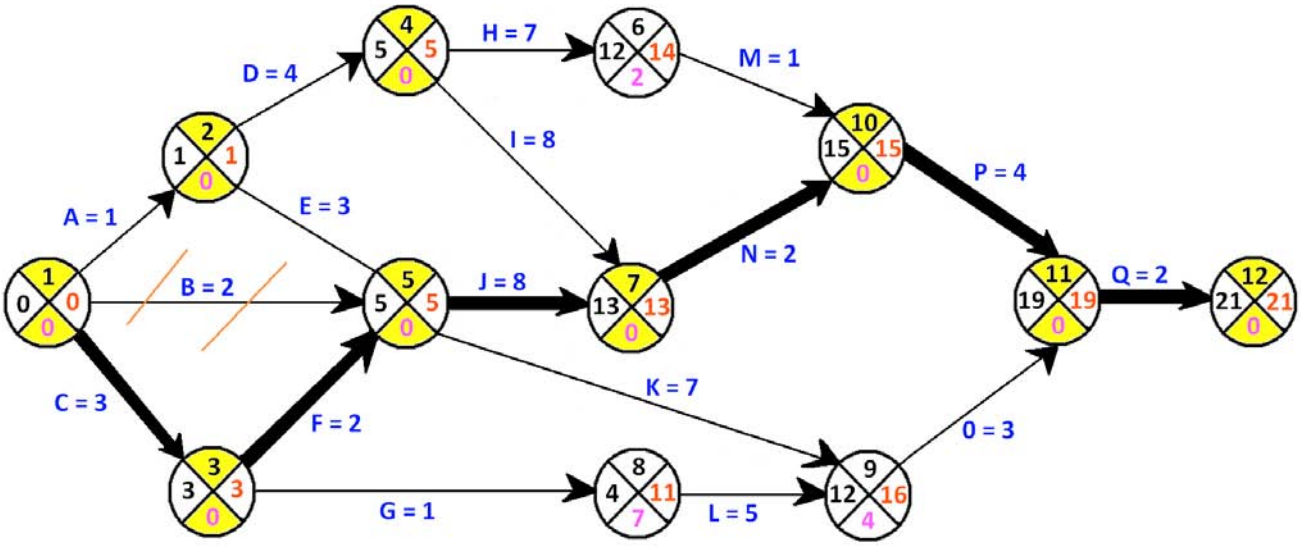


El camino crítico esta formado por las actividades críticas en las que el tiempo Earl y Last son iguales (situaciones críticas, con holgura cero), aquellas que no admiten retraso en su ejecución ya que esto implicaría un retraso general del proyecto.

En los grafos adjuntos se observa que hay dos caminos críticos.



Camino1 formado por las actividades: A – D – I – N – P – Q



Camino2 formado por las actividades: C – F – J – N – P – Q

Se utiliza la distribución con tiempos de finalización con mayor varianza.

La duración del proyecto en ambos caminos críticos es: $\mu_{Proyecto} = 21$ semanas

La varianza de los caminos:

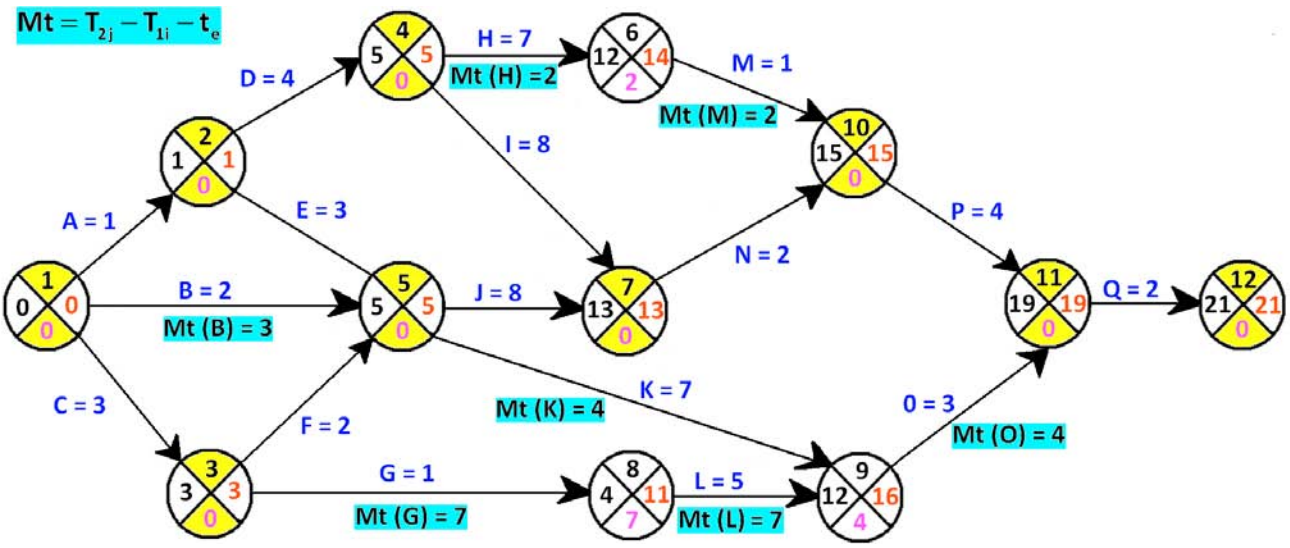
$$\sigma^2_{Camino\ 1} = \sigma^2_A + \sigma^2_D + \sigma^2_I + \sigma^2_N + \sigma^2_P + \sigma^2_Q = 0 + \frac{16}{36} + \frac{16}{36} + \frac{4}{36} + \frac{4}{36} + \frac{4}{36} = \frac{44}{36} \text{ días}^2$$

$$\sigma^2_{Camino\ 2} = \sigma^2_C + \sigma^2_F + \sigma^2_J + \sigma^2_N + \sigma^2_P + \sigma^2_Q = \frac{4}{36} + \frac{4}{36} + \frac{100}{36} + \frac{4}{36} + \frac{4}{36} + \frac{4}{36} = \frac{120}{36} \text{ días}^2$$

Se elige el camino2 (C – F – J – N – P – Q) con desviación típica: $\sigma_{Proyecto} = \sqrt{\frac{120}{36}} = 1{,}83$ días

La distribución del tiempo de finalización del proyecto, de acuerdo con el Teorema Central del Límite (TCL), sigue una distribución normal N(21, 1,83)

b) Las actividades que se pueden retrasar dos semanas sin que se vea afectada la duración del proyecto serán aquellas cuya margen total sea igual o mayor que 2, es decir, las actividades que $Mt = T_{2j} - T_{1i} - t_e \geq 2$



Las actividades que se pueden retrasar 2 días son: B, G, H, K, L, M, O

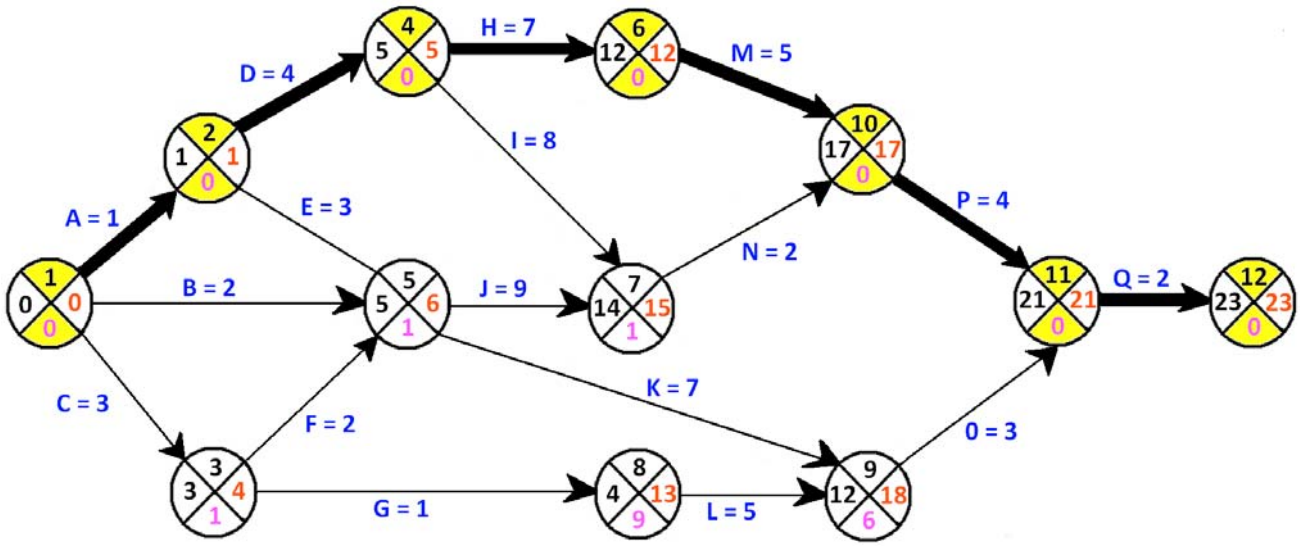
c) Siendo J una actividad crítica la duración del proyecto se retrasaría en 2 días, con lo que duración del proyecto sería de 23 días y el camino crítico (C, F, J, N, P, Q) dejaría de ser crítico.

d) Si la actividad M se retrasa en 4 días, como su margen total es de 2 días retrasaría el proyecto en 2 días, con lo que el camino crítico sería de 23 días.

Si la actividad crítica J se retrasa en 1 día, el proyecto también se retrasaría 1 día, siendo el retraso menor que el provocado por la actividad M.

En consecuencia, el proyecto en general se retrasa 2 días y pasa a tener una duración de 23 días.

Ambos caminos (Camino 1 y Camino 2) dejan de ser críticos, apareciendo un nuevo camino crítico: (A, D, H, M, P, Q)



e) La distribución del tiempo de finalización del proyecto sigue una distribución normal N(21, 1,83)

La probabilidad de finalizar el proyecto en 20 días:

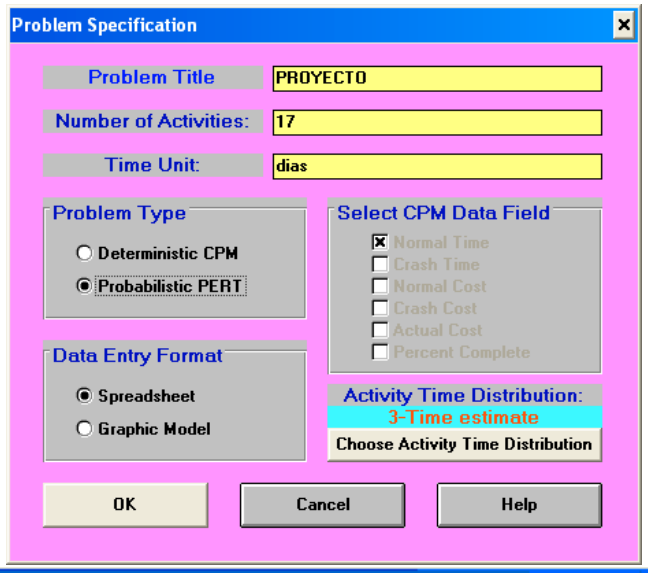
$$P(X \le 20) = P\left[\frac{X-20}{1,83} \le \frac{20-21}{1,83}\right] = P(z \ge 0,5464) = 0,2920 \ \ (29,20\%)$$

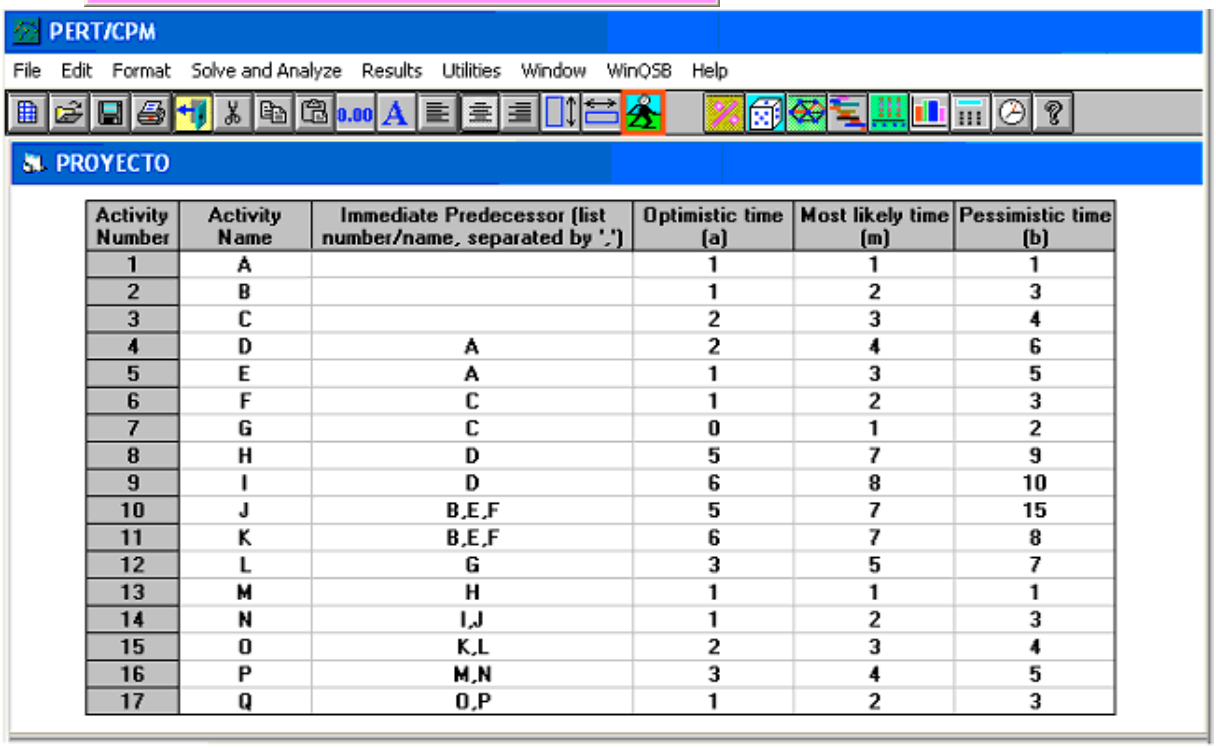
f) Los plazos de ejecución que tienen un 90% de probabilidad de cumplirse son:

$$P(X \le k) = P\left[\frac{X-21}{1,83} \le \frac{k-21}{1,83}\right] = P\left[z \le \frac{k-21}{1,83}\right] = 0,9 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{k-21}{1,83} = 1,28$$

$k = 21 + 1,83 \times 1,28 = 23,34 \quad \rightarrow \quad$ Entre 23 y 24 días

GESTIÓN DE PROYECTOS: REDES PERT





Activity Number	Activity Name	Immediate Predecessor (list number/name, separated by ',')	Optimistic time (a)	Most likely time (m)	Pessimistic time (b)
1	A		1	1	1
2	B		1	2	3
3	C		2	3	4
4	D	A	2	4	6
5	E	A	1	3	5
6	F	C	1	2	3
7	G	C	0	1	2
8	H	D	5	7	9
9	I	D	6	8	10
10	J	B,E,F	5	7	15
11	K	B,E,F	6	7	8
12	L	G	3	5	7
13	M	H	1	1	1
14	N	I,J	1	2	3
15	O	K,L	2	3	4
16	P	M,N	3	4	5
17	Q	O,P	1	2	3

PERT/CPM

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

PROYECTO

	Activity Name	On Critical Path	Activity Mean Time	Earliest Start	Earliest Finish	Latest Start	Latest Finish	Slack (LS-ES)	Activity Time Distribution	Standard Deviation
1	A	Yes	1	0	1	0	1	0	3-Time estimate	0
2	B	no	2	0	2	3	5	3	3-Time estimate	0,3333
3	C	Yes	3	0	3	0	3	0	3-Time estimate	0,3333
4	D	Yes	4	1	5	1	5	0	3-Time estimate	0,6667
5	E	no	3	1	4	2	5	1	3-Time estimate	0,6667
6	F	Yes	2	3	5	3	5	0	3-Time estimate	0,3333
7	G	no	1	3	4	10	11	7	3-Time estimate	0,3333
8	H	no	7	5	12	7	14	2	3-Time estimate	0,6667
9	I	Yes	8	5	13	5	13	0	3-Time estimate	0,6667
10	J	Yes	8	5	13	5	13	0	3-Time estimate	1,6667
11	K	no	7	5	12	9	16	4	3-Time estimate	0,3333
12	L	no	5	4	9	11	16	7	3-Time estimate	0,6667
13	M	no	1	12	13	14	15	2	3-Time estimate	0
14	N	Yes	2	13	15	13	15	0	3-Time estimate	0,3333
15	O	no	3	12	15	16	19	4	3-Time estimate	0,3333
16	P	Yes	4	15	19	15	19	0	3-Time estimate	0,3333
17	Q	Yes	2	19	21	19	21	0	3-Time estimate	0,3333
	Project	Completion	Time	=	21	dias		Holgura		
	Number of	Critical	Path(s)	=	2					

On Critical Path: YES si pertenece a alguna ruta crítica

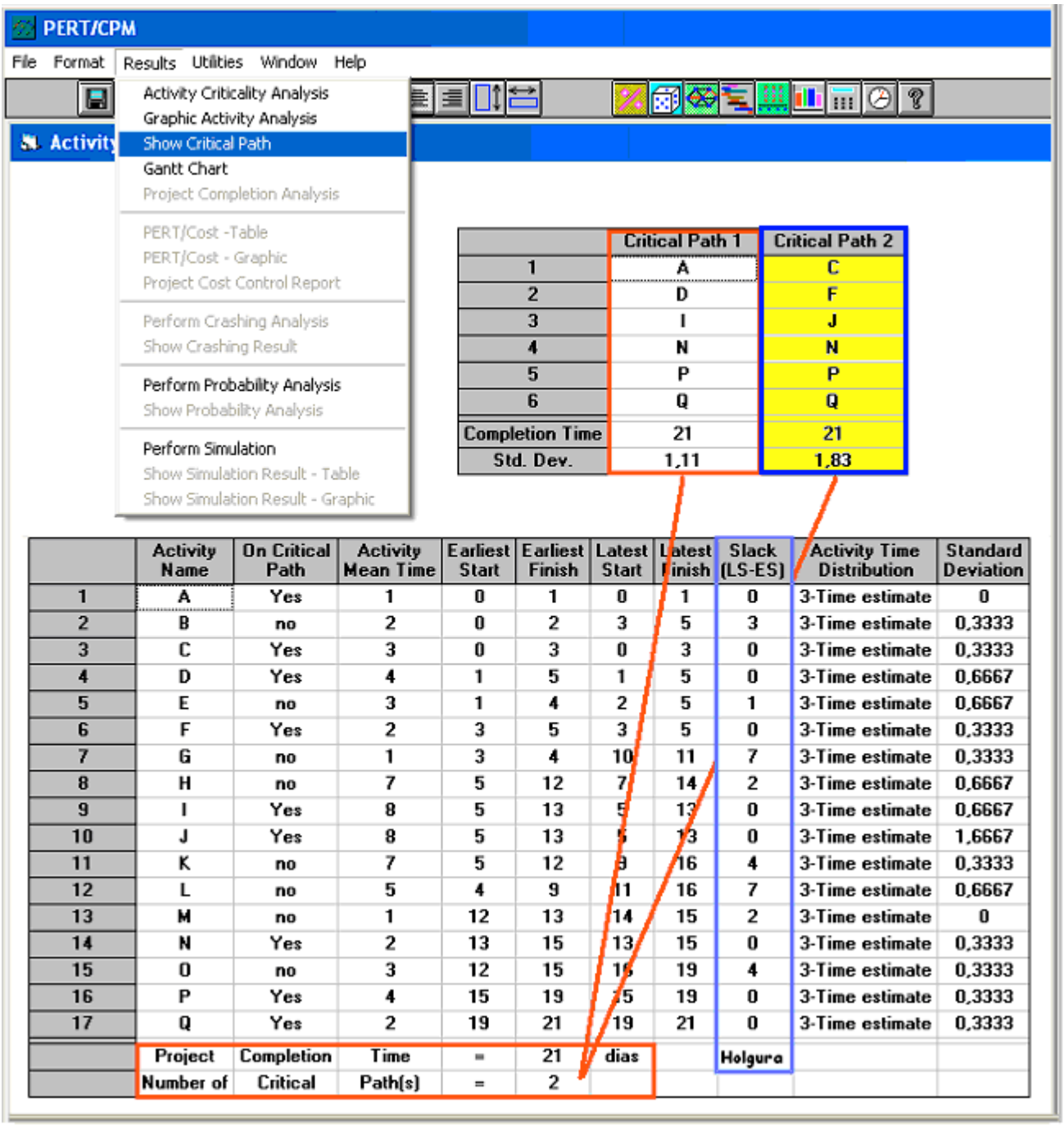
Activity Mean Time: Tiempo Pert

3-time estímate: Tiempo Pert utilizando los tiempos optimista, más probable y pesimista.

Project Completion Time: Tiempo de terminación del proyecto en 38 semanas

Number of Critical Path(s): 2 rutas críticas

Rutas críticas: Results / Show Critical Path



	Critical Path 1	Critical Path 2
1	A	C
2	D	F
3	I	J
4	N	N
5	P	P
6	Q	Q
Completion Time	21	21
Std. Dev.	1,11	1,83

	Activity Name	On Critical Path	Activity Mean Time	Earliest Start	Earliest Finish	Latest Start	Latest Finish	Slack (LS-ES)	Activity Time Distribution	Standard Deviation
1	A	Yes	1	0	1	0	1	0	3-Time estimate	0
2	B	no	2	0	2	3	5	3	3-Time estimate	0,3333
3	C	Yes	3	0	3	0	3	0	3-Time estimate	0,3333
4	D	Yes	4	1	5	1	5	0	3-Time estimate	0,6667
5	E	no	3	1	4	2	5	1	3-Time estimate	0,6667
6	F	Yes	2	3	5	3	5	0	3-Time estimate	0,3333
7	G	no	1	3	4	10	11	7	3-Time estimate	0,3333
8	H	no	7	5	12	7	14	2	3-Time estimate	0,6667
9	I	Yes	8	5	13	5	13	0	3-Time estimate	0,6667
10	J	Yes	8	5	13	5	13	0	3-Time estimate	1,6667
11	K	no	7	5	12	9	16	4	3-Time estimate	0,3333
12	L	no	5	4	9	11	16	7	3-Time estimate	0,6667
13	M	no	1	12	13	14	15	2	3-Time estimate	0
14	N	Yes	2	13	15	13	15	0	3-Time estimate	0,3333
15	O	no	3	12	15	16	19	4	3-Time estimate	0,3333
16	P	Yes	4	15	19	15	19	0	3-Time estimate	0,3333
17	Q	Yes	2	19	21	19	21	0	3-Time estimate	0,3333

La duración del proyecto es de 21 días.

Hay dos rutas críticas: $\cancel{C_1 \equiv A-D-I-N-P-Q}$ y $C_2 \equiv C-F-J-N-P-Q$

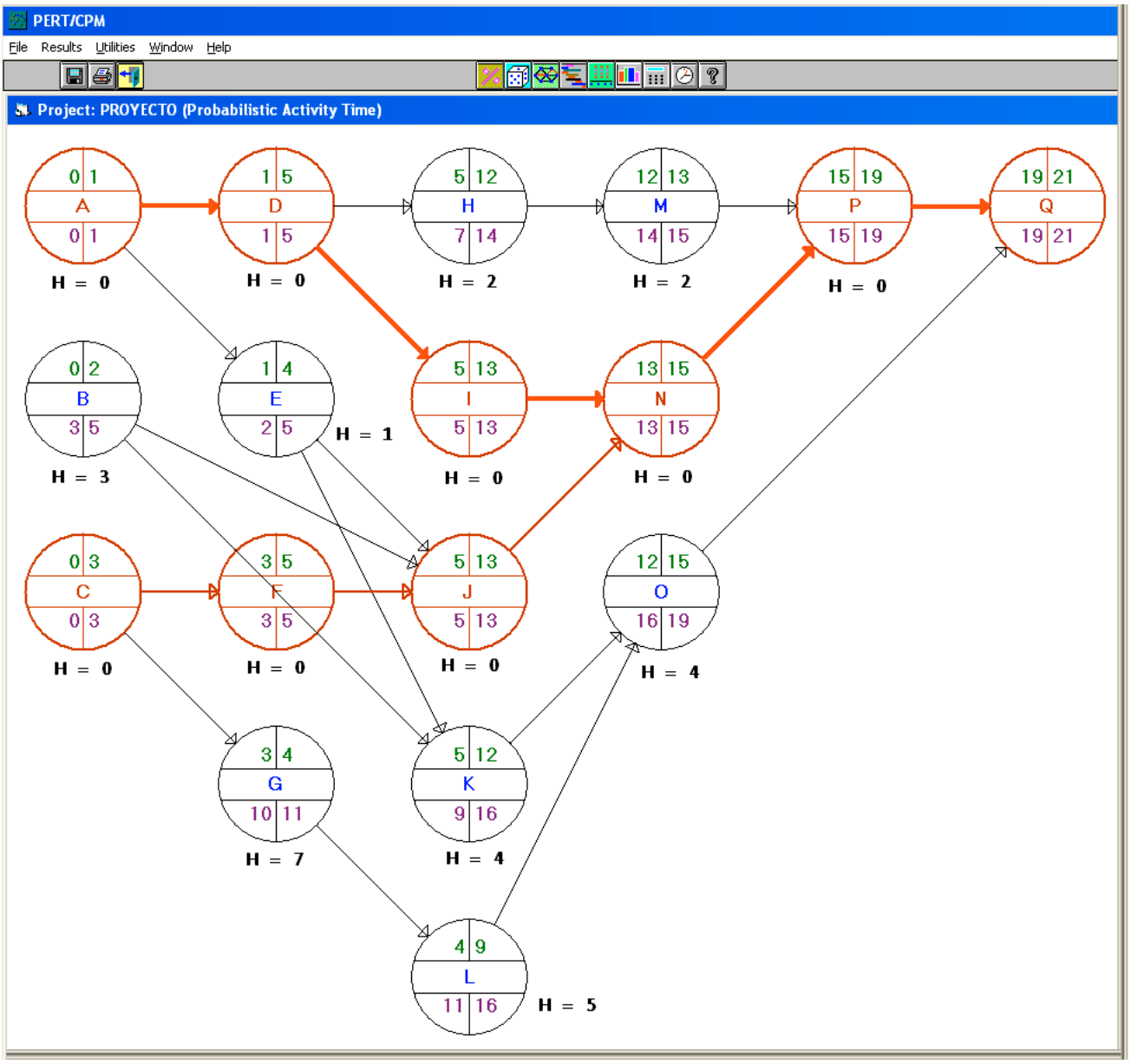
Se elige la ruta crítica con mayor desviación típica: $\sigma_2 = 1{,}83$

La ruta crítica está formada por actividades con holgura cero.

La holgura (H) es la diferencia entre el tiempo más tardío y el tiempo más temprano.

Después de personalizar el gráfico: Format / Switch Graphic Model

Results / Graphic Activity Analysis



b) Las actividades que se pueden retrasar 2 días sin afectar a la duración total del proyecto son aquellas que tienen una holgura $H \geq 2$

Actividades: B , G , H , K , L , M , O

c) Como la actividad J (no tiene holgura: $H = 0$) el proyecto se retrasaría 2 días, los caminos críticos C_1 y C_2 dejarían de serlo. El proyecto sería de 23 días.

PERT/CPM

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

PROYECTO

Activity Number	Activity Name	Immediate Predecessor (list number/name, separated by ',')	Optimistic time (a)	Most likely time (m)	Pessimistic time (b)
1	A		1	1	1
2	B		1	2	3
3	C		2	3	4
4	D	A	2	4	6
5	E	A	1	3	5
6	F	C	1	2	3
7	G	C		1	2
8	H	D	5	7	9
9	I	D	6	8	10
10	J	B,E,F	7	9	17
11	K	B,E,F	6	7	8
12	L	G	3	5	7
13	M	H	1	1	1
14	N	I,J	1	2	3
15	O	K,L	2	3	4
16	P	M,N	3	4	5
17	Q	O,P	1	2	3

	Critical Path 1
1	C
2	F
3	J
4	N
5	P
6	Q
Completion Time	23
Std. Dev.	1,83

	Activity Name	On Critical Path	Activity Mean Time	Earliest Start	Earliest Finish	Latest Start	Latest Finish	Slack (LS-ES)	Activity Time Distribution	Standard Deviation
1	A	no	1	0	1	1	2	1	3-Time estimate	0
2	B	no	2	0	2	3	5	3	3-Time estimate	0,3333
3	C	Yes	3	0	3	0	3	0	3-Time estimate	0,3333
4	D	no	4	1	5	3	7	2	3-Time estimate	0,6667
5	E	no	3	1	4	2	5	1	3-Time estimate	0,6667
6	F	Yes	2	3	5	3	5	0	3-Time estimate	0,3333
7	G	no	1	3	4	12	13	9	3-Time estimate	0,3333
8	H	no	7	5	12	9	16	4	3-Time estimate	0,6667
9	I	no	8	5	13	7	15	2	3-Time estimate	0,6667
10	J	Yes	10	5	15	5	15	0	3-Time estimate	1,6667
11	K	no	7	5	12	11	18	6	3-Time estimate	0,3333
12	L	no	5	4	9	13	18	9	3-Time estimate	0,6667
13	M	no	1	12	13	16	17	4	3-Time estimate	0
14	N	Yes	2	15	17	15	17	0	3-Time estimate	0,3333
15	O	no	3	12	15	18	21	6	3-Time estimate	0,3333
16	P	Yes	4	17	21	17	21	0	3-Time estimate	0,3333
17	Q	Yes	2	21	23	21	23	0	3-Time estimate	0,3333
	Project	Completion	Time	=	23	dias		Holgura		
	Number of	Critical	Path(s)	=	1					

Aparece una nueva ruta crítica $C_3 \equiv C - F - J - N - P - Q$

Adviértase que la actividad H tiene una holgura de 4 días, por lo que la actividad H puede retrasarse 4 días sin alterar la finalización del proyecto en 23 días.

d) Si la actividad M se retrasa 4 días (tiene una holgura de 2 días) retrasaría el proyecto en 2 días, con lo que los caminos críticos C_1 y C_2 dejarían de serlo. El proyecto sería de 23 días.

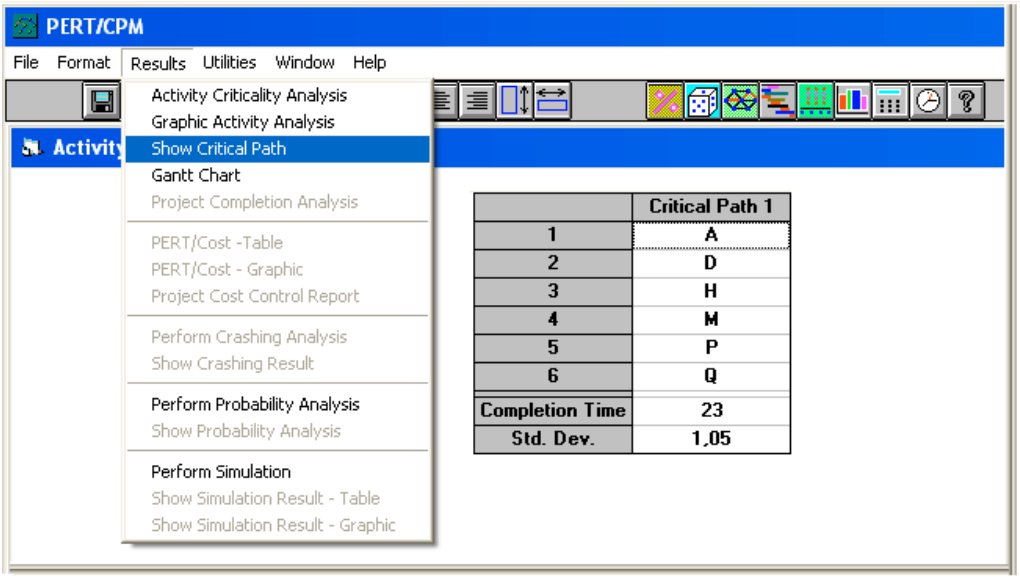
PERT/CPM

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

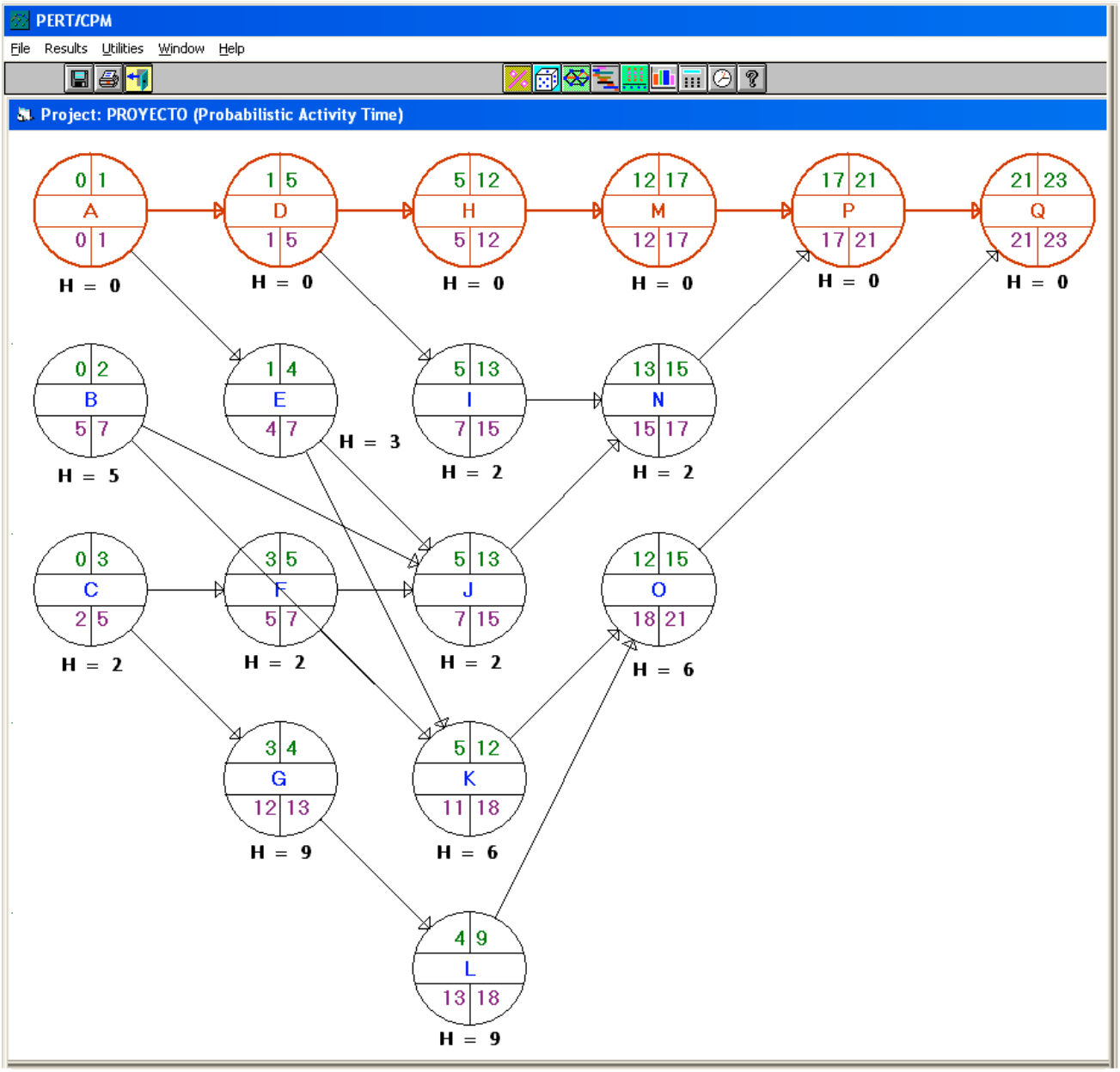
PROYECTO

Activity Number	Activity Name	Immediate Predecessor (list number/name, separated by ',')	Optimistic time (a)	Most likely time (m)	Pessimistic time (b)
1	A		1	1	1
2	B		1	2	3
3	C		2	3	4
4	D	A	2	4	6
5	E	A	1	3	5
6	F	C	1	2	3
7	G	C		1	2
8	H	D	5	7	9
9	I	D	6	8	10
10	J	B,E,F	5	7	15
11	K	B,E,F	6	7	8
12	L	G	3	5	7
13	M	H	5	5	5
14	N	I,J	1	2	3
15	O	K,L	2	3	4
16	P	M,N	3	4	5
17	Q	O,P	1	2	3

	Activity Name	On Critical Path	Activity Mean Time	Earliest Start	Earliest Finish	Latest Start	Latest Finish	Slack (LS-ES)	Activity Time Distribution	Standard Deviation
1	A	Yes	1	0	1	0	1	0	3-Time estimate	0
2	B	no	2	0	2	5	7	5	3-Time estimate	0,3333
3	C	no	3	0	3	2	5	2	3-Time estimate	0,3333
4	D	Yes	4	1	5	1	5	0	3-Time estimate	0,6667
5	E	no	3	1	4	4	7	3	3-Time estimate	0,6667
6	F	no	2	3	5	5	7	2	3-Time estimate	0,3333
7	G	no	1	3	4	12	13	9	3-Time estimate	0,3333
8	H	Yes	7	5	12	5	12	0	3-Time estimate	0,6667
9	I	no	8	5	13	7	15	2	3-Time estimate	0,6667
10	J	no	8	5	13	7	15	2	3-Time estimate	1,6667
11	K	no	7	5	12	11	18	6	3-Time estimate	0,3333
12	L	no	5	4	9	13	18	9	3-Time estimate	0,6667
13	M	Yes	5	12	17	12	17	0	3-Time estimate	0
14	N	no	2	13	15	15	17	2	3-Time estimate	0,3333
15	O	no	3	12	15	18	21	6	3-Time estimate	0,3333
16	P	Yes	4	17	21	17	21	0	3-Time estimate	0,3333
17	Q	Yes	2	21	23	21	23	0	3-Time estimate	0,3333
	Project	Completion	Time	=	23	dias		Holgura		
	Number of	Critical	Path(s)	=	1					



Aparece un nuevo camino crítico: $C_4 \equiv A - D - H - M - P - Q$



Si la actividad J se retrasa 1 día (tiene una holgura de 2 días) no retrasaría el proyecto, quedaría en 23 días, con la ruta crítica : $C_4 \equiv A - D - H - M - P - Q$

PERT/CPM

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

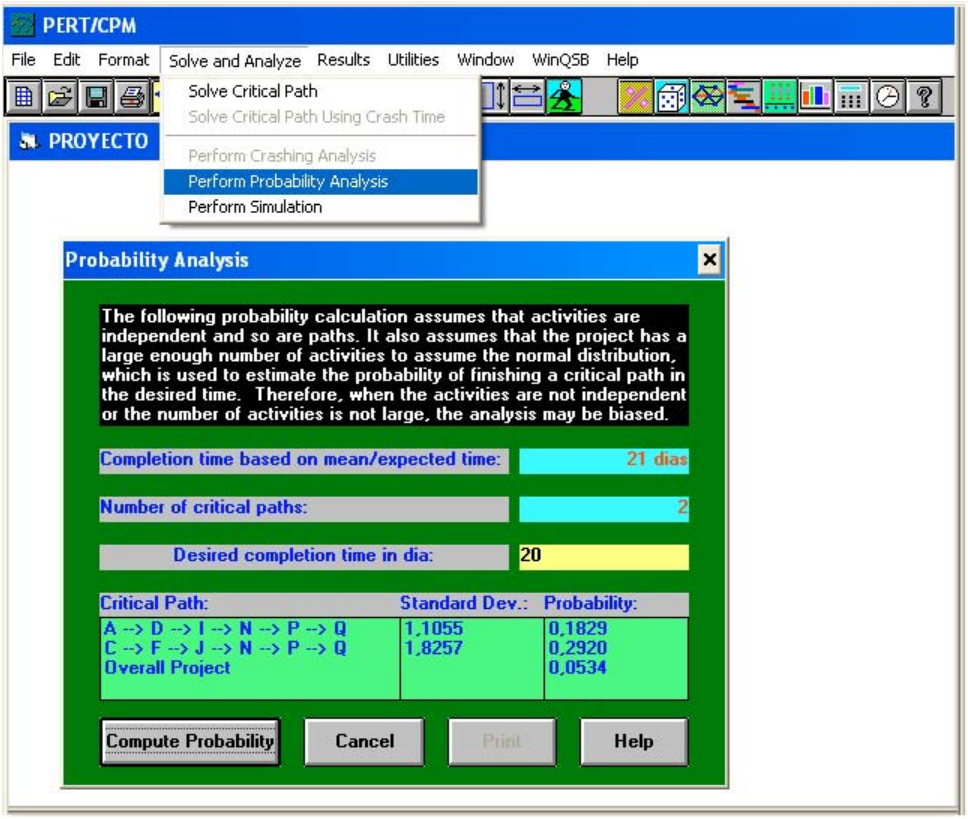
PROYECTO

Activity Number	Activity Name	Immediate Predecessor (list number/name, separated by ',')	Optimistic time (a)	Most likely time (m)	Pessimistic time (b)
1	A		1	1	1
2	B		1	2	3
3	C		2	3	4
4	D	A	2	4	6
5	E	A	1	3	5
6	F	C	1	2	3
7	G	C		1	2
8	H	D	5	7	9
9	I	D	6	8	10
10	J	B,E,F	6	8	16
11	K	B,E,F	6	7	8
12	L	G	3	5	7
13	M	H	5	5	5
14	N	I,J	1	2	3
15	O	K,L	2	3	4
16	P	M,N	3	4	5
17	Q	O,P	1	2	3

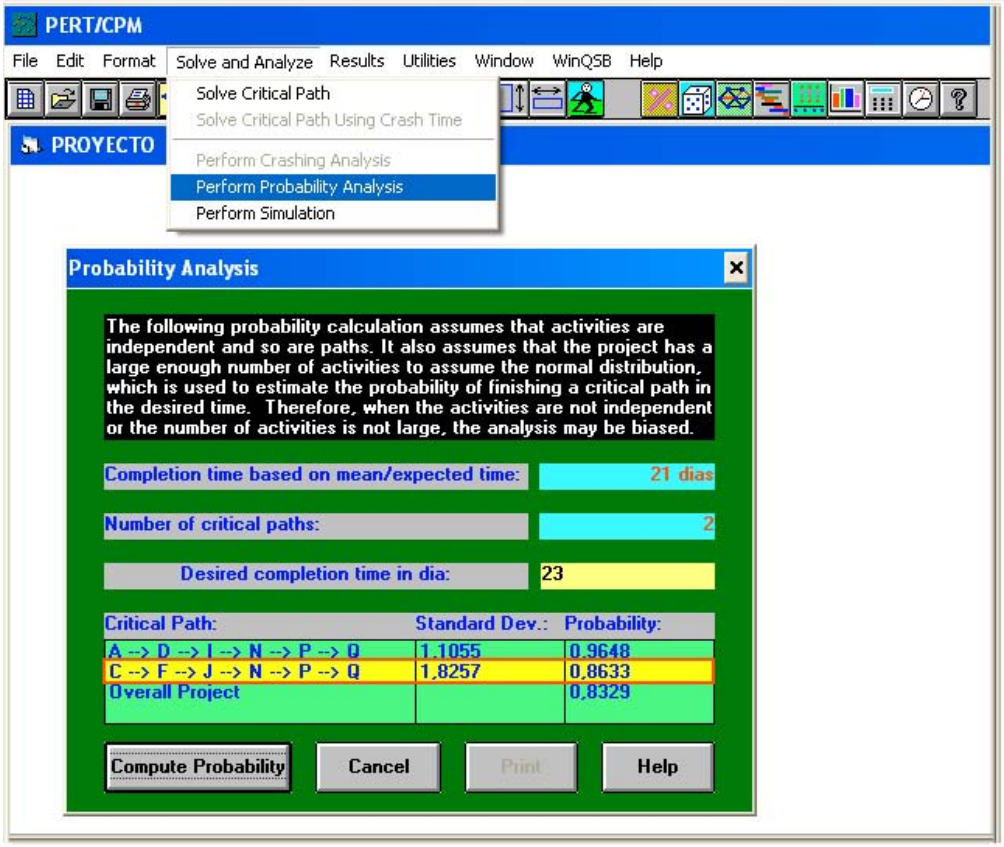
	Critical Path 1
1	A
2	D
3	H
4	M
5	P
6	Q
Completion Time	23
Std. Dev.	1,05

	Activity Name	On Critical Path	Activity Mean Time	Earliest Start	Earliest Finish	Latest Start	Latest Finish	Slack (LS-ES)	Activity Time Distribution	Standard Deviation
1	A	Yes	1	0	1	0	1	0	3-Time estimate	0
2	B	no	2	0	2	4	6	4	3-Time estimate	0,3333
3	C	no	3	0	3	1	4	1	3-Time estimate	0,3333
4	D	Yes	4	1	5	1	5	0	3-Time estimate	0,6667
5	E	no	3	1	4	3	6	2	3-Time estimate	0,6667
6	F	no	2	3	5	4	6	1	3-Time estimate	0,3333
7	G	no	1	3	4	12	13	9	3-Time estimate	0,3333
8	H	Yes	7	5	12	5	12	0	3-Time estimate	0,6667
9	I	no	8	5	13	7	15	2	3-Time estimate	0,6667
10	J	no	9	5	14	6	15	1	3-Time estimate	1,6667
11	K	no	7	5	12	11	18	6	3-Time estimate	0,3333
12	L	no	5	4	9	13	18	9	3-Time estimate	0,6667
13	M	Yes	5	12	17	12	17	0	3-Time estimate	0
14	N	no	2	14	16	15	17	1	3-Time estimate	0,3333
15	O	no	3	12	15	18	21	6	3-Time estimate	0,3333
16	P	Yes	4	17	21	17	21	0	3-Time estimate	0,3333
17	Q	Yes	2	21	23	21	23	0	3-Time estimate	0,3333
	Project	Completion	Time	=	23	dias		Holgura		
	Number of	Critical	Path(s)	=	1					

e) La probabilidad de finalizar el proyecto en 20 días



f) Con la opción Perform Probability Analysis se detecta que con una probabilidad del 90% los plazos de ejecución del proyecto se encuentran entre 23 y 24 días.



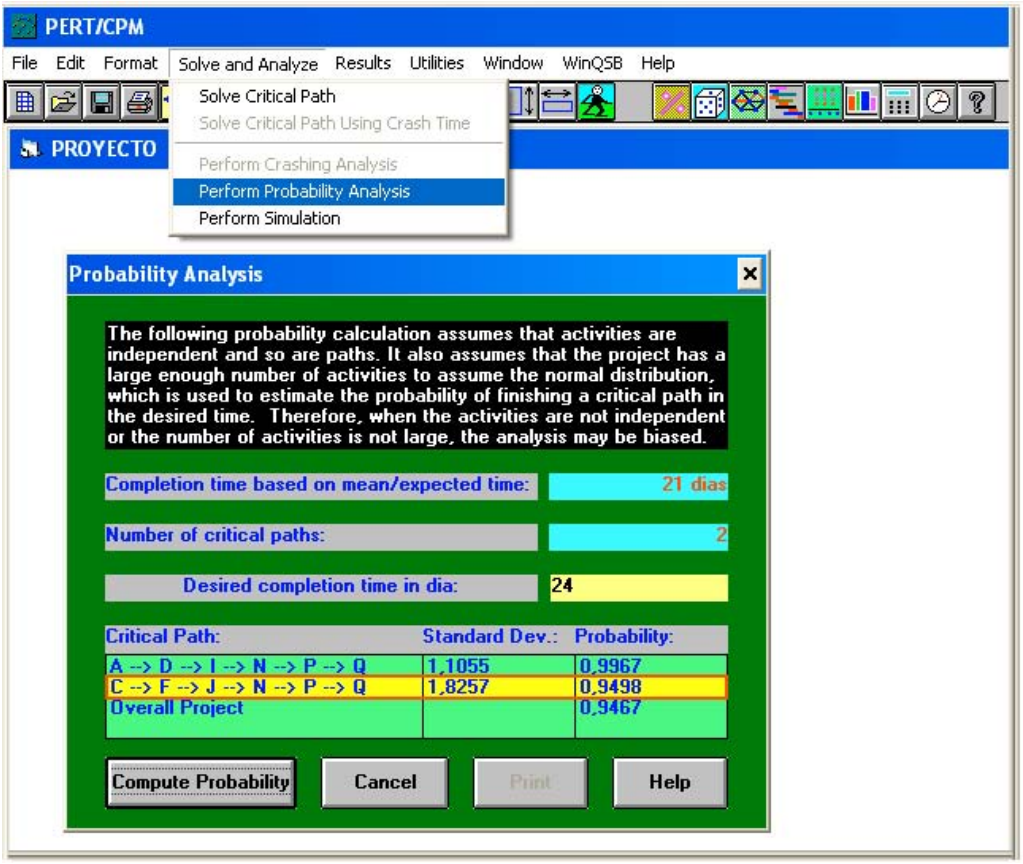
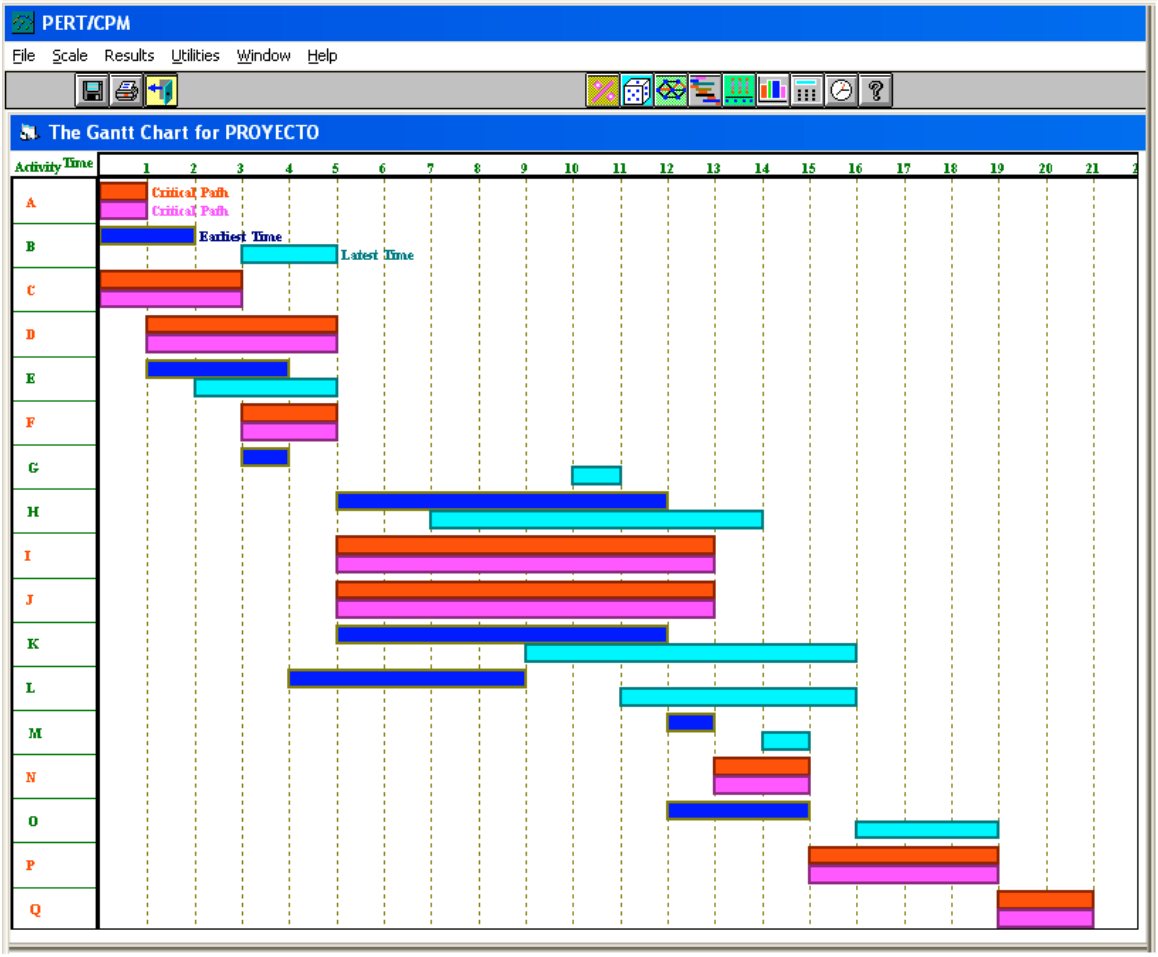


Diagrama de Gantt: Results / Gantt Chart



Una empresa ha añadido un nuevo producto a su línea de distribución. La investigación de mercado que ha realizado indica el volumen de ventas esperado y el tamaño del equipo de ventas necesario. Las actividades que se desarrollarán en semanas se expresan a continuación:

Nodos	Descripción Actividad	Tiempo optimista (a)	Tiempo más probable (m)	Tiempo pesimista (b)
0 – 20	Organizar oficina de ventas	4	5,5	10
20 – 40	Contratar viajantes	2	4	6
40 – 60	Instruir a los viajantes	3	6	15
20 – 50	Seleccionar agencia de publicidad	1	2	3
50 – 70	Planificar campaña publicidad	1	4	7
70 – 90	Dirigir campaña de publicidad	4	10	16
0 – 10	Diseño de envase del producto	1	2	3
10 – 30	Instalar dispositivos de envase	4	10,5	14
30 – 80	Envasar stocks iniciales	4	6	8
0 – 30	Solicitar stocks al fabricante	9	13	17
20 – 60	Seleccionar distribuidores	5	9	13
60 – 80	Vender a los distribuidores	4	5,5	10
80 – 90	Expedir stocks a distribuidores	3	5,5	11

Se pide:

a) El menor número de semanas en las que se puede introducir el nuevo producto.

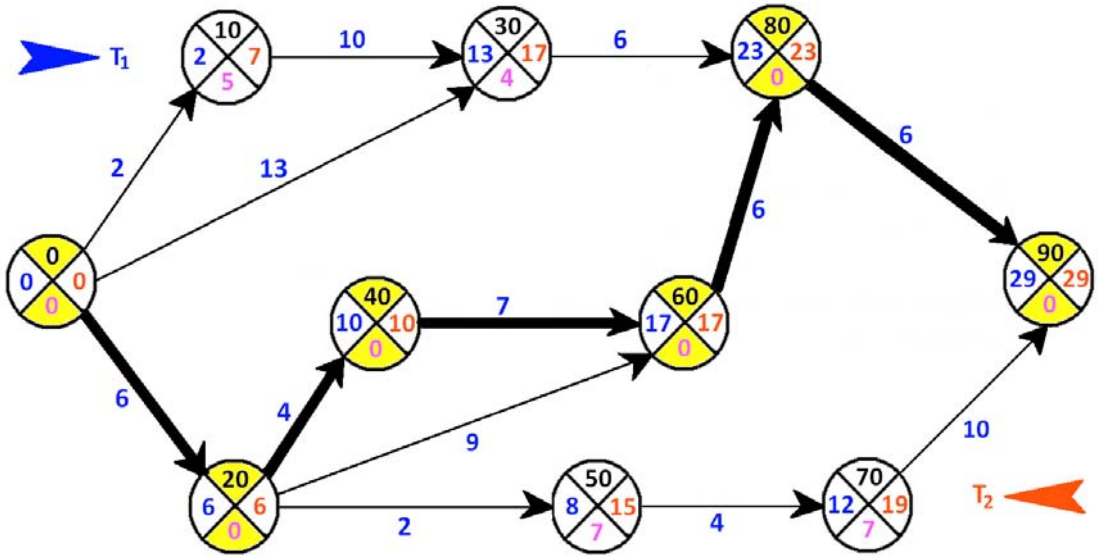
b) Si se contrata viajantes con experiencia pudiendo eliminar el período de instrucción, ¿se puede introducir el nuevo producto 7 semanas antes?

c) ¿Cuál es la probabilidad de terminar el proyecto con la experiencia de los viajantes antes de 30 semanas?

a) Para conocer el menor número de semanas que puede durar el proyecto hay que calcular el camino crítico. Se calcula el tiempo esperado (tiempo Pert) de cada actividad $t_e(A) = \frac{a+4m+b}{6}$ y su varianza $\sigma^2_{t_e} = \frac{(b-a)^2}{36}$ en cada intervalo $[a, b]$

Nodos	Tiempo optimista (a)	Tiempo más probable (m)	Tiempo pesimista (b)	Tiempo Pert t_e	Varianza $\sigma^2_{t_e}$
0 – 20	4	5,5	10	6	1
20 – 40	2	4	6	4	0,44
40 – 60	3	6	15	7	4
20 – 50	1	2	3	2	0,11
50 – 70	1	4	7	4	1
70 – 90	4	10	16	10	4
0 – 10	1	2	3	2	0,11
10 – 30	4	10,5	14	10	2,78
30 – 80	4	6	8	6	0,44
0 – 30	9	13	17	13	1,78
20 – 60	5	9	13	9	1,78
60 – 80	4	5,5	10	6	1
80 – 90	3	5,5	11	6	1,78

El Grafo Pert queda determinando los tiempos más tempranos (Early) y tardíos (Last) y holgura de cada actividad:



El Grafo Pert determinando los tiempos más tempranos (Early) y tardíos (Last) y holgura de cada actividad.

El camino crítico es el que tiene mayor duración entre los nodos inicial y final, coincide con la duración mínima del proyecto. Queda determinado por las actividades críticas en donde loa tiempos Early y Last son iguales (situaciones críticas, con holgura cero), aquellas que no admiten retraso en su ejecución ya que esto implicaría un retraso general del proyecto.

Toda actividad crítica comienza y finaliza en sucesos críticos, el recíproco no es cierto.

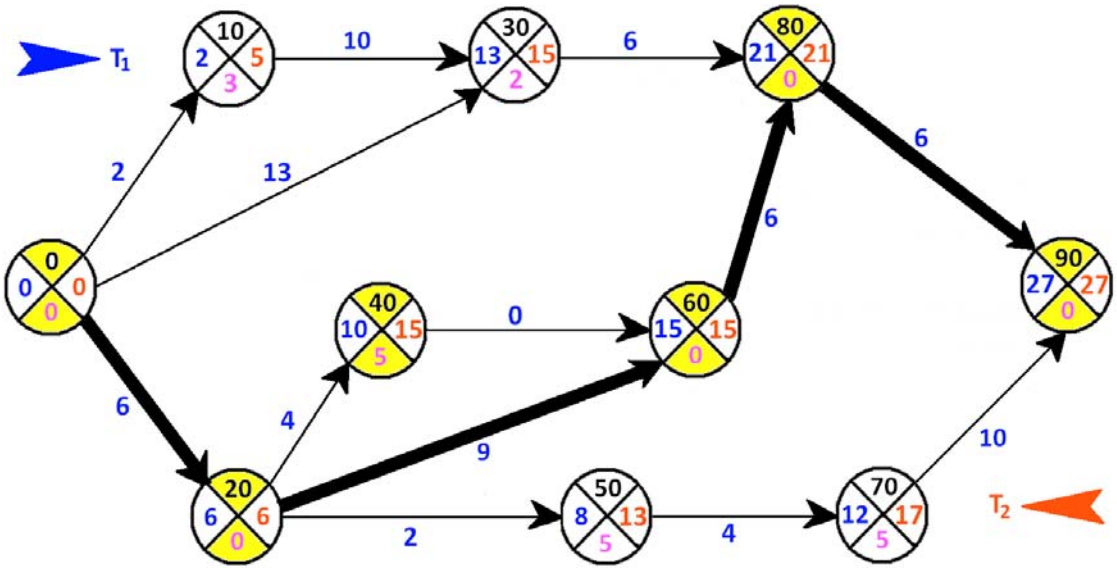
La actividad (20 – 60) comienza con el suceso 20 y finaliza con el suceso 60, ambos sucesos son críticos, pero no lo es la actividad (20 – 60).

El camino crítico (0 – 20 – 40 – 60 – 80 – 90) de longitud 29 semanas, es la parte del proyecto que hay que vigilar con mayor atención, puesto que es la parte donde pueden aparecer problemas de retraso en la realización del proyecto planificado.

El menor número de semanas en el que puede introducirse el nuevo producto es de 29 semanas.

b) Al seleccionar viajantes con experiencia se puede suprimir el período de instrucción, en consecuencia, la duración de la actividad (40 – 60) es cero.

Se dibuja nuevamente la red PERT y determinar los tiempos tempranos y tardíos de cada suceso.



El camino crítico ha cambiado (0 – 20 – 60 – 80 – 90) y el menor número de semanas en que puede introducirse el nuevo producto es 27, es decir, puede estar en el mercado 2 semanas antes.

c) La duración del proyecto y el error que se comete (desviación típica del proyecto) contratando viajantes con experiencia:

$$\mu_{Proyecto} = t_e(0-20) + t_e(20-60) + t_e(60-80) + t_e(80-90) = 6+9+6+6 = 27 \text{ semanas}$$

$$\sigma^2_{Proyecto} = \sigma^2_{0-20} + \sigma^2_{20-60} + \sigma^2_{60-80} + \sigma^2_{80-90} = 1+1{,}78+1+1{,}78 = 5{,}56 \text{ semanas}^2$$

$$\sigma_{Proyecto} = \sqrt{5{,}56} = 2{,}36 \text{ semanas}$$

La distribución del tiempo de finalización del proyecto, de acuerdo con el Teorema Central del Límite (TCL), sigue una distribución normal N(27, 2,36)

La probabilidad de finalizar el proyecto antes de 30 semanas será:

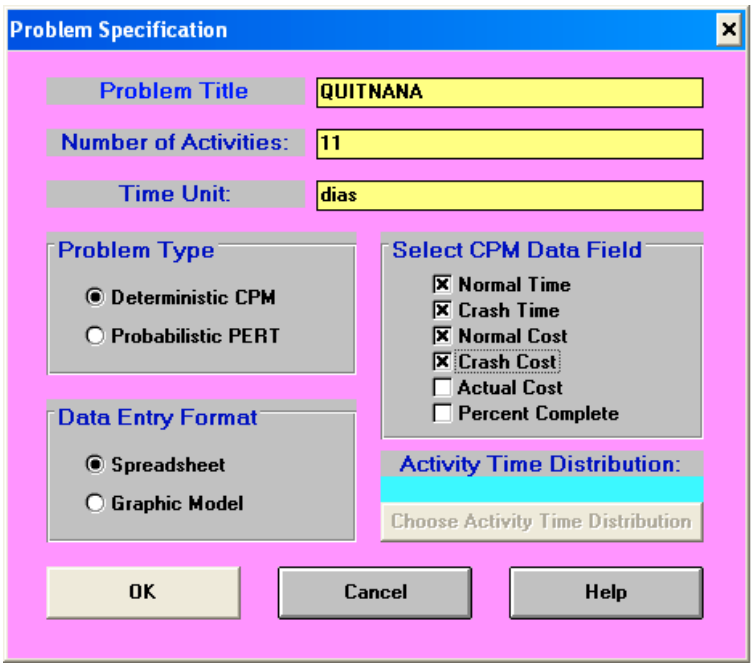
$$P(X \le 30) = P\left[\frac{X-27}{2{,}36} \le \frac{30-27}{2{,}36}\right] = P(z \le 1{,}27) = 0{,}898 \ \ (89{,}8\%)$$

La empresa Quintana S.A. programó 11 actividades para el asfaltado de la pista de aterrizaje de un aeropuerto. En la tabla adjunta se refleja la duración en días y las precedencias establecidas.

Actividad	Asignación	Predecesores	Tiempos		Costes	
			Normal	Quiebre	Normal	Quiebre
Excavación	A	----	15	10	1000	1200
Sub-Base	B	A	7	6	3000	3500
Compactación	C	B	2	2	700	700
Base	D	C	4	2	1200	2400
Compactación	E	D	1	1	700	700
Canaletas	F	C	6	3	1500	2700
Pegante	G	A , E	1	1	1100	1100
Capa asfalto	H	F, G	3	2	4700	5200
Compactación	I	H	1	1	800	800
Pruebas Base	J	E	2	1	400	1100
Pruebas Asfalto	K	I	2	1	900	1300

a) Construir una red de proyectos incluyendo un análisis de tiempo/coste
b) Analizar el proyecto hasta el día 26 de ejecución.
c) El contrato con la empresa establece que si finaliza el proyecto antes 30 días recibe 2500 dólares por día anticipado, mientras que si lo termina después de este tiempo tiene una sanción de 5.000 dólares por día incumplido. ¿Cuándo deberían finalizar las actividades a mínimo costo?

GESTIÓN DE PROYECTOS: CPM - Problem Specification



Normal Time: Permite especificar el tiempo normal de cada actividad.

Crash Time: Tiempo mínimo en que se podría reducir una actividad.

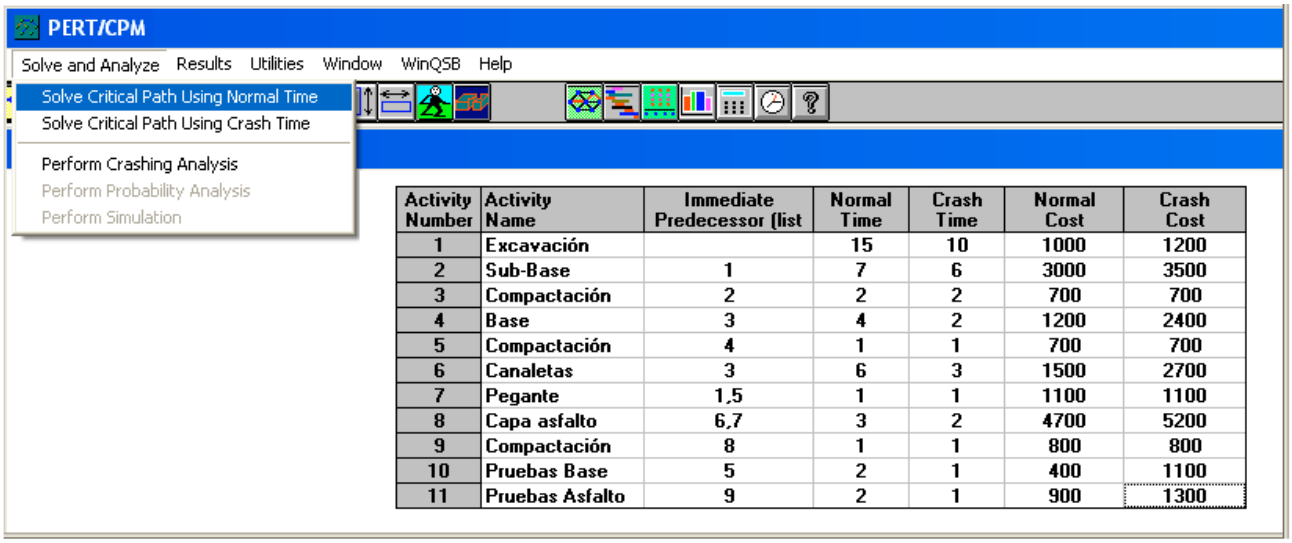
Normal Cost: Costo para realizar una actividad ejecutada en un tiempo normal, este costo es presupuestado.

Actual Cost: Costo de una actividad real.

Percent Complete: Realiza un análisis de costos y tiempos de forma parcial o total a un proyecto que ha sido ejecutado.

a) Se obtiene la ruta crítica introduciendo los tiempos normales.

Con la opción Solve and Analyze / Solve Critical Path Using Normal Time se obtiene la solución óptima.

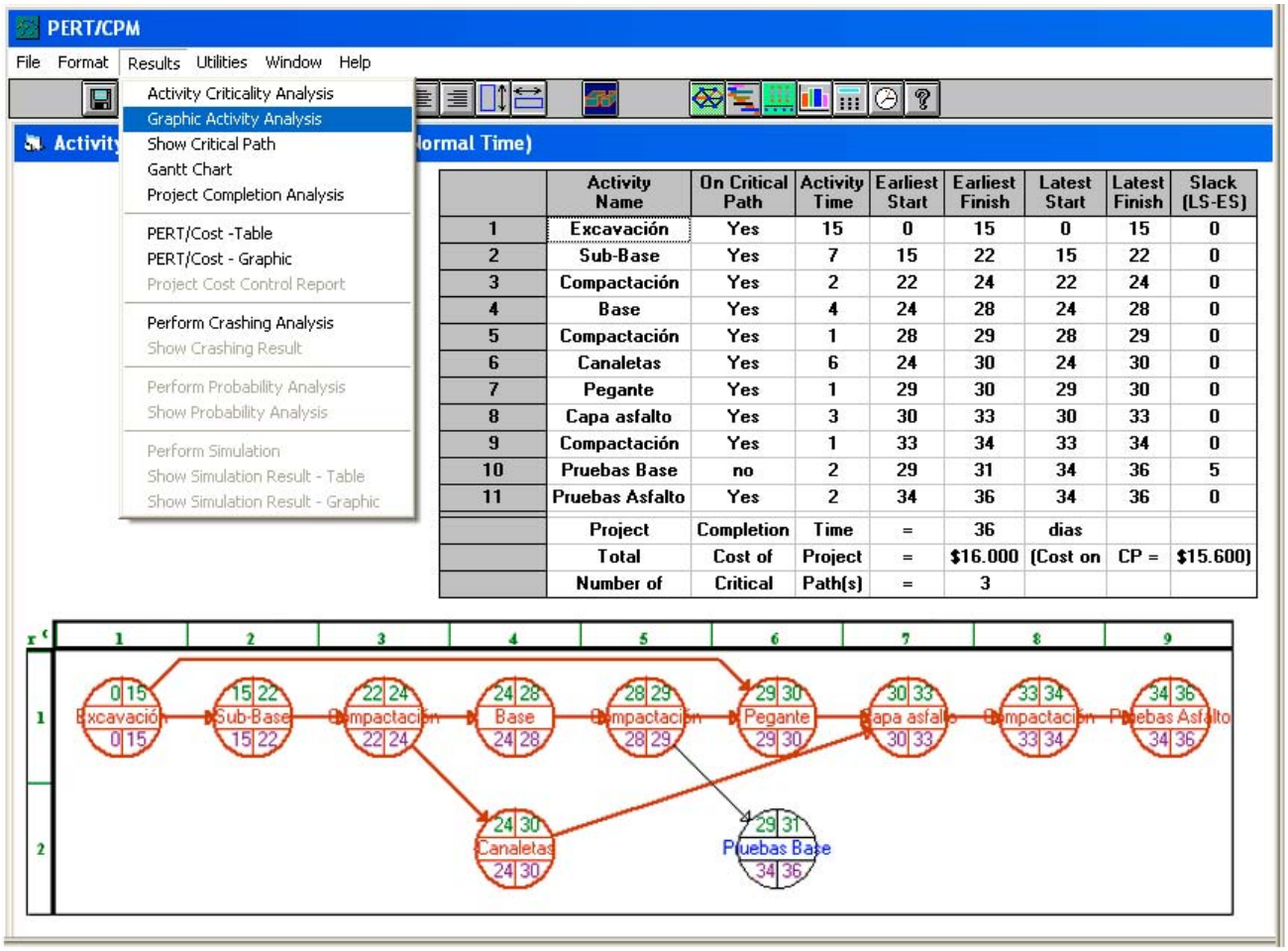


Activity Number	Activity Name	Immediate Predecessor (list	Normal Time	Crash Time	Normal Cost	Crash Cost
1	Excavación		15	10	1000	1200
2	Sub-Base	1	7	6	3000	3500
3	Compactación	2	2	2	700	700
4	Base	3	4	2	1200	2400
5	Compactación	4	1	1	700	700
6	Canaletas	3	6	3	1500	2700
7	Pegante	1,5	1	1	1100	1100
8	Capa asfalto	6,7	3	2	4700	5200
9	Compactación	8	1	1	800	800
10	Pruebas Base	5	2	1	400	1100
11	Pruebas Asfalto	9	2	1	900	1300

	Activity Name	On Critical Path	Activity Time	Earliest Start	Earliest Finish	Latest Start	Latest Finish	Slack (LS-ES)
1	Excavación	Yes	15	0	15	0	15	0
2	Sub-Base	Yes	7	15	22	15	22	0
3	Compactación	Yes	2	22	24	22	24	0
4	Base	Yes	4	24	28	24	28	0
5	Compactación	Yes	1	28	29	28	29	0
6	Canaletas	Yes	6	24	30	24	30	0
7	Pegante	Yes	1	29	30	29	30	0
8	Capa asfalto	Yes	3	30	33	30	33	0
9	Compactación	Yes	1	33	34	33	34	0
10	Pruebas Base	no	2	29	31	34	36	5
11	Pruebas Asfalto	Yes	2	34	36	34	36	0
	Project	Completion	Time	=	36	dias		
	Total	Cost of	Project	=	$16.000	(Cost on	CP =	$15.600)
	Number of	Critical	Path(s)	=	3			

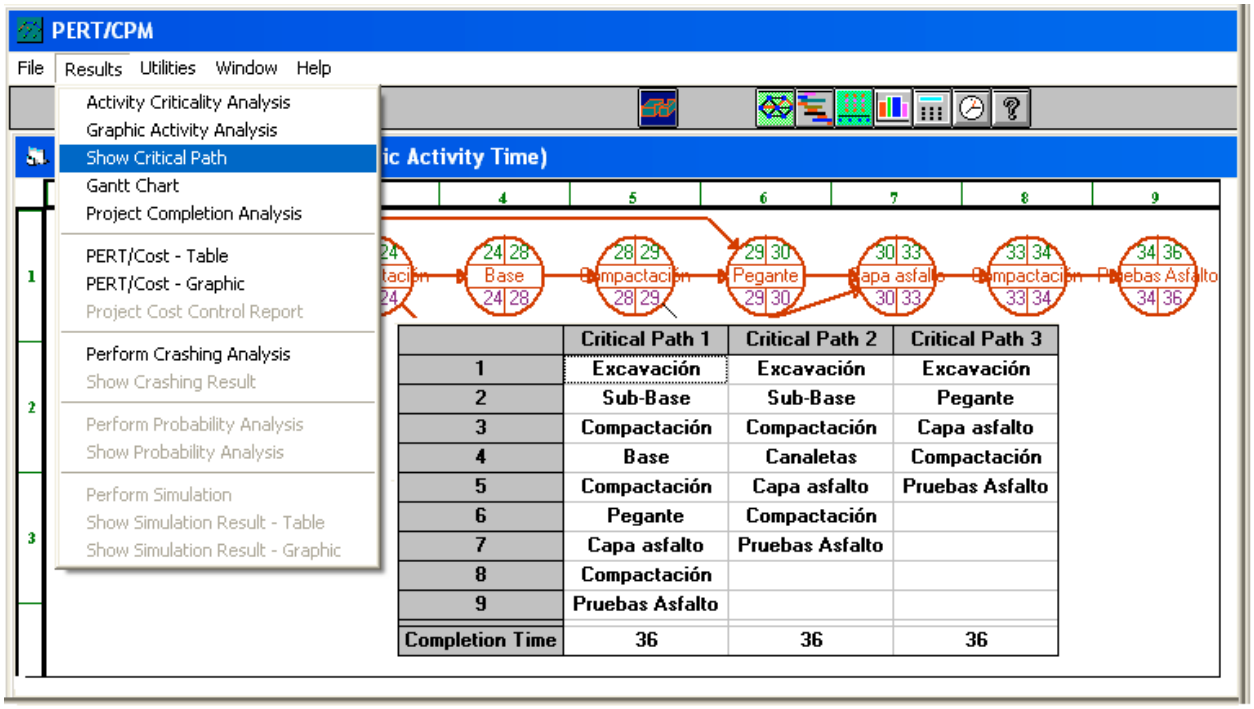
On Critical Path: Actividades críticas de la red
Earliest Start - Earliest Finish: Tiempos más próximos de inicio y finalización
Latest Start y Latest Finish: Tiempos tardíos
Slack: Tiempos de holgura
Project Completion Time: Tiempo de duración total del proyecto
Number of Critical Path: 3 rutas críticas

Para obtener la ruta crítica en modo gráfico: Results / Graphic Activity Analysis



	Activity Name	On Critical Path	Activity Time	Earliest Start	Earliest Finish	Latest Start	Latest Finish	Slack (LS-ES)
1	Excavación	Yes	15	0	15	0	15	0
2	Sub-Base	Yes	7	15	22	15	22	0
3	Compactación	Yes	2	22	24	22	24	0
4	Base	Yes	4	24	28	24	28	0
5	Compactación	Yes	1	28	29	28	29	0
6	Canaletas	Yes	6	24	30	24	30	0
7	Pegante	Yes	1	29	30	29	30	0
8	Capa asfalto	Yes	3	30	33	30	33	0
9	Compactación	Yes	1	33	34	33	34	0
10	Pruebas Base	no	2	29	31	34	36	5
11	Pruebas Asfalto	Yes	2	34	36	34	36	0
	Project	Completion	Time	=	36	dias		
	Total	Cost of	Project	=	$16.000	(Cost on	CP =	$15.600)
	Number of	Critical	Path(s)	=	3			

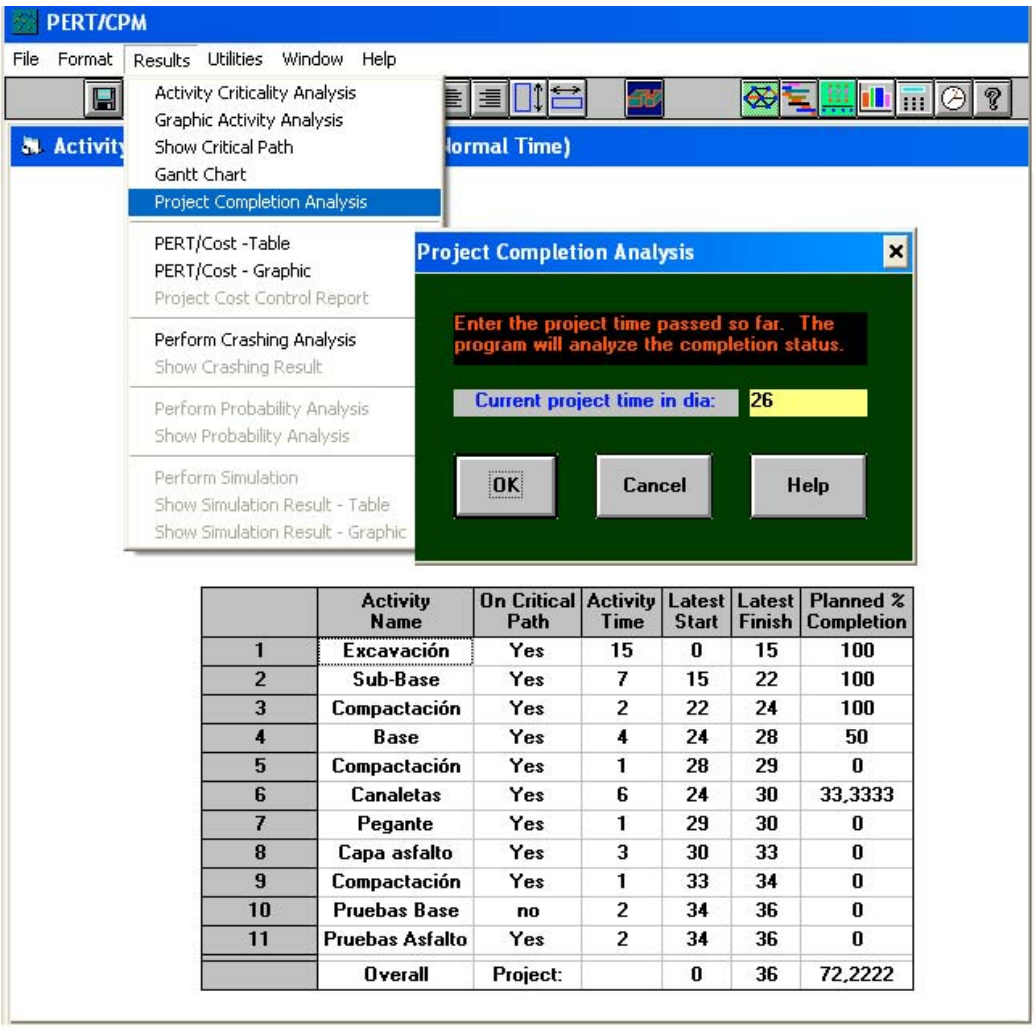
Para ver las actividades pertenecientes a la ruta crítica: Results / Show Critical Path



	Critical Path 1	Critical Path 2	Critical Path 3
1	Excavación	Excavación	Excavación
2	Sub-Base	Sub-Base	Pegante
3	Compactación	Compactación	Capa asfalto
4	Base	Canaletas	Compactación
5	Compactación	Capa asfalto	Pruebas Asfalto
6	Pegante	Compactación	
7	Capa asfalto	Pruebas Asfalto	
8	Compactación		
9	Pruebas Asfalto		
Completion Time	36	36	36

b) Con el análisis del estado del proyecto se pueden analizar las actividades que han sido ejecutadas o que se encuentran en ejecución una vez pasado cierto tiempo de tiempo.

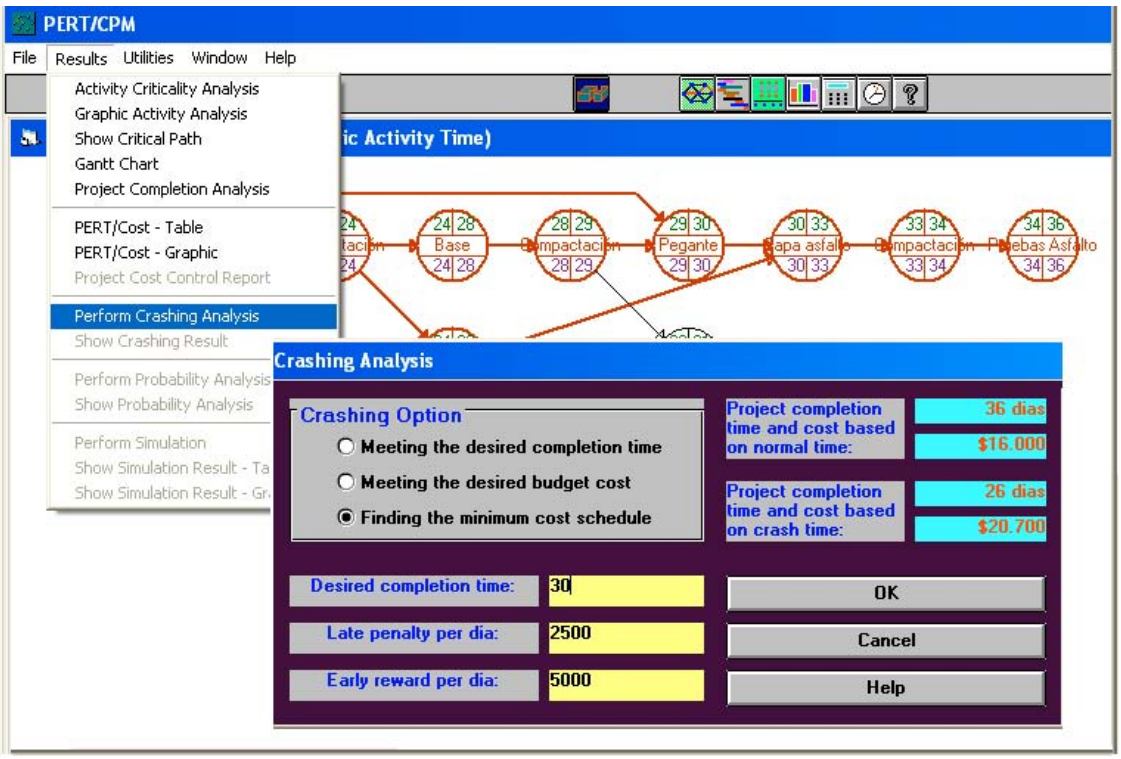
Opción: Results / Project Completion Analysis



	Activity Name	On Critical Path	Activity Time	Latest Start	Latest Finish	Planned % Completion
1	Excavación	Yes	15	0	15	100
2	Sub-Base	Yes	7	15	22	100
3	Compactación	Yes	2	22	24	100
4	Base	Yes	4	24	28	50
5	Compactación	Yes	1	28	29	0
6	Canaletas	Yes	6	24	30	33,3333
7	Pegante	Yes	1	29	30	0
8	Capa asfalto	Yes	3	30	33	0
9	Compactación	Yes	1	33	34	0
10	Pruebas Base	no	2	34	36	0
11	Pruebas Asfalto	Yes	2	34	36	0
	Overall	Project:		0	36	72,2222

Hasta el día 26 de ejecución del proyecto las actividades 1, 2 y 3 se encuentran terminadas, la actividad 4 se encuentra terminada al 50%, y la actividad 6 está completa en un 33,33%.
La ejecución total del proyecto se encuentra finalizado en un 72,22%.

c) Para analizar las costos sobre el proyecto: Results / Perform Crashing Analysis



Opciones para el análisis:

- Meeting the Desired Completion Time: Fijado el tiempo deseado para finalizar el proyecto determinar la secuencia de ejecución así como el coste estimado.
  Desired Completion Time: Fijado el coste del proyecto determinar la secuencia y duración.
  Late Penalty per Día: Multa por retraso
  Early Reward per Día: Recompensa si finaliza antes

- Meeting the Desired Budget Cost: Conociendo el presupuesto deseado
  Desired Budget Cost: Costo deseado presupuestado
  Modifica tiempo de las actividades (normal, quiebre)

- Finding the Minimun Cost Schedule: Determinar la secuencia de mínimo coste.

Se genera una tabla donde aparece el tiempo ideal en que se deben ejecutar las actividades.

PERT/CPM

File Format Results Utilities Window Help

Crashing Analysis for QUINTANA

	Activity Name	Critical Path	Normal Time	Crash Time	Suggested Time	Additional Cost	Normal Cost	Suggested Cost
1	Excavación	Yes	15	10	10	$200	$1.000	$1.200
2	Sub-Base	Yes	7	6	6	$500	$3.000	$3.500
3	Compactación	Yes	2	2	2	0	$700	$700
4	Base	Yes	4	2	2	$1.200	$1.200	$2.400
5	Compactación	Yes	1	1	1	0	$700	$700
6	Canaletas	Yes	6	3	4	$800	$1.500	$2.300
7	Pegante	Yes	1	1	1	0	$1.100	$1.100
8	Capa asfalto	Yes	3	2	2	$500	$4.700	$5.200
9	Compactación	Yes	1	1	1	0	$800	$800
10	Pruebas Base	no	2	1	2	0	$400	$400
11	Pruebas Asfalto	Yes	2	1	1	$400	$900	$1.300
	Early	Reward:						($20.000)
	Overall	Project:			26	$3.600	$16.000	($400)

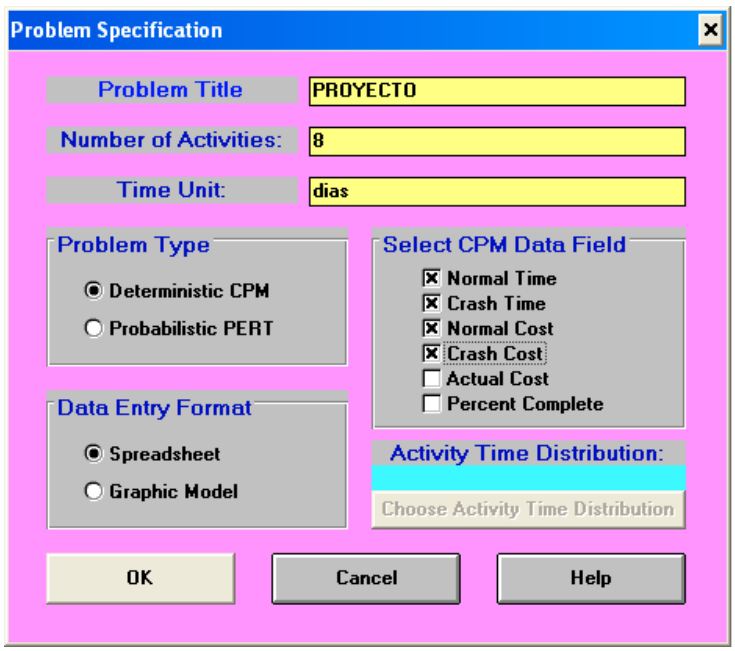
Si el proyecto termina en 26 días hay un ahorro de 20.000 euros.

Un proyecto aeroportuario está formado por 8 actividades, en la tabla adjunta aparece el orden en que deben ejecurtarse, donde los tiempos necesarios se reflejan en días y los costes en miles de euros.

Asignación	Predecesores	Tiempos		Costes	
		Normal	Quiebre	Normal	Quiebre
A	----	5	5	3	3
B	----	6	5	7	8
C	A , B	2	1	9	12
D	A , B	9	6	5	8
E	C	4	4	6	6
F	C , D	6	4	3	6
G	C , D	8	8	7	7
H	F , G	1	1	8	8

(a) Calcular las rutas crítica y el diagrama de Gantt
(b) Analizar el proyecto a los 19 días del comienzo de la actividad
(c) Obtener un gráfico y una tabla con la evolución de los costes a lo largo del proyecto

GESTIÓN DE PROYECTOS: CPM - Problem Specification



a) Introducidos los datos, La ruta crítica se obtiene con la opción:
Solve and Analyze / Solve Critical Path

	Activity Name	On Critical Path	Activity Time	Earliest Start	Earliest Finish	Latest Start	Latest Finish	Slack (LS-ES)
1	A	no	5	0	5	1	6	1
2	B	Yes	6	0	6	0	6	0
3	C	no	2	6	8	13	15	7
4	D	Yes	9	6	15	6	15	0
5	E	no	4	8	12	20	24	12
6	F	no	6	15	21	17	23	2
7	G	Yes	8	15	23	15	23	0
8	H	Yes	1	23	24	23	24	0
	Project	Completion	Time	=	24	dias		
	Number of	Critical	Path(s)	=	1			

Earliest Start → Tiempo más temprano en el que puede comenzar una actividad

Earliest Finish = Earliest Start + t_{ij} → Tiempo más temprano en que puede terminar la actividad

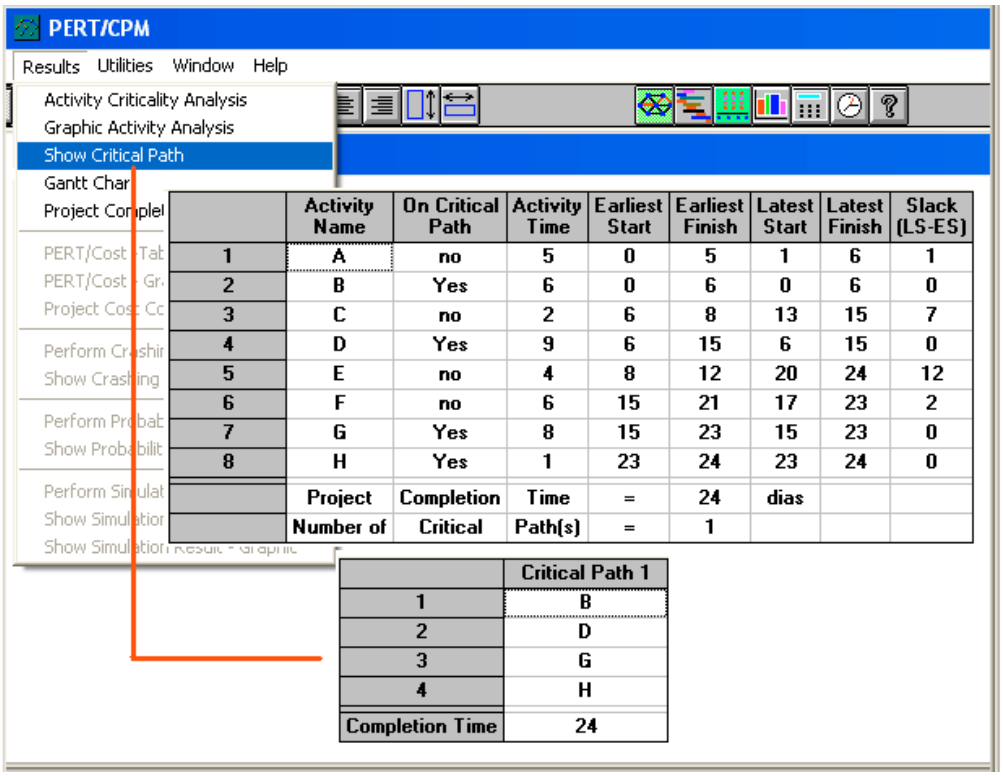
Latest Start = TT – t_{ij} → Tiempo más tardío en el que puede comenzar la actividad

Latest Finish → Tiempo más tardío en el que puede terminar la actividad

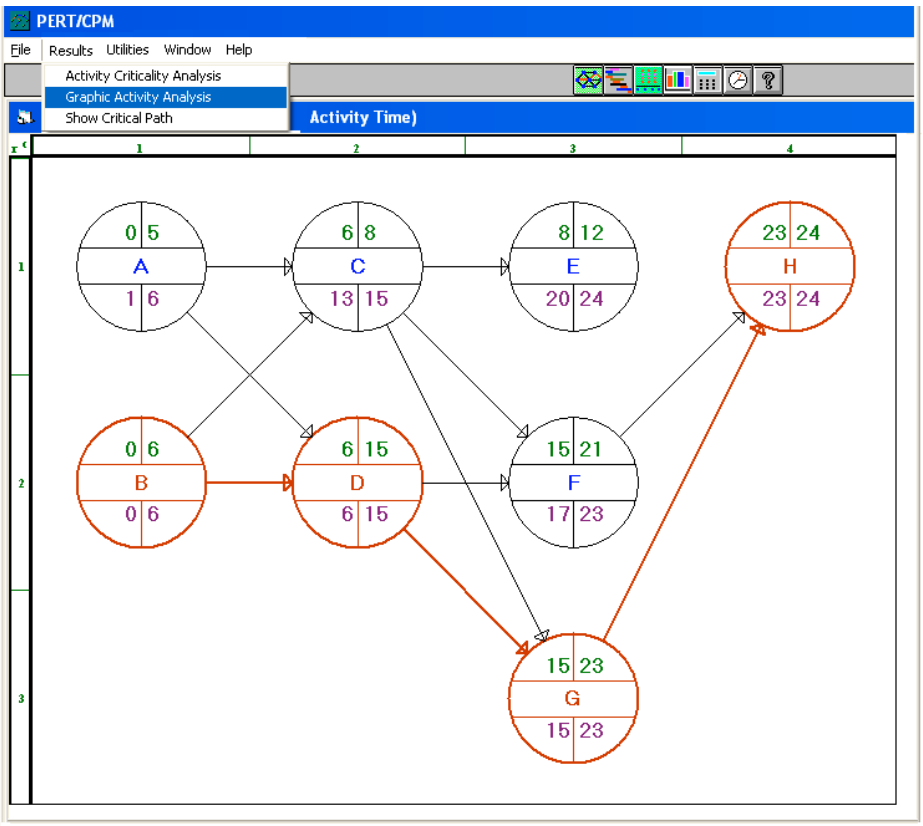
Slack → Hogura

La duración del proyecto es de 24 días y solo existe una ruta crítica.

- Actividades pertenecientes a la ruta crítica: Results / Show Critical Path



- Gráfico de la red: { Solve and Analyze / Solve Critical Path
  Results / Graphics Activity Analisys

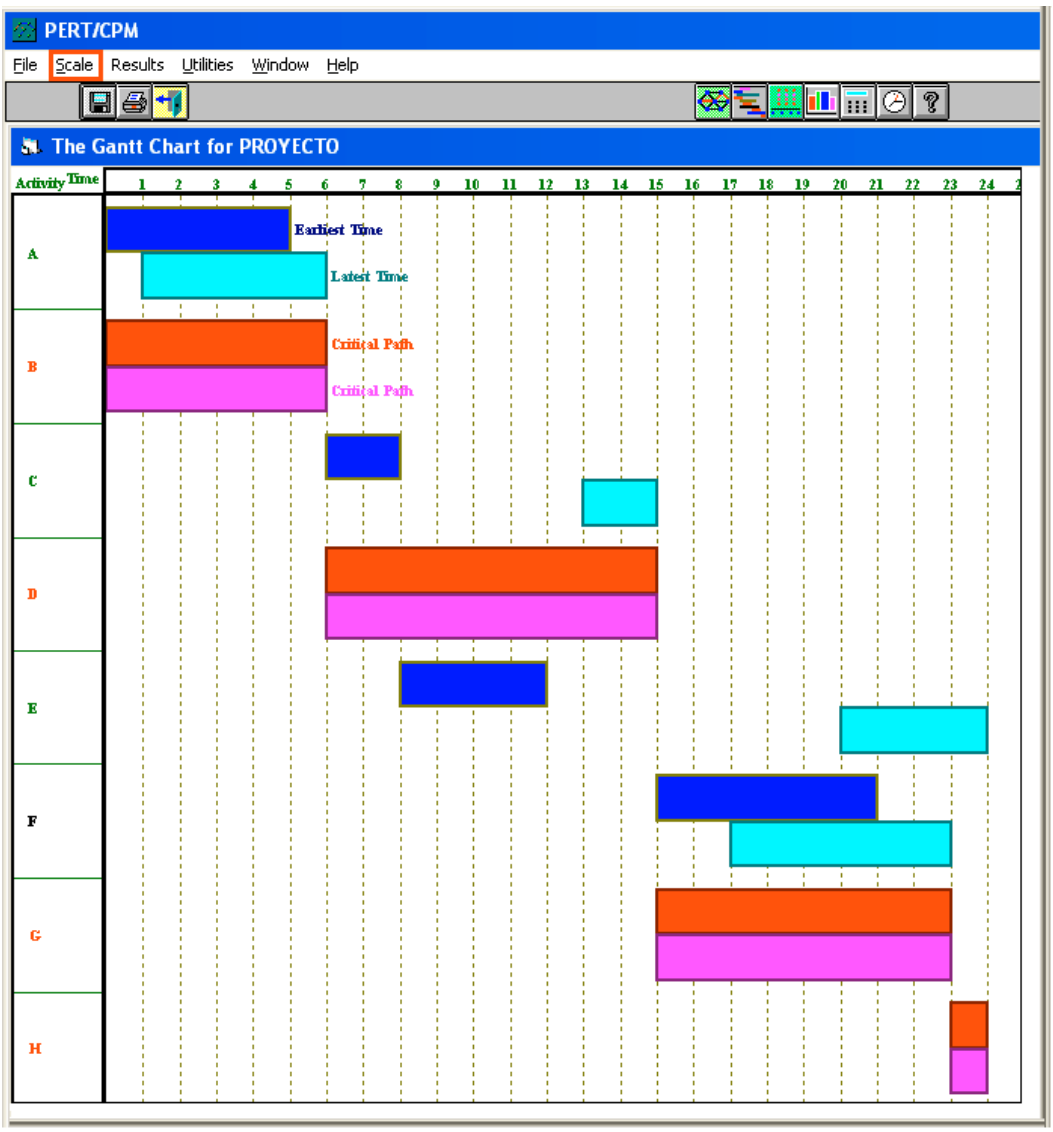


La ruta crítica (B – D – G – H) está formada por las actividades con holgura cero, cuya demora produciría un aumento en la duración del proyecto.

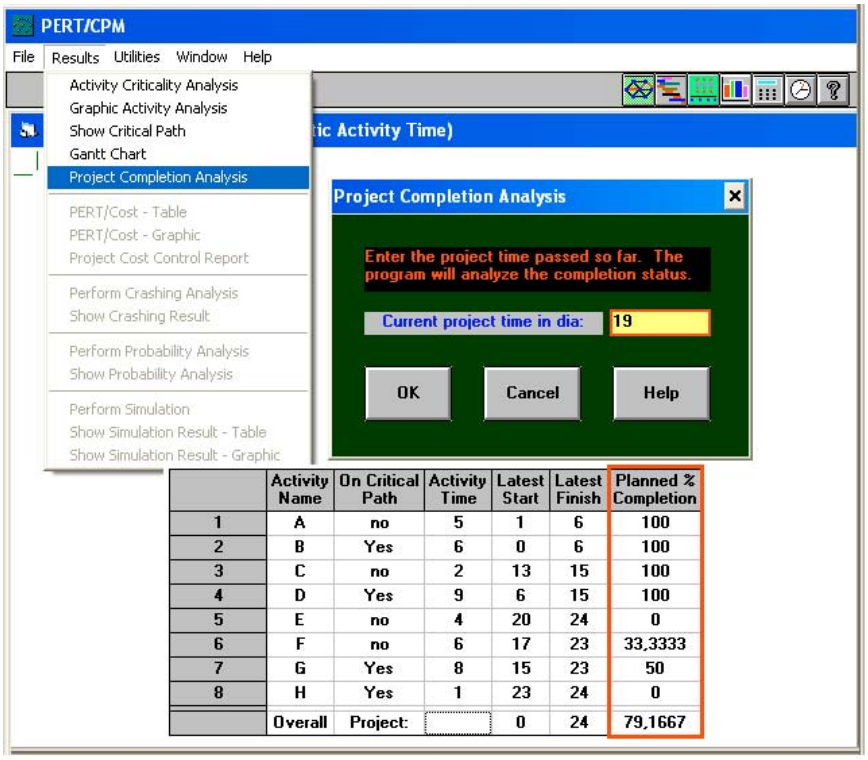
- El gráfico de Gantt se utiliza para calcular la duración y el control del proyecto, en el eje de ordenadas se representan las actividades del proyecto y en el de abscisas el tiempo.

Results/ Gantt Chart

La primera pantalla resulta ilegible, se personaliza Scale / Gantt Chart Scale



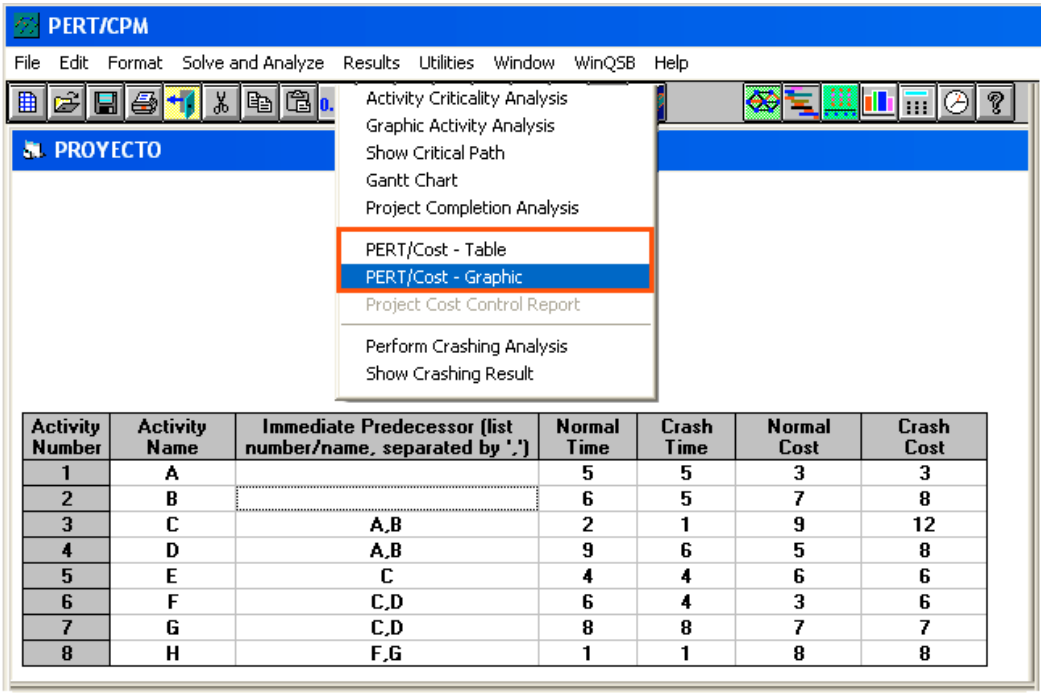
b) Estado del proyecto en un tiempo determinado: Results / Proyect Completion Analysis



	Activity Name	On Critical Path	Activity Time	Latest Start	Latest Finish	Planned % Completion
1	A	no	5	1	6	100
2	B	Yes	6	0	6	100
3	C	no	2	13	15	100
4	D	Yes	9	6	15	100
5	E	no	4	20	24	0
6	F	no	6	17	23	33,3333
7	G	Yes	8	15	23	50
8	H	Yes	1	23	24	0
	Overall	Project:		0	24	79,1667

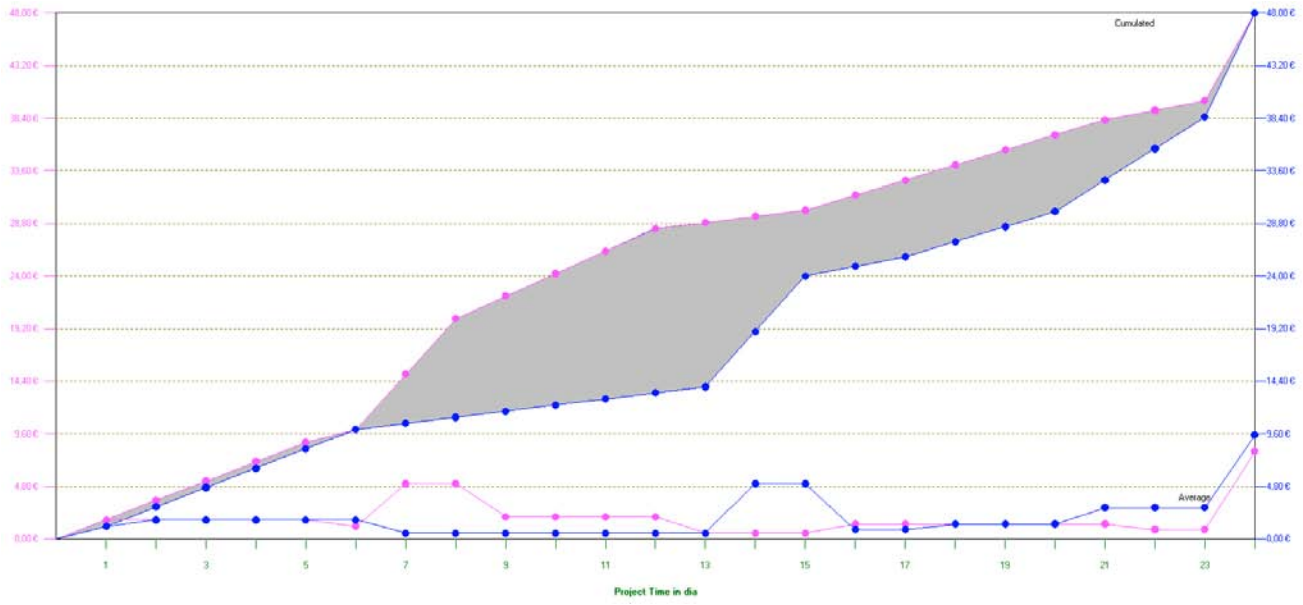
El día 19 de ejecución del proyecto las actividades 1, 2 , 3 y 4 se encuentran terminadas, la actividad 6 se encuentra realizada en un 33,33%, y la actividad 7 se encuentra realizada en un 50%.
La ejecución total del proyecto se encuentra finalizado en un 79,17%.

c) Para obtener la evolución de los costes a lo largo del proyecto, bien en formato tabla o gráfico, se recurre a la opción: PERT / Cost – Table - PERT / Cost – Graphic



Activity Number	Activity Name	Immediate Predecessor (list number/name, separated by ',')	Normal Time	Crash Time	Normal Cost	Crash Cost
1	A		5	5	3	3
2	B		6	5	7	8
3	C	A,B	2	1	9	12
4	D	A,B	9	6	5	8
5	E	C	4	4	6	6
6	F	C,D	6	4	3	6
7	G	C,D	8	8	7	7
8	H	F,G	1	1	8	8

	Project Time in dia	Cost Schedule Based on ES	Cost Schedule Based on LS	Total Cost Based on ES	Total Cost Based on LS
1	1	1,77 €	1,17 €	1,77 €	1,17 €
2	2	1,77 €	1,77 €	3,53 €	2,93 €
3	3	1,77 €	1,77 €	5,30 €	4,70 €
4	4	1,77 €	1,77 €	7,07 €	6,47 €
5	5	1,77 €	1,77 €	8,83 €	8,23 €
6	6	1,17 €	1,77 €	$10	10,00 €
7	7	5,06 €	0,56 €	15,06 €	10,56 €
8	8	5,06 €	0,56 €	20,11 €	11,11 €
9	9	2,06 €	0,56 €	22,17 €	11,67 €
10	10	2,06 €	0,56 €	24,22 €	12,22 €
11	11	2,06 €	0,56 €	26,28 €	12,78 €
12	12	2,06 €	0,56 €	28,33 €	13,33 €
13	13	0,56 €	0,56 €	28,89 €	13,89 €
14	14	0,56 €	5,06 €	29,44 €	18,94 €
15	15	0,56 €	5,06 €	30,00 €	24,00 €
16	16	1,38 €	0,88 €	31,37 €	24,87 €
17	17	1,38 €	0,88 €	32,75 €	25,75 €
18	18	1,38 €	1,38 €	34,13 €	27,12 €
19	19	1,38 €	1,38 €	35,50 €	28,50 €
20	20	1,38 €	1,38 €	36,88 €	29,87 €
21	21	1,38 €	2,88 €	38,25 €	32,75 €
22	22	0,88 €	2,88 €	39,13 €	35,63 €
23	23	0,88 €	2,88 €	40	38,50 €
24	24	8 €	9,50 €	48 €	48 €


Cumulated
Average
Project Time in dia

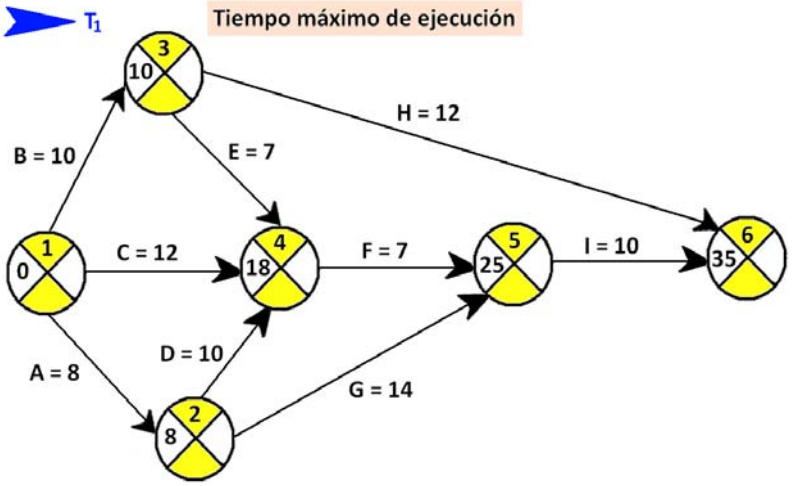
ALGORITMO DE ACKOFF Y SASIENI - SIMULACIÓN DE MICROCOMPUTADOR

Calcular la duración mínima de un proyecto de nueve actividades aereonáuticas (A , B , C , D , E , F , G , H , I) con tiempos de ejecución a un coste mínimo.

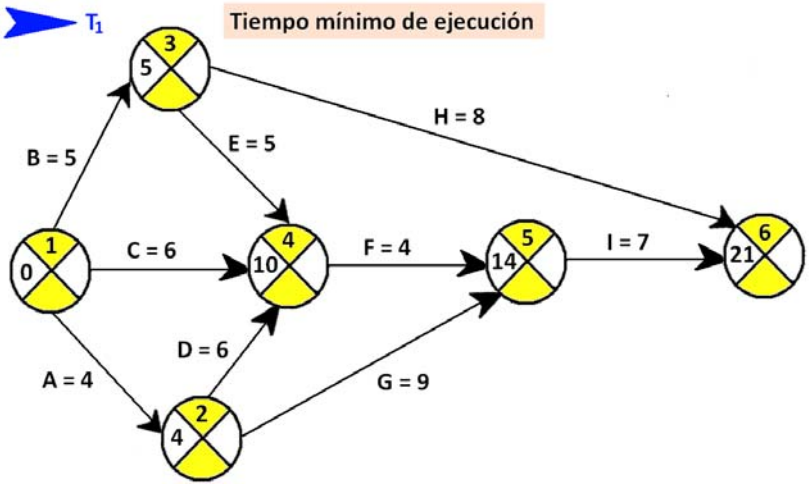
En la tabla adjunta se presentan las actividades, los tiempos de ejecucicón y el coste unitario de reducción.

Actividad	Tiempo normal (máximo)	Tiempo tope (mínimo)	Coste unitario reducción
1 - 2	8	4	2
1 - 3	10	5	4
1 - 4	12	6	3
2 - 4	10	6	4
2 - 5	14	9	3
3 - 4	7	5	5
3 - 6	12	8	2
4 - 5	7	4	5
5 - 6	10	7	1

En la figura se reflejan los tiempos Early de los diferentes sucesos, calculados con los tiempos máximos de ejecución. La duración máxima del proyecto sera de 35 unidades de tiempo.



Por otro lado,



Los tiempos Early de los diferentes sucesos, de acuerdo con los tiempos mínimos de ejecución de las actividades, tienen una duración mínima del proyecto de 21 unidades de tiempo.

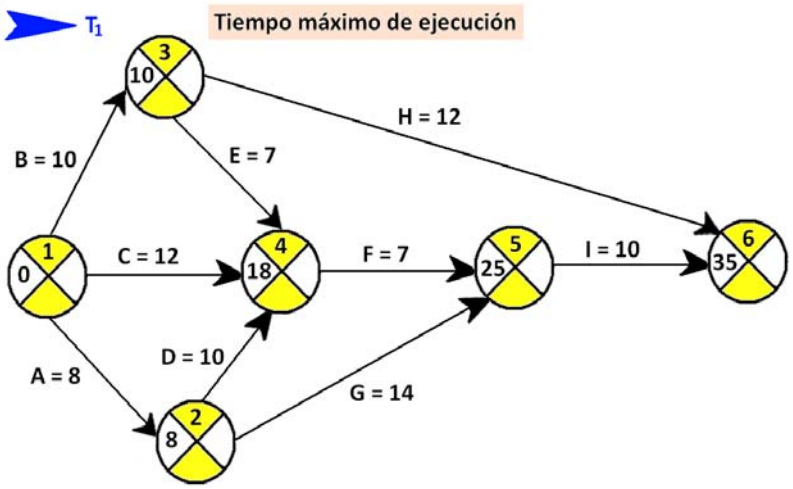
Se deduce que es posible elegir cualquier duración del proyecto entre 21 y 35 unidades de tiempo.

Elegida la duración correspondiente, hay que determinar el tiempo de ejecución de las diferentes actividades, de forma que el correspondiente coste suplementario en concepto de reducción del tiempo sea mínimo.

En general, el método MCE lleva a la resolución de un programa lineal paramétrico, cuyo número de variables es igual al número de actividades en que se ha descompuesto el proyecto y cuyo número de restricciones es igual a la suma del doble del número de actividades, más el número de caminos que tienen la propiedad de unir los vértices extremos del grafo.

Para resolver, de una forma más sencilla, el problema planteado de optimizar la duración de las diferentes actividades a un coste mínimo, se recurre al algoritmo de Ackoff y Sasieni.

ALGORITMO DE ACKOFF Y SASIENI: Partiendo de los tiempos Early del grafo Pert, calculados con los tiempos máximo de ejercución.



Hay nueve actividades N = 9, cinco caminos M = 5. Las actividades correspondientes a cada uno de ellos son:

Caminos	Orden de las actividades	Número de actividades
I	1 – 3 , 3 – 6	2
II	1 – 3 , 3 – 4 , 4 – 5 , 5 – 6	4
III	1 – 4 , 4 – 5 , 5 – 6	3
IV	1 – 2 , 2 – 4 , 4 – 5 , 5 – 6	4
V	1 – 2 , 2 – 5 , 5 – 6	3

Se calcula la longitud de cada camino, fijándose en el tiempo normal (máximo) de cada actividad que compone dicho camino.

Camino I: 1 - 3 , 3 - 6 → 10 + 12 = 22
Camino II: 1 - 3 , 3 - 4 , 4 - 5 , 5 - 6 → 10 + 7 + 7 + 10 = 34
Camino III: 1 - 4 , 4 - 5 , 5 - 6 → 12 + 7 + 10 = 29
Camino IV: 1 - 2 , 2 - 4 , 4 - 5 , 5 - 6 → 8 + 10 + 7 + 10 = 35
Camino V: 1 - 2 , 2 - 5 , 5 - 6 → 8 + 14 + 10 = 32

El tiempo a reducir de cada actividad es la diferencia entre el tiempo normal (máximo) y el tiempo tope (mínimo).

Actividad	Tiempo normal (máximo)	Tiempo tope (mínimo)	Tiempo a reducir	Coste unitario reducción
1 - 2	8	4	4	2
1 - 3	10	5	5	4
1 - 4	12	6	6	3
2 - 4	10	6	4	4
2 - 5	14	9	5	3
3 - 4	7	5	2	5
3 - 6	12	8	4	2
4 - 5	7	4	3	5
5 - 6	10	7	3	1

Con estos datos se elabora la Matriz B (M, N), a partir de donde comienza el análisis de los posibles acortamientos. La matriz se rellena con los datos prorcionados para el Coste unitario de reducción.

MATRIZ B (M, N)

Actividades

Caminos		1 - 2	1 - 3	1 - 4	2 - 4	2 - 5	3 - 4	3 - 6	4 - 5	5 - 6
	I		4					2		
	II		4				5		5	1
	III			3					5	1
	IV	2			4				5	1
	V	2				3				1

- <u>Primer Acortamiento:</u>

Se crea un vector C (M, 1), siendo M el número de caminos del grafo, que contiene los tiempos máximos de realización del proyecto para cada camino, esto es, la longitud.

Posteriormente, se forma el vector F (N, 1), siendo N el número de actividades, donde cada elemento indica las posibles unidades de tiempo en que se pueden reducir las actividades del proyecto.

Del análisis del vector C (M, 1), pueden resultar uno o varios caminos críticos, que serán aquellos que tienen una longitud máxima, y, por tanto, el valor máximo en el vector C.

Vector C(M, 1)

Caminos	Longitud
I	22
II	34
III	29
IV	35
V	32

Vector F(N,1)

Actividades	Tiempo a reducir
1 – 2	4
1 – 3	5
1 – 4	6
2 – 4	4
2 – 5	5
3 – 4	2
3 – 6	4
4 – 5	3
5 – 6	3

Observando el vector C (M, 1) sólo hay un camino crítico (IV) de longitud 35 unidades de tiempo.

Se realiza un análisis de las actividades que componen el camino IV de la matriz B(M, N): 1 – 2 , 2 – 4 , 4 – 5 , 5 – 6, siendo los respectivos valores del vector F (N, 1): 4 , 4 , 3 , 3.

Como no hay ningún valor 0, todas estas actividades se analizarán para poder ser acortadas.

* Se genera la matriz Q con una columna, referente al camino IV, y cuatro filas (al encontrarse cuatro actividades con posibilidad de acortarse).
* El vector P recoge los costes unitarios de reducción correspondientes a las actividades de la matriz Q.
* En el vector R se reflejan las unidades de tiempo posibles a reducir de esas mismas actividades, tomadas en el vector F.

Caminos M	Actividades a recortar Q	Coste unitario reducción P	Tiempo a reducir R
IV	1 – 2	2	4
	2 – 4	4	4
	4 – 5	5	3
	5 – 6	1	3

El mínimo valor de P (1 euro/ud. tiempo) corresponde a la actividad (5 – 6), que puede acortarse 3 unidades de tiempo.

En consecuencia, el primer acortamiento consiste en acortar 3 unidades de tiempo en los caminos en los que intervenga la actividad (5 – 6).

Con ello se obtiene un nuevo valor del vector C y del vector F:

Vector C(M, 1)

Caminos	Longitud
I	22
II	$31 = 34 - 3$
III	$26 = 29 - 3$
IV	$32 = 35 - 3$
V	$29 = 32 - 3$

Vector F(N,1)

Actividades	Tiempo a reducir
1 – 2	4
1 – 3	5
1 – 4	6
2 – 4	4
2 – 5	5
3 – 4	2
3 – 6	4
4 – 5	3
5 – 6	$0 = 3 - 3$

Como el camino IV no ha dejado de ser crítico, se realiza este acortamiento, que supondrá un incremento en el coste del proyecto de:
3 unidades de tiempo x 1 (euro/ud. tiempo) = 3 euros

- <u>Segundo Acortamiento:</u>

Las actividades que componen el camino crítico IV son: 1 – 2 , 2 – 4 , 4 – 5 , 5 – 6.

Los respectivos valores en el vector F son: 4 , 4 , 3 , 0.

Por lo que sólo se analizarán las tres primeras actividades, que son las que tienen posibilidad de reducirse.

Los vectores Q , P , R serán:

Caminos M	Actividades a recortar Q	Coste unitario reducción P	Tiempo a reducir R
IV	1 – 2	2	4
	2 – 4	4	4
	4 – 5	5	3

El mínimo valor de P (2 euros/ud. tiempo) corresponde a la actividad (1 – 2), que puede acortarse 4 días.

Camino IV: 1 – 2 , 2 – 4 , 4 – 5 , 5 –6
Camino V: 1 – 2 , 2 – 5 , 5 – 6

Los nuevos valores vector C acortando los caminos en los que interviene esta actividad:

Vector C(M, 1)

Caminos	Longitud
I	22
II	31
III	26
IV	$28 = 32 - 4$
V	$25 = 29 - 5$

El camino IV ha dejado de ser crítico ya que aparece el camino II después del acortamiento con una longitud de 31 unidades de tiempo.

Para evitarlo, sólo se acorta en 1 unidad de tiempo la actividad (1 – 2), resultando un C rectificado, para que así el camino IV continúe siendo crítico.

Valor rectificado del vector C y nuevo valor del vector F:

Vector C(M, 1)

Caminos	Longitud
I	22
II	31
III	26
IV	$31 = 32 - 1$
V	$28 = 29 - 1$

Vector F(N,1)

Actividades	Tiempo a reducir
$1-2$	$3 = 4 - 1$
$1-3$	5
$1-4$	6
$2-4$	4
$2-5$	5
$3-4$	2
$3-6$	4
$4-5$	3
$5-6$	0

El incremento de coste del proyecto será: 1 unidad de tiempo x 2 (euros/ud.tiempo) = 2 euros

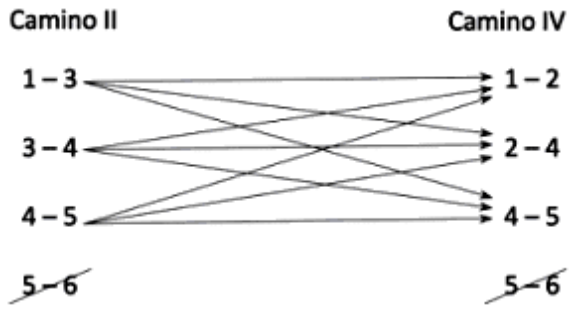
- <u>Tercero Acortamiento:</u>

Hay dos caminos críticos (II y IV), por lo que el vector M tendrá dos filas:

Camino II: $1-3$, $3-4$, $4-5$, $5-6$
Camino IV: $1-2$, $2-4$, $4-5$, $5-6$

La matriz Q tendrá dos columnas (una para cada camino crítico) y contendrá las distintas combinaciones que se pueden formar con las actividades que la componen con posibilidad de acortamiento.

Está combinación se realizará juntando las actividades de un camino con las del otro, pero no con las propias del mismo camino crítico:



El vector P será el resultado de sumar el coste unitario de cada actividad. En el vector R se escogerá la menor unidad de tiempo de entre las dos actividades que conforman cada combinación.

Caminos M	Actividades a recortar Q		Coste unitario reducción P		Tiempo a reducir R	
II IV	1 – 3	1 – 2	(4 + 2)	6	(5 y 3)	3
	1 – 3	2 – 4	(4 + 4)	8	(5 y 4)	4
	1 – 3	4 – 5	(4 + 5)	9	(5 y 3)	3
	3 – 4	1 – 2	(5 + 2)	7	(2 y 3)	2
	3 – 4	2 – 4	(5 + 4)	9	(2 y 4)	2
	3 – 4	4 – 5	(5 + 5)	10	(2 y 3)	2
	4 – 5	1 – 2	(5 + 2)	7	(3 y 3)	3
	4 – 5	2 – 4	(5 + 4)	9	(3 y 4)	3
	4 – 5	4 – 5	(5)	5	(3)	3

El mínimo valor de P es 5 euros/ud. tiempo, que corresponde acortar 3 unidades de tiempo los caminos en los que intervenga la actividad (4 – 5).

El nuevo valor de los vectores C y F serán:

Vector C(M, 1)

$$\begin{pmatrix} \text{Caminos} & \text{Longitud} \\ \text{I} & 22 \\ \text{II} & 28 = 31 - 3 \\ \text{III} & 23 = 26 - 3 \\ \text{IV} & 28 = 31 - 3 \\ \text{V} & 28 \end{pmatrix}$$

Vector F(N,1)

$$\begin{pmatrix} \text{Actividades} & \text{Tiempo a reducir} \\ 1-2 & 3 \\ 1-3 & 5 \\ 1-4 & 6 \\ 2-4 & 4 \\ 2-5 & 5 \\ 3-4 & 2 \\ 3-6 & 4 \\ 4-5 & 0 = 3 - 3 \\ 5-6 & 0 \end{pmatrix}$$

Los caminos II y IV continúan siendo críticos, por lo que es válido el acortamiento.

Además, se suma el camino V como camino crítico.

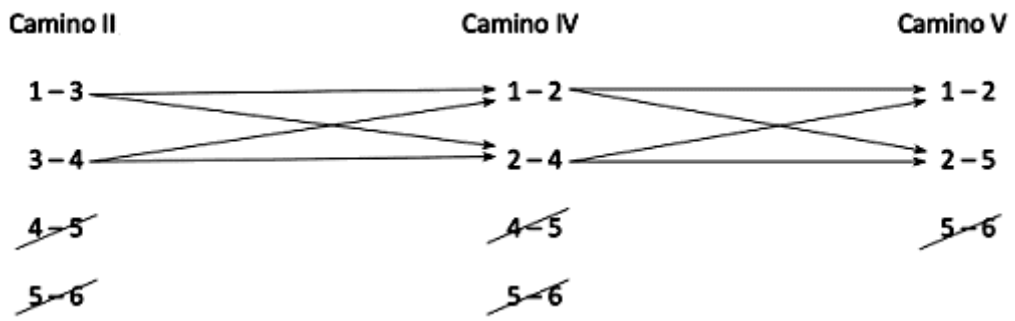
El incremento del coste del proyecto será: 3 unidades de tiempo x 5 (euros/ud. tiempo) = 15 euros

- <u>Cuarto Acortamiento:</u>

Hay tres caminos críticos (II, IV, V) por lo que el vector M tendrá tres filas.

Camino II: 1 – 3 , 3 – 4 , 4 – 5 , 5 – 6
Camino IV: 1 – 2 , 2 – 4 , 4 – 5 , 5 – 6
Camino V: 1 – 2 , 2 – 5 , 5 – 6

Las combinaciones que se pueden formar con las actividades que los componen y tienen posibilidad de acortamiento son:



Siendo el vector P el resultado de sumar el coste unitario de cada actividad y el vector R la menor unidad de tiempo de entre las dos actividades que conforman cada combinación.

La matriz Q (actividades a recortar) será:

Caminos M	Actividades a recortar Q			Coste unitario reducción P		Tiempo a reducir R	
II	1 – 3	1 – 2	1 – 2	(4 + 2)	6	(5 y 3)	3
	1 – 3	1 – 2	2 – 5	(4 + 2 + 3)	9	(5 y 3 y 5)	3
	1 – 3	2 – 4	1 – 2	(4 + 4 + 2)	10	(5 y 4 y 3)	3
IV	1 – 3	2 – 4	2 – 5	(4 + 4 + 3)	11	(5 y 4 y 5)	4
	3 – 4	1 – 2	1 – 2	(5 + 2)	7	(2 y 3)	2
V	3 – 4	1 – 2	2 – 5	(5 + 2 + 3)	10	(2 y 3 y 5)	2
	3 – 4	2 – 4	1 – 2	(5 + 4 + 2)	11	(2 y 4 y 3)	2
	3 – 4	2 – 4	2 – 5	(5 + 4 + 3)	12	(2 y 4 y 5)	2

El mínimo valor de P es 6 euros/ud. tiempo, que corresponde acortar 3 unidades de tiempo los caminos en los que intervienen las actividades (1 – 3) y (1 – 2).

El nuevo valor de los vectores C y F serán:

Vector C(M, 1)

Caminos	Longitud
I	19 = 22 – 3
II	25 = 28 – 3
III	23
IV	25 = 28 – 3
V	25 = 28 – 3

Vector F(N,1)

Actividades	Tiempo a reducir
1 – 2	0 = 3 – 3
1 – 3	2 = 5 – 3
1 – 4	6
2 – 4	4
2 – 5	5
3 – 4	2
3 – 6	4
4 – 5	0
5 – 6	0

Los caminos II, IV y V continúan siendo críticos por lo que es válido el acortamiento.

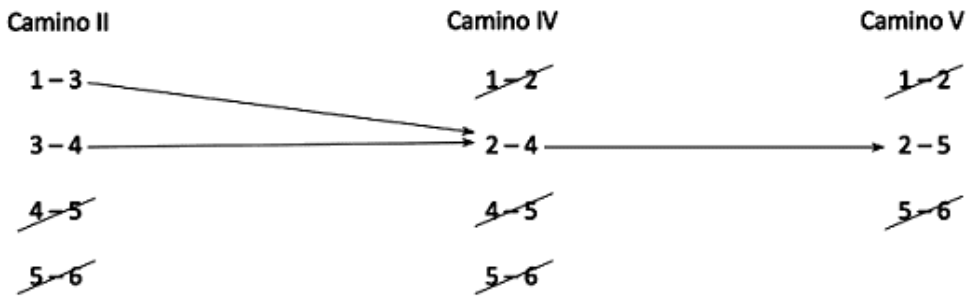
El incremento del coste del proyecto será: 3 unidades de tiempo x 6 (euros/ud. tiempo) = 18 euros

- <u>Quinto Acortamiento:</u>

Hay tres caminos críticos (II, IV, V) por lo que el vector M tendrá tres filas.

Camino II: 1 – 3 , 3 – 4 , 4 – 5 , 5 – 6
Camino IV: 1 – 2 , 2 – 4 , 4 – 5 , 5 – 6
Camino V: 1 – 2 , 2 – 5 , 5 – 6

Las combinaciones que se pueden formar con las actividades que los componen y tienen posibilidad de acortamiento son:



Siendo el vector P el resultado de sumar el coste unitario de cada actividad y el vector R la menor unidad de tiempo de entre las dos actividades que conforman cada combinación.

La matriz Q (actividades a recortar) será:

Caminos M	Actividades a recortar Q	Coste unitario reducción P	Tiempo a reducir R
II	1 – 3 2 – 4 2 – 5	(4 + 4 + 3) 11	(2 y 4 y 5) 2
IV			
V	3 – 4 2 – 4 2 – 5	(5 + 4 + 3) 12	(2 y 5 y 5) 2

El mínimo valor de P es 11 euros/ud. tiempo, que corresponde acortar 2 unidades de tiempo los caminos en los que intervengan las actividades (1 – 3) , (2 – 4) y (2 – 5).

El nuevo valor de los vectores C y F serán:

Vector C(M, 1)

Caminos	Longitud
I	17 = 19 – 2
II	23 = 25 – 2
III	23
IV	23 = 25 – 2
V	23 = 25 – 2

Vector F(N,1)

Actividades	Tiempo a reducir
1 – 2	0
1 – 3	0 = 2 – 2
1 – 4	6
2 – 4	2 = 4 – 2
2 – 5	3 = 5 – 2
3 – 4	2
3 – 6	4
4 – 5	0
5 – 6	0

Los caminos II, IV y V continúan siendo críticos, por lo que es válido el acortamiento.

Además, se suma el camino III como camino crítico.

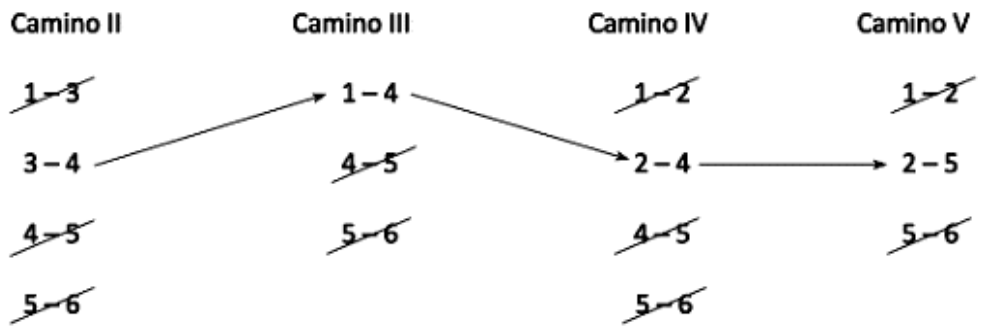
El incremento del coste del proyecto será: 2 unidades de tiempo x 11 (euros/ud. tiempo) = 22 euros

- <u>Sexto Acortamiento:</u>

Hay cuatro caminos críticos (II, III, IV, V) por lo que el vector M tendrá cuatro filas.

Camino II: $1-3$, $3-4$, $4-5$, $5-6$
Camino III: $1-4$, $4-5$, $5-6$
Camino IV: $1-2$, $2-4$, $4-5$, $5-6$
Camino V: $1-2$, $2-5$, $5-6$

Las combinaciones que se pueden formar con las actividades que los componen y tienen posibilidad de acortamiento son:



Siendo el vector P el resultado de sumar el coste unitario de cada actividad y el vector R la menor unidad de tiempo de entre las dos actividades que conforman cada combinación.

La matriz Q (actividades a recortar) será:

Caminos M	Actividades a recortar Q	Coste unitario reducción P	Tiempo a reducir R
II - III IV - V	$3-4$ $1-4$ $2-4$ $2-5$	$(5+3+4+3)$ 15	(2 y 6 y 2 y 3) 2

El mínimo y único valor de P es 15 euros/ud. tiempo, corresponde a acortar 2 unidades de tiempo los caminos en los que intervengan las actividades $(3-4)$, $(1-4)$, $(2-4)$ y $(2-5)$.

El nuevo valor de los vectores C y F serán:

Vector C(M, 1)

$$\begin{pmatrix} \text{Caminos} & \text{Longitud} \\ \text{I} & 17 \\ \text{II} & 21=23-2 \\ \text{III} & 21=23-2 \\ \text{IV} & 21=23-2 \\ \text{V} & 21=23-2 \end{pmatrix}$$

Vector F(N,1)

$$\begin{pmatrix} \text{Actividades} & \text{Tiempo a reducir} \\ 1-2 & 0 \\ 1-3 & 0 \\ 1-4 & 4=6-2 \\ 2-4 & 0=2-2 \\ 2-5 & 1=3-2 \\ 3-4 & 0=2-2 \\ 3-6 & 4 \\ 4-5 & 0 \\ 5-6 & 0 \end{pmatrix}$$

Los caminos II, III, IV y V continúan siendo críticos, por lo que es válido el acortamiento.

El incremento del coste del proyecto será: 2 unidades de tiempo x 15 (euros/ud. tiempo) = 30 euros

- <u>Séptimo Acortamiento:</u>

Observando al vector C hay cuatro caminos críticos (II, III, IV, V).

Camino II: 1 – 3 , 3 – 4 , 4 – 5 , 5 – 6
Camino III: 1 – 4 , 4 – 5 , 5 – 6
Camino IV: 1 – 2 , 2 – 4 , 4 – 5 , 5 – 6
Camino V: 1 – 2 , 2 – 5 , 5 – 6

Las combinaciones que se pueden formar con las actividades que los componen y tienen posibilidad de acortamiento son:

Camino II	Camino III	Camino IV	Camino V
~~1 – 3~~	1 – 4	~~1 – 2~~	~~1 – 2~~
~~3 – 4~~	~~4 – 5~~	~~2 – 4~~	2 – 5
~~4 – 5~~	~~5 – 6~~	~~4 – 5~~	~~5 – 6~~
~~5 – 6~~		~~5 – 6~~	

Las actividades de los caminos II y IV han sido reducidas a su unidad de tiempo mínima, por lo que no pueden combinarse.

Los caminos III y V tienen las únicas actividades posibles de acortamiento, que son (1 – 4) y (2 – 5).

En caso de acortar alguno de los caminos III y V, seguirían quedando otros dos caminos críticos II y IV, por lo que no se conseguiría reducir la duración total del proyecto.

Por tanto, se da por concluido el algortitmo.

El proyecto queda reducido a 21 unidades de tiempo, con un acortamiento (3 + 1 + 3 + 3 + 2 + 2) de 14 unidades de tiempo (35 – 21).

El incremento de coste es: 3 x 1 + 1 x 2 + 3 x 5 + 3 x 6 + 2 x 11 + 2 x 15 = 90 euros.

Resumen para cada acortamiento:

Acortamientos	Actividades acortadas	Coste/ unidad tiempo	Tiempo acortado	Tiempo acortado acumulado	Duración total proyecto	Coste acortamiento	Coste acumulado
1	5 – 6	1	3	3	32	3	3
2	1 – 2	2	1	4	31	2	5
3	4 – 5	5	3	7	28	15	20
4	1 – 3 1 – 2	6	3	10	25	18	38
5	1 – 3 2 – 4 2 – 5	11	2	12	23	22	60
6	3 – 4 1 – 4 2 – 4 2 – 5	15	2	14	21	30	90

Resumen de los cambios efectuados en el vector F:

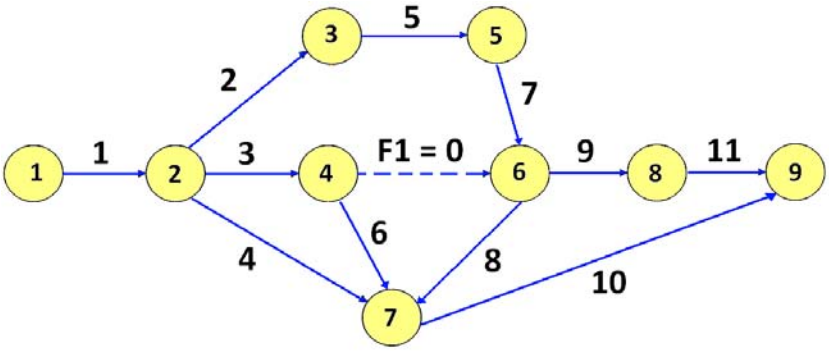
		Acortamientos						
		Inicio	Primero	Segundo	Tercero	Cuarto	Quinto	Sexto
Actividades	1 – 2	4	4	3	3	0	0	0
	1 – 3	5	5	5	5	2	0	0
	1 – 4	6	6	6	6	6	6	4
	2 – 4	4	4	4	4	4	2	0
	2 – 5	5	5	5	5	5	3	1
	3 – 4	2	2	2	2	2	2	0
	3 – 6	4	4	4	4	4	4	4
	4 – 5	3	3	3	0	0	0	0
	5 – 6	3	0	0	0	0	0	0

ALGORITMO DE ACKOFF Y SASIENI - SIMULACIÓN DE MICROCOMPUTADOR

Un proyecto aeronáutico se compone de las especificaciones recogidas en la tabla adjunta. Determinar el coste del proyecto en el mínimo tiempo posible.

Actividad	Precedentes	Tiempo normal ejecución (días) máximo	Tiempo tope ejecución (días) mínimo	Coste unitario de reducción euros
1	----	10	10	0
2	1	10	10	0
3	1	40	40	0
4	1	28	20	10
5	2	8	8	0
6	3	10	6	40
7	5	30	10	180
8	7 , 3	20	8	50
9	7 , 3	24	14	65
10	4, 6, 8	10	6	80
11	9	12	8	30

Grafo PERT del proyecto:



Hay doce actividades $N = 12$, seis caminos $M = 6$. Las actividades correspondientes a cada uno de ellos son:

Caminos	Orden de las actividades	Número actividades
I	1 - 2 - 5 - 7 - 8 - 10	6
II	1 - 2 - 5 - 7 - 9 - 11	6
III	1 - 3 - F1 - 8 - 10	5
IV	1 - 3 - F1 - 9 - 11	5
V	1 - 3 - 6 - 10	4
VI	1 - 4 - 10	3

Para calcular la longitud de cada camino se elige el tiempo normal de ejecución, considerando los días a reducir (Tiempo normal - Tiempo tope)

Actividad	Precedentes	Tiempo normal ejecución (máximo)	Tiempo tope ejecución (mínimo)	Días a reducir
1	----	10	10	0
2	1	10	10	0
3	1	40	40	0
4	1	28	20	8
5	2	8	8	0
6	3	10	6	4
7	5	30	10	20
8	7 , 3	20	8	12
9	7 , 3	24	14	10
10	4, 6, 8	10	6	4
11	9	12	8	4

Camino I: 1 - 2 - 5 - 7 - 8 - 10 $\rightarrow$ $10+10+8+30+20+10=88$

Camino II: 1 - 2 - 5 - 7 - 9 - 11 $\rightarrow$ $10+10+8+30+24+12=94$

Camino III: 1 - 3 - F1 - 8 - 10 $\rightarrow$ $10+40+0+20+10=80$

Camino IV: 1 - 3 - F1 - 9 - 11 $\rightarrow$ $10+40+0+24+12=86$

Camino V: 1 - 3 - 6 - 10 $\rightarrow$ $10+40+10+10=70$

Camino VI: 1 - 4 - 10 $\rightarrow$ $10+28+10=48$

Con estos datos se forma la matriz $B(M, N)$, a partir de donde comienza el análisis de los posibles acortamientos.

- <u>Primer Acortamiento:</u>

Actividades

Caminos	1 - 2 (1)	2 - 3 (2)	2 - 4 (3)	2 - 7 (4)	3 - 5 (5)	4 - 7 (6)	5 - 6 (7)	6 - 7 (8)	6 - 8 (9)	7 - 9 (10)	8 - 9 (11)	4 - 6 F1
I	0	0			0		180	50		80		
II	0	0			0		180		65		30	
III	0		0					50		80		0
IV	0		0						65		30	0
V	0		0			40				80		
VI	0			10						80		

Se crea un vector $C(M,1)$, siendo M el número de caminos del grafo, que contiene los tiempos máximos de realización del proyecto para cada camino.

Posteriormente, se forma el vector $F(N, 1)$, siendo N el número de actividades, donde cada elemento indica los posibles días en que se pueden reducir las actividades del proyecto.

Del análisis del vector $C(M,1)$ pueden resultar uno o varios caminos críticos, que serán aquellos que tienen longitud máxima y, por tanto, el valor máximo en el vector $C(M,1)$.

Vector C(M, 1)

Caminos	Longitud
I	88
II	94
III	80
IV	86
V	70
VI	48

Vector F(N, 1)

Actividad	Días a reducir
1	0
2	0
3	0
4	8
5	0
6	4
7	20
8	12
9	10
10	4
11	4

Observando el vector $C(M,1)$ solo hay un camino crítico (II) de longitud 94 días.

Se utiliza un vector $M(I, 1)$ dimensionado según el número máximo de caminos críticos simultáneos posibles, siendo este valor el número total de caminos M.

La función del vector $M(I, 1)$ consiste en almacenar el número de orden de los caminos críticos.

Con un solo camino crítico: $M(1, 1) \equiv$ número de orden del camino crítico $= 2$

Se realiza un análisis de las actividades que se pueden acortar en el Camino II de la matriz

$B(M, N)$: 1 2 5 7 9 11

siendo los respectivos valores de la matriz $F(N, 1)$: 0 0 0 20 10 4

Se genera la matriz Q con una columna (referene al camino II) y tres filas (al encontrrarse tres actividades con posibilidad de acortarse).

El vector P (de las mismas dimensiones) archiva los costes unitarios de reducción correspondientes a las actividades archivadas en la matriz Q, y que son extraídas de la fila 2 (Camino 2) de la matriz $B(M, N)$

En el vector R se almacenan los días posibles a reducir de esas mismas actividades, tomados del vector F.

Actividades a recortar Q	Costes unitarios de reducción P	Tiempo a reducir R
7	180	20
9	65	10
11	30	4

El mínimo valor de P (30 euros/día) corresponde a la actividad 11, que puede acortarse 4 días.

En consecuencia, en principio, el primer acortamiento consiste en acortar los caminos en los que interviene la actividad 11 en cuatro días.

El nuevo vector C y F acortando 4 días a la actividad 11:

Vector C(M, 1)

Caminos	Longitud
I	88
II	90
III	80
IV	$\underset{\rightarrow}{82}$
V	70
VI	48

Vector F(N, 1)

Actividad	Días a reducir
1	0
2	0
3	0
4	8
5	0
6	4
7	20
8	12
9	10
10	4
11	$\underset{\rightarrow}{0}$

Como el camino II no ha dejado de ser crítico, se realiza este acortamiento, que supondrá un incremento en el coste del proyecto de: 4 días x 30 (euros/día) = 120 euros

- <u>Segundo Acortamiento:</u>

El camino crítico II tiene una duración de 90 días,
M(1, 1) ≡ número de orden del camino crítico = 2

Los vectores Q , P y R serán:

Actividades a recortar Q	Costes unitarios de reducción P	Tiempo a reducir R
7	180	20
9	65	10

El mínimo valor de P (65 euros/día) corresponde a la actividad 9, que puede acortarse 10 días.

El nuevo valor de C acortando 10 días a la actividad 9:

El camino II ha dejado de ser crítico, ya que aparece el camino I después del acortamiento con una longitud de 88 días.

Para evitar esto, sólo se acorta en 2 días la actividad 9, resultando un valor rectificado de C.

Vector C(M, 1)

Caminos	Longitud
I	88
II	$\underset{\rightarrow}{80}$
III	80
IV	$\underset{\rightarrow}{72}$
V	70
VI	48

Valor rectificado de C acortando 2 días a la actividad 9:

Vector C(M, 1)

Caminos	Longitud
I	88
II	$\underline{88}$
III	80
IV	$\underline{80}$
V	70
VI	48

Vector F(N, 1)

Actividad	Días a reducir
1	0
2	0
3	0
4	8
5	0
6	4
7	20
8	12
9	$\underline{8}$
10	4
11	0

Como el camino II no ha dejado de ser crítico, se realiza este acortamiento, que supondrá un incremento en el coste del proyecto de: 2 días x 65 (euros/día) = 130 euros

- <u>Tercero Acortamiento:</u>

Hay dos caminos críticos (I y II) , por lo que el vector M tendrá dos filas

$$\begin{cases} \text{Camino I:} & 1 - 2 - 5 - 7 - 8 - 10 \\ \text{Camino II:} & 1 - 2 - 5 - 7 - 9 - 11 \end{cases}$$

La matriz Q tendrá dos columnas (una para camino crítico) y contendrá las distintas combinaciones que se pueden formar con las actividades que la componen con posibilidad de acortamiento.

Actividades a recortar Q		Costes unitarios de reducción P	Tiempo a reducir R
7	7	180	20
7	9	$180 + 65 = 245$	8
8	7	$50 + 180 = 230$	12
8	9	$50 + 65 = 115$	8
10	7	$80 + 180 = 260$	4
10	9	$80 + 65 = 145$	4

El mínimo valor de P es de 115 euros/día, que corresponde a acortar las actividades 8 y 9 en ocho días cada una.

El nuevo valor de C y F acortando 8 días las actividades 8 y 9:

Vector C(M, 1)

Caminos	Longitud
I	80
II	80
III	72
IV	72
V	70
VI	48

Vector F(N, 1)

Actividad	Días a reducir
1	0
2	0
3	0
4	8
5	0
6	4
7	20
8	4
9	0
10	4
11	0

En el vector C se observa que el camino I y II continúan siendo críticos, por lo que es válido el acortamiento.

El incremento del coste del proyecto será: 8 días x 115 (euros/día) = 920 euros

- Cuarto Acortamiento:

Hay dos caminos críticos (I y II) , por lo que el vector M tendrá dos filas

$$\begin{cases} \text{Camino I:} & 1 - 2 - 5 - 7 - 8 - 10 \\ \text{Camino II:} & 1 - 2 - 5 - 7 - 9 - 11 \end{cases}$$

La matriz Q tendrá dos columnas (una para camino crítico) y contendrá las distintas combinaciones que se pueden formar con las actividades que la componen con posibilidad de acortamiento.

Los vectores Q , P y R serán:

M	Actividades a recortar Q	Costes unitarios de reducción P	Tiempo a reducir R
1	7 7	180	20
2	8 7	50 + 180 = 230	4
	10 7	80 + 180 = 260	4

El mínimo valor de P es 180 euros/día, que corresponde a acortar la actividad 7, pudiendo reducirse en 20 días.

El nuevo valor de C acortando 20 días a la actividad 7:

Los caminos I y II han dejado de ser críticos.

En consecuencia, sólo se acorta en 8 días la actividad 7, resultando un valor rectificado de C.

Vector C(M, 1)

Caminos	Longitud
I	$80-20=60$
II	$80-20=60$
III	72
IV	72
V	70
VI	48

Valor rectificado de C acortando 8 días a la actividad 7:

Vector C(M, 1)

Caminos	Longitud
I	$\underline{72}$
II	$\underline{72}$
III	72
IV	72
V	70
VI	48

Vector F(N, 1)

Actividad	Días a reducir
1	0
2	0
3	0
4	8
5	0
6	4
7	$\underline{12}$
8	4
9	0
10	4
11	0

En el vector C se observa que el camino I y II continúan siendo críticos, por lo que es válido el acortamiento. Se añaden los caminos III y IV.

El incremento del coste del proyecto será: 8 días x 180 (euros/día) = 1.440 euros

- <u>Quinto Acortamiento:</u>

Atendiendo al vector C hay cuatro caminos críticos (I , II , III , IV).

$$\begin{cases} \text{Camino I:} & 1 - 2 - 5 - 7 - 8 - 10 \\ \text{Camino II:} & 1 - 2 - 5 - 7 - 9 - 11 \\ \text{Camino III:} & 1 - 3 - F1 - 8 - 10 \\ \text{Camino IV:} & 1 - 3 - F1 - 9 - 11 \end{cases}$$

Analizando estos caminos para analizar un posible acortamiento, no se puede dar ninguna combinación, con las actividades que los componen, que sea susceptible de reducicción.

En esta línea, en el camino IV: (1 - 3 - F1 - 9 - 11) las dos únicas actividades posibles (9 y 11) con posibilidad inicial de acortarse, han sido reducidas a su tiempo mínimo, como puede observarse en el vector F.

En caso de acortar alguno de los otros caminos críticos (I , II , III), quedaría un único camino crítico (IV), con lo que no se reduciría la duración total del proyecto.

El proyecto queda reducido a 72 días, con un acortamiento (4 + 2 + 8 + 8) de 22 días (94 – 72).

El incremento de coste es: 4 x 30 + 2 x 65 + 8 x 115 + 8 x 180 = 2.610 euros.

Para una mejor interpretación, en la tabla adjunta se recogen los resultados para acortamiento

Acorta	Actividad acortada (1)	Coste/día (2)	Días acortados (3)	Días acortados acumulados (4)	Duración total (5)	Coste acortamiento (6)	Coste acumulado (7)
1	11	30	4	4	90	120	120
2	9	65	2	6	88	130	250
3	8 , 9	115	8	14	80	920	1.170
4	7	180	8	22	72	1.440	2.610

Adviértase que si tratara de acortar en 10 días la duración del proyecto, observando la columna (4) la situación queda en el 3º acortamiento, teniendo que realizar los dos primeros acortamientos, más los 4 días restantes del tercer acortamiento.

La duración del proyecto (columna 5) será de $88 - 4 = 84$ días

Las actividades acortadas (columnas 1 y 3) serán: $\begin{cases} \text{Actividad 11 (en 4 días)} \\ \text{Actividad 9 (en 2 días)} \\ \text{Actividad 8 (en 4 días)} \end{cases}$

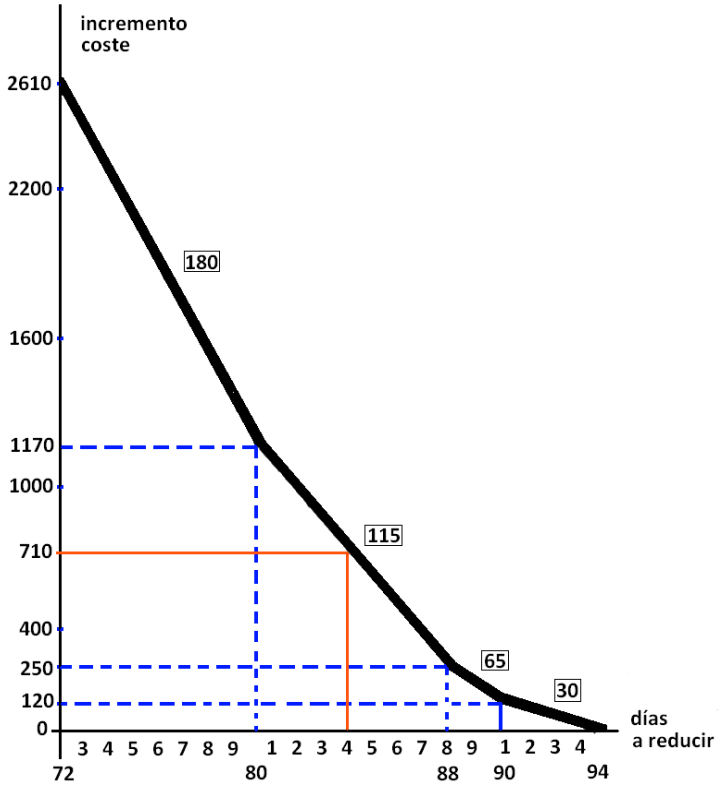
El coste del acortamiento (columna 2 y 3) : $4 \times 30 + 2 \times 65 + 4 \times 115 = 710$ euros

Una vez que se han acortado estas actividades en las cantidades señaladas, se aplican los algoritmos PERT o CPM para calcular las holguras y realizar el control del proyecto.

Con los datos obtenidos en cada uno de estos acortamientos se construye un gráfico, representando en las abscisas los días a reducir y, en las ordenadas, el incremento del coste.

El gráfico tiene la utilidad de visualizar el incremento del coste del proyecto correspondiente a un acortamiento determinado, o bien, conocido un incremento del coste, conocer la duración total del proyecto.

Si se tratara de acortar en 10 días la duración del proyecto, el incremento del coste sería de 710 euros.



Tratamiento de Datos
Anova de un Factor con Medidas repetidas.
Análisis de la Varianza con varios factores.
Análisis Multivariable

El Análisis de la varianza con varios factores presenta una media teórica definida por tres términos
Análisis de la Varianza con varios factores

ANÁLISIS VARIANZA

En cualquier experimento se pueden distinguir dos fases. Una primera, que consiste en la observación y análisis de los hechos que acontecen, y otra segunda, que interpreta y obtiene conclusiones.
La Estadística Descriptiva se encarga de dar una descripción numérica, ordenar y simplificar la información recogida en la primera fase.
La Estadística Teórica, con la información obtenida en el muestreo de la primera fase, pretende generalizar o predecir los resultados para toda la población.

AF
ACP
Análisis Multivariante
El Análisis de Componentes Principales es una técnica de reducción de la dimensionalidad.
Actualmente es el método más utilizado en la investigación social y comercial.
El Análisis de Componentes Principales (ACP) tiene como objetivo simplificar la estructura de los datos transformando las variables en análisis en el menor número posible de factores comunes o componentes principales que sean combinaciones lineales de las variables.

El índice de Gini verifica:
Principio del Anonimato
Principio de la Renta Relativa
Principio de Dalton
Principio de la Población
La curva de Lorenz es la representación de la concentración de recursos entre individuos.
El índice de Gini expresa el grado de concentración de los recursos.
El cambio de escala no afecta al índice
El cambio de origen afecta al índice

Análisis Multivariante
INVESTIGACIÓN en Cómic
Análisis Factorial
Componentes Principales (ACP)
Análisis Cluster
SPSS